

УДК 531.8

© 1990 г.

И. ДОБИШ

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОДВИЖНОГО ЭКИПАЖА

Предлагается анализ влияния взаимной корреляции входных процессов на поведение нелинейной многомерной системы. Рассмотрен пример трехмассовой модели подвижного экипажа с двумя взаимозапаздывающими входами при гармоническом и случайном возбуждениях.

1. Основные соотношения. Общая корреляционная теория линейных многомерных систем построена в [1]. Для нелинейных многомерных систем анализ существенно сложнее вследствие отсутствия принципа суперпозиции. Поэтому нелинейные связи в системе необходимо линеаризовать каким-либо методом. В случае, когда система возбуждается взаимно независимыми процессами, существует простое решение, поскольку после линеаризации задачи можно складывать эффекты от отдельных входных воздействий. В противном случае для возбуждения взаимно зависимыми процессами невозможно использовать известные аналитические решения при определении дисперсионно-частотных свойств таких систем.

Нелинейную многомерную систему во многих приложениях, связанных с динамикой транспортных средств, можно описать матричным дифференциальным уравнением типа

$$My'' + K(y' - x') + Cy + \chi(y - x) = 0 \quad (1.1)$$

где M — невырожденная матрица порядка n ; K , C — матрицы порядка n ; x , y — n -мерные векторы перемещений; $\chi(y, x)$ — n -мерный вектор нелинейных функций.

Предполагаем, что система кинематически возбуждается по закону, описываемому функцией профиля дороги, по которой она движется

$$x = x_0 f \quad (1.2)$$

где x_0 — единичная амплитуда, которую выберем в качестве масштаба переменных

$$z = (y - x) / x_0 \quad (1.3)$$

Используя, например, метод эквивалентной или статической линеаризации [2], можно записать

$$\chi(z) = K_0 m_z + K_1 z^0, \quad K_0 = [k_0(m_{zi}, D(z_i^0))] \\ K_1 = [k_1(m_{zi}, D(z_i^0))] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где K_0 , K_1 — матрицы коэффициентов линеаризации k_0 , k_1 , z^0 — вектор переменных. Уравнение (1.1) можно записать в форме

$$Qz + \chi(z) = Gf, \quad m_z = (Q + K_0)^{-1} Gm_f = \Phi_0 m_f \\ z^0 = (Q + K_1)^{-1} Gf^0 = \Phi_1 f^0$$

где Φ_0 , Φ_1 — матрицы порядка n , состоящие из передаточных функций линеаризованной системы.

Для определения выходов необходимо знать полную матрицу спектральных плотностей (эрмитова матрица порядка n):

$$S^f(\eta) = [S_{ij}^f(\eta)] \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

где $\eta = \omega/\Omega$ — относительная угловая частота, Ω — угловая частота основной подсистемы.

Из известных матриц Φ_0 , Φ_1 , S можно определить спектральные плотности выходных процессов

$$m_z = \Phi_0 m_f |_{p=0}, \quad S_m^z(\eta) = e_m^T \Phi_1^H S^f \Phi_1 e_m$$

где e_m — вектор m -го столбца единичной матрицы. Из этого выражения следует вектор дисперсий

$$d = [D(z_m^\circ)] = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_m^z(\eta, m_{z1}, \dots, m_{zn}, D(z_1^\circ), \dots, D(z_n^\circ)) d\eta \right] \quad (1.4)$$

определение которого составляет основную проблему аналитического решения линейризованных многомерных систем. Уравнение (1.4) — трансцендентное, так как вектор в левой части является также аргументом функций спектральных плотностей интеграла в правой части. Решение таких уравнений в замкнутой форме невозможно.

