МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1990

УДК 531.8

А. В. БОРОВОЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МАНИПУЛЯТОРА С СИЛОВОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрена модель манипулятора с обратной связью по позиции, скорости рабочего органа и деформации датчика усилий. В модели учитывается масса рабочего органа, а также запаздывание в усилителе электропривода. Для программного движения с постоянной скоростью найдено стационарное решение. Проведено аналитическое исследование устойчивости данного стационарного решения в области параметров обратной связи и коэффициента упругости датчика усилий.

1. Постановка задачи. Исследованию манипуляторов с силовой обратной связью посвящено множество работ. Так, например, в [1] проведено исследование линейного и релейно-линейного законов управления, которые обеспечивают выход манипулятора на контакт с предметом и поддержание этого контакта. В [2] исследована устойчивость процессов поддержания контакта и движения манипулятора с силовой обратной связью. При этом учитывалась упругая податливость конструкции манипулятора, вызванная люфтом в редукторе, а также в основании.

В настоящей работе, в отличие от [1], рассматривается модель манипулятора с учетом массы рабочего органа. Кроме того, в отличие от [1—2], данная модель учитывает запаздывание в усилителе электропривода, а обратная связь в ней организована по позиции, скорости рабочего органа и деформации датчика усилий. Закон управления берется линейным.

Схема манипулятора показана на фиг. 1. Здесь штанга *1* перемещается как твердое тело поступательно вдоль оси x неподвижной системы координат Ox. Рабочий орган *2* крепится к штанге при помощи упругого датчика усилий *3*. Штанга приводится в движение электродвигателем постоянного тока *4*, соединенным с ней посредством идеального редуктора *5* с выходной шестерней *6*. Соответствующие уравнения движения записываются в виде

$$Mx^{\cdot\cdot}=-\theta x^{\cdot}+\nu\varepsilon+F,\ J\varphi^{\cdot\cdot}=-c_2\varphi^{\cdot}+c_1u-\rho F \qquad (1.1)$$
$$m(x^{\cdot\cdot}+\varepsilon^{\cdot\cdot})=-\nu\varepsilon,\ x=r\varphi/Z=\rho\varphi$$

где M — масса штанги, x — координата фиксированной точки штанги в системе Ox, θ — коэффициент вязкого трения, ν — коэффициент упругости датчика усилий, ε — деформация датчика усилий, F — сила, действующая на штангу со стороны выходной шестерни редуктора, J — момент инерции вала электродвигателя относительно его оси, φ — угол поворота вала электродвигателя, c_1, c_2 — постоянные величины, зависящие от конструкции электродвигателя [5], u — напряжение на обмотке электродвигателя, m — масса рабочего органа, r — радиус выходной шестерни редуктора, Z — передаточное число редуктора, ρ — величина обратно пропорциональная коэффициенту редукции.

Текущая информация о положении, скорости штанги и деформации датчика усилий снимается при помощи датчика угла поворота, тахогенератора и тензодатчиков соответственно. Эти данные поступают на суммирующее устройство, где происходит их сравнение с программными значениями x_*, $x_*^{\cdot}$, ε_*, сформированными системой управления. Полученные рассогласования через усилитель подаются на обмотку электродвигателя. Соответствующие уравнения будут следующими

$$\tau u^{\cdot}=-u-kv \qquad (1.2)$$
$$v=\varkappa_1[(x-x_*)-\varkappa_3(\varepsilon-\varepsilon_*)]+\varkappa_2(x^{\cdot}-x_*^{\cdot})$$

где τ — постоянная времени усилителя, k — коэффициент усиления усилителя, v — напряжение на входе усилителя, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ — коэффициенты обратной связи по позиции, скорости штанги и деформации датчика усилий.

Для того, чтобы данная система обладала искусственной податливостью, должны быть выполнены условия

$$\varkappa_1\neq 0,\ \varkappa_3>0 \qquad (1.3)$$

Рассмотрим программное движение $x_*^{\cdot}=\text{const}$, $\varepsilon_*=\text{const}$. Тогда система (1.1), (1.2) будет обладать следующим стационарным решением

$$x^{\cdot}=x_*^{\cdot},\ \varepsilon=0,\ u=(c_2+\rho^2\theta)x_*^{\cdot}/(\rho c_1)$$

Будем исследовать устойчивость полученного стационарного решения в пространстве коэффициентов $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ при изменении ν в пределах от 0 до $+\infty$. Такой подход позволяет воспользоваться методами, изложенными в [3]. Введем обозначения

$$J_1=J+\rho^2(M+m),\ J_2=J+\rho^2 M,\ \sigma=c_2+\rho^2\theta \qquad (1.4)$$

и перейдем от коэффициентов $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ к параметрам γ_1, γ_2, γ_3 по формулам

$$\gamma_1=\sigma/(\rho c_1)+k\varkappa_2,\ \gamma_2=k\varkappa_1(1+\varkappa_3),\ \gamma_3=\varkappa_3 \qquad (1.5)$$

Тогда из (1.3) – (1.5) следует

$$J_1>J_2,\ \gamma_2\neq 0,\ \gamma_3>0 \qquad (1.6)$$

Далее рассмотрим систему (1.1), (1.2) в отклонениях от полученного стационарного решения. Характеристическое уравнение для этой системы после ряда элементарных преобразований можно записать в виде

$$\Phi_5(\lambda)+K\Psi_3(\lambda)=0 \qquad (1.7)$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{gathered}\Phi_5(\lambda)=\lambda^5+a_1\lambda^4+a_2\lambda^3+a_3\lambda^2\\