В приложениях, связанных с транспортом, можно предполагать, что все входные процессы имеют одинаковую спектральную плотность обладающую следующими свойствами (θ_{ij} — запаздывание во времени между f_j° и f_i°):

$$S_{ii}^f(\eta) = S^f(\eta), \quad S_{ij}^f(\eta) = S^f(\eta) (\cos \theta_{ij} - j \sin \theta_{ij}) \\ \theta_{ij} = \eta \theta_{ij} \quad (1.5)$$

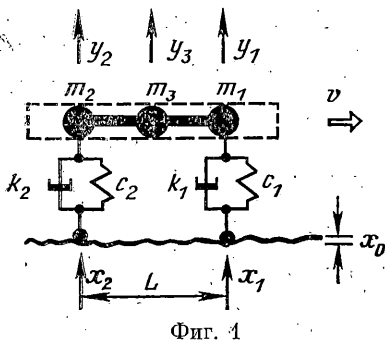
Спектральная плотность выходных процессов с входами типа (1.5) имеет три компоненты

$$S_m^z = S^f(\eta) \sum_{i=1}^n |\Phi_{mi}|^2 + 2S^f(\eta) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n [\operatorname{Re}\{\Phi_{mi}^* \Phi_{mj}\} \cos \theta_{ij} + \\ + \operatorname{Im}\{\Phi_{mi}^* \Phi_{mj}\} \sin \theta_{ij}] \quad (1.6)$$

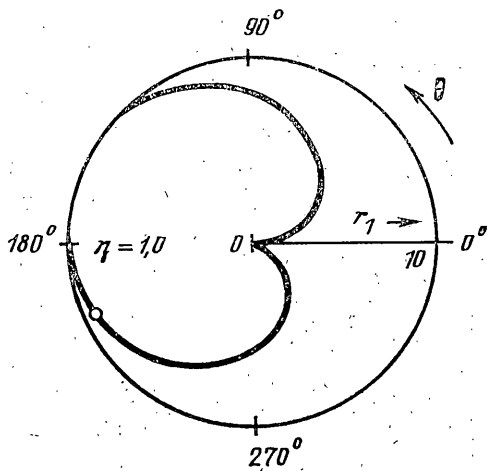
откуда следует, что вектор дисперсий реакции системы состоит из двух компонент: дисперсии выхода при независимых входах; дисперсий, получаемой от произведения синуса и косинуса компонент взаимных спектров. Вычисление первой осуществляется взятием интеграла от рациональных функций [2], вычисление второй возможно только численными методами для конкретных параметров системы.

Вторая компонента отражает изменение частотных и модальных свойств, или так называемой модуляции фазы резонансных кривых от времени запаздывания (1.5) входных процессов. Из (1.6) вытекает, что это явление слабо зависит от типа спектральной плотности $S^f(\eta)$, передаточной функции Φ_m и зависит только от взаимного запаздывания входных процессов. В целом явление модуляции фазы зависит только от взаимно корреляционных функций входных процессов.

2. Модель движущегося экипажа. Влияние воздействия входных процессов можно показать на простой модели подвижного экипажа (фиг. 1). Модель состоит из стержня на двух подвесах с линейным демпфированием и нелинейными пружинами с кубической характеристикой жесткости. Предполагаем, что модель движется со скоростью V по поверхности, имеющей гармонический или случайно волновой характер. Уравне-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния (1.1)–(1.3) позволяют описать движение модели системой уравнений

$$\begin{aligned} z_1''(1+M) + \delta z_1' + (z_1 + s_1 x_0^2 z_1^3) + M z_2'' &= \\ &= -(1+M) f_1'' - M f_2'' \\ z_2''(1+M) + \delta z_2' + (z_2 + s_2 x_0^2 z_2^3) + M z_1'' &= \\ &= -M f_1'' - (1+M) f_2'' \\ c_1(x_1 y_1) &= c_{10} [(y_1 - x_1) + S_1 (y_1 - x_1)^3] \\ c_2(x_2 y_2) &= c_{20} [(y_2 - x_2) + S_2 (y_2 - x_2)^3] \\ m_1 = m_2 = m, \mu &= m_3/m, M = \mu/4 \\ \Omega^2 &= c_{10}/m, \gamma = c_{20}/c_{10}, \delta = k_1 (m c_{10})^{-1/2} \\ k_1 &= k_2, \tau = \Omega t, \eta_0 = \omega/\Omega \\ z_1 &= (y_1 - x_1)/x_0, z_2 = (y_2 - x_2)/x_0, f_1 = x_1/x_0, f_2 = x_2/x_0. \end{aligned}$$

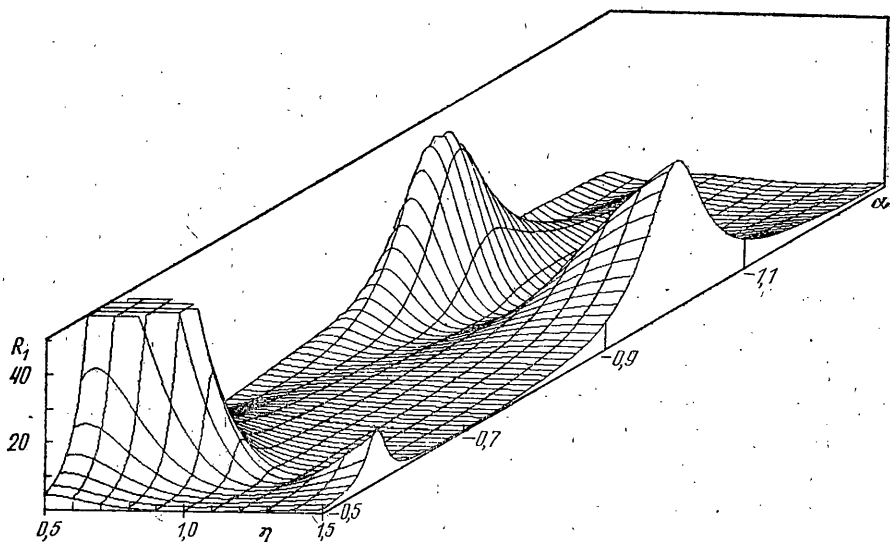
Запаздывание во времени зависит от скорости движения V и от размера модели L : $T_p = L/v$. Введением единицы измерения скорости движения $v_0 = \Omega L/2\pi$ можно установить относительные, безразмерные параметры: скорость $\alpha = v/v_0$, запаздывание во времени $\theta = 2\pi/\alpha$, запаздывание по фазе $\theta = 2\pi\eta_0/\alpha$, характеристическую длину волны поверхности $\beta = L_0/L = \alpha/\eta_0$ (L_0 — абсолютная, средняя характеристическая длина волны поверхности).

Следуя методу гармонической линеаризации [3], нелинейную связь в системе заменим коэффициентами

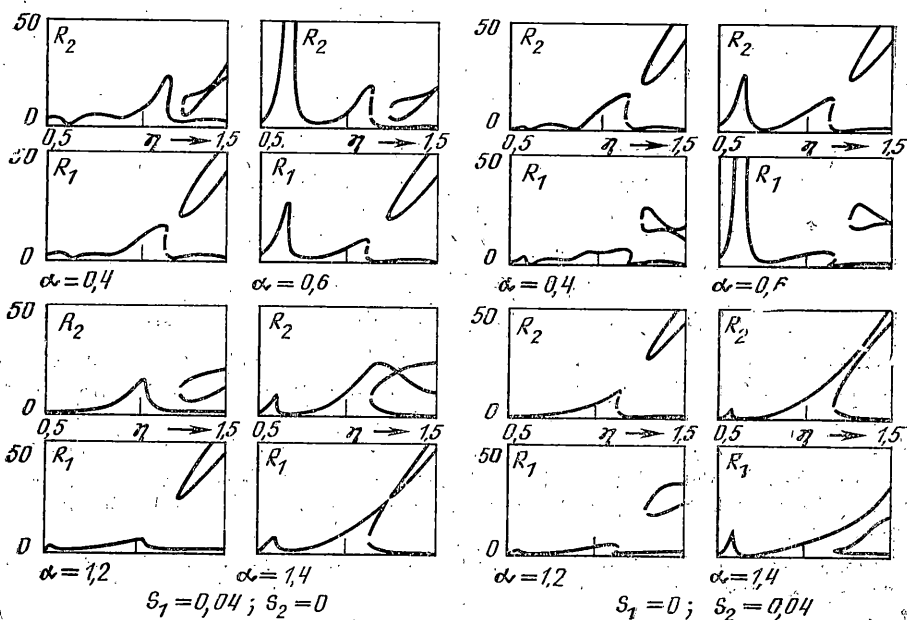
$$\begin{aligned} z_1 + s_1 x_0^2 z_1^3 &= a_1 z_1, z_2 + s_2 x_0^2 z_2^3 = a_2 z_2 \\ a_1 &= 1 + {}^3/4 s_1 x_0^2 r_1^2 = 1 + S_1 R_1 \\ a_2 &= 1 + {}^3/4 s_2 x_0^2 r_2^2 = 1 + S_2 R_2 \end{aligned}$$

где r_1, r_2 — амплитуды первой гармоники процессов z_1, z_2 и $R_1 = r_1^2/2, R_2 = r_2^2/2, S_1 = {}^3/2 s_1 x_0^2, S_2 = {}^3/2 s_2 x_0^2$. После этого линеаризованную систему можно решить аналитически на основе уравнений (1.4)–(1.6) с использованием фильтрующих свойств δ -функции, спектральной плотности гармонического процесса.

Предполагая, что система линейная ($S_1 = 0, S_2 = 0$). Для определенных параметров системы можно определить амплитудно-частотные характеристики и получить зависимости от отдельных параметров. Из симметрии системы вытекают взаимно симметрические свойства начала и конца модели, при замене движения вперед на движение назад, но в общем они отличаются. Эти свойства показаны на фиг. 2, где представлена зависимость амплитуды r_1 от фазы запаздывания $\theta \in [0, 2\pi]$, которая несимметрична относительно оси $\theta = 0$, что подтверждает влияние синуса и косинуса компонент (1.6). Отсюда вытекает также модуляция амплитудно-час-



Фиг. 3



Фиг. 4

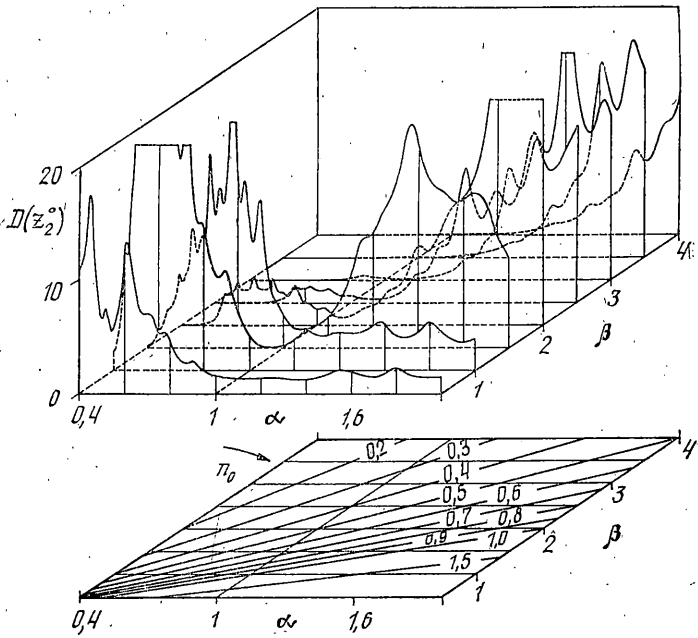
тотных кривых системы в зависимости от скорости движения α (пример линейной системы показан на фиг. 3).

Модуляция зависимостей более важна, когда система нелинейна, так как с наклоном резонансных вершин возникают отдельные части кривых, как показано на фиг. 4. Характеристики для $(S_1 \neq 0, S_2 = 0)$ и $(S_1 = 0, S_2 \neq 0)$ аналогичны по виду, но отличаются вследствие несимметрии такой системы.

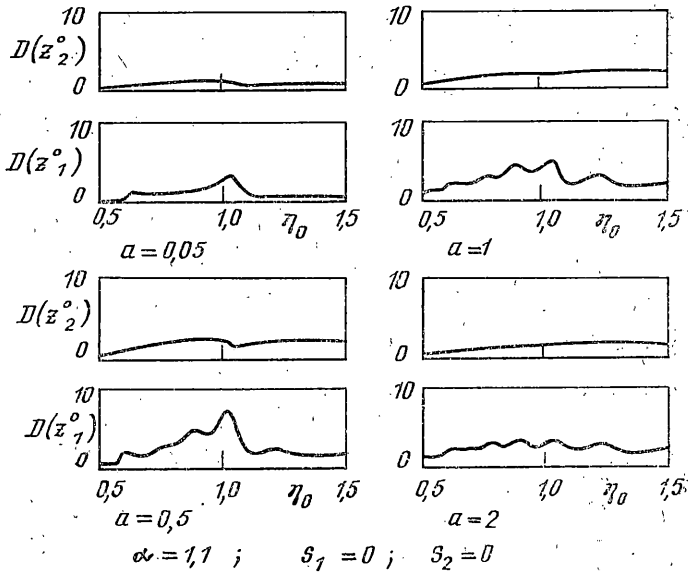
Из-за резонансных кривых в координатах частоты η и нелинейностей S_1, S_2 возникают области, в которых существуют два устойчивых и одно неустойчивое решения. Такие области будем называть областями многозначности.

Решение уравнения (1.6) для гармонического возбуждения и нелинейности в одной подвеске сводится к решению уравнения кубического типа (например, для $S_1 \neq 0, S_2 = 0$):

$$R_1^3(AS_1^2 + R_1^2(BS_1) + R_1C + D = 0$$



Фиг. 5



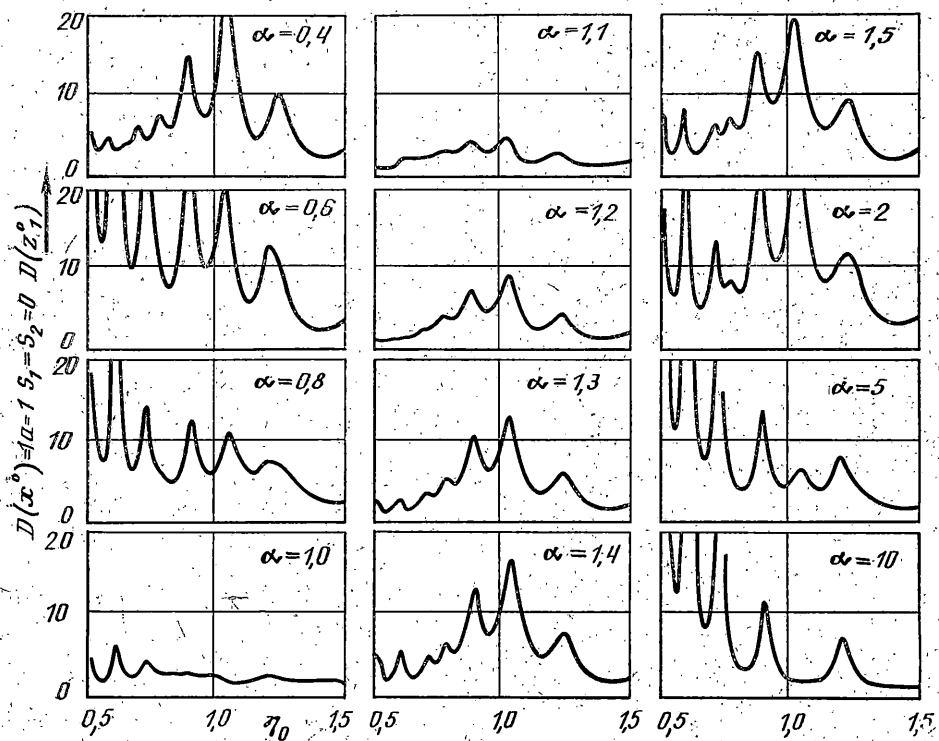
Фиг. 6

где A, B, C, D — коэффициенты, зависящие от параметров системы и частоты η . Из этого уравнения вытекает возможность существования одного или трех действительных решений. Как показано в [4], в таких случаях очень выгодно использовать метод бифуркационной точки для определения границ многозначного решения

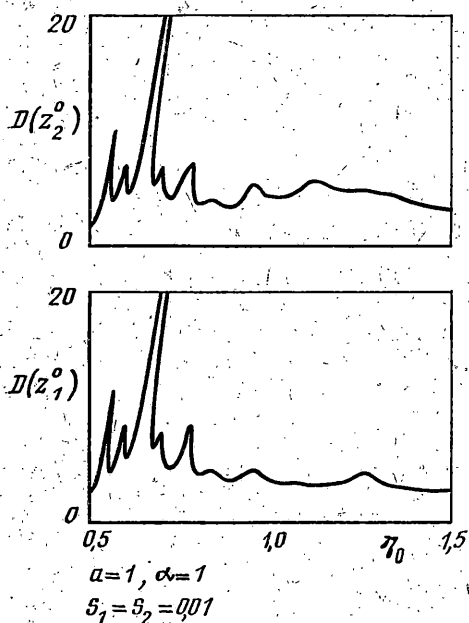
$$S_{1,II} = (27A^2D)^{-1} [B(9AC - 2B^2) \pm 2(B^2 - 3AC)]^{1/2}$$

При рассмотрении случайного возбуждения модели будем полагать, что входной сигнал есть гауссовский нормальный случайный процесс со спектральной плотностью типа узкополосного шума (a — коэффициент демпфирования):

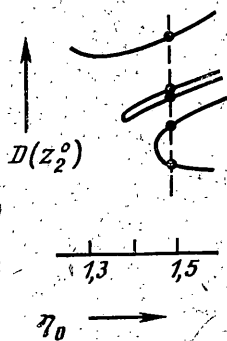
$$S_{xx}(\eta) = D(x^o) \{ W[W^2 + (\eta_0 - \eta)^2]^{-1} + W[W^2 + (\eta_0 + \eta)^2]^{-1} \}, W = a\eta_0/2\pi$$



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Если модель линейная, то результаты вычислений фиг. 5 возможно сравнивать с фиг. 3. Например, зависимость дисперсии $D(z_2^0)$ от параметров α, β имеет те же свойства, что и для гармонически возбужденной системы (модуляции дисперсионно-частотной зависимости). Номограмма внизу фиг. 5 связывает параметры α, β со средней частотой η_0 узкополосного возбуждения.

В координатах дисперсии вынужденных случайных колебаний и средней частоты η_0 можно сравнивать поведение «начала» и «конца» модели

(по значению скорости α). На фиг. 6 показан пример, когда система движется с малой дисперсией для всех значений η_0 . Такое поведение обнаружено только в окрестности скорости $\alpha=1,1$, что вытекает также из фиг. 7, где показаны зависимости дисперсии $D(z_1^0)$ при постоянной скорости движения. Их можно сопоставить с зависимостями фиг. 5. Из приведенных зависимостей ясно, что модуляция вследствие фазы $\theta_0=M[\theta(\tau)]$ изменяет характер в зависимости от параметров модели и $\{\eta_0, \alpha\}$. Ясно также, что эти свойства зависят от коэффициента демпфирования a , который характеризует ширину полосы входного процесса. Но в общем можно сказать, что ожидаемая дисперсия колебаний «конца» больше, чем «начала» и глубина модуляции «начала» выше чем «конца».

В случае нелинейной системы аналитическое решение затруднительно и его можно получить численными методами. Было получено численное итерационное решение, пример которого показан на фиг. 8. Его характеристики подобны характеристикам гармонически возбужденной системы и в случае, когда ширина полосы выходного процесса стремится к нулю, получаем точно те же характеристики. Существуют также области трех действительных решений вследствие наклона вершин, но поскольку модуляция сильнее чем для гармонического возбуждения, существует возможность, что для одной ожидаемой частоты система имеет $(2n+1)$ действительных решений, где n — число вершин с наклоном, как это показано на фиг. 9. В таких случаях очень резко повышается сложность численного решения и понижается скорость сходимости итераций.

Из приведенных результатов ясно, что поведение системы модели подвижного экипажа зависит прежде всего от корреляции или взаимного запаздывания входных процессов. Выявлены некоторые свойства транспортных средств, зависящие от модуляции амплитудных зависимостей, а также эффект возникновения нежелательных вибраций конца симметричных экипажей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bendat J. S. Solutions for the multiple input/output problem // J. Sound and Vibration. 1976. V. 44. No. 3. P. 311–325.
2. Казаков И. Е. Статистические методы проектирования систем управления. М.: Машиностроение, 1969. 261 с.
3. Püst L. Použití druhotné ekvivalentní tuhosti a druhotného ekvivalentního koeficientu pružnosti při výpočtu stability nelineárních soustav // Strojnický čas. 1970. T. 21, No. 4. S. 361–370.
4. Dobiáš I., Rus L. Bifurcation of response of the two-mass system having two nonlinear stiffness of the cubic type // Acta techn. CSAV. 1980. T. 25. No. 1. S. 63–78.

Прага

Поступила в редакцию
6.01.1987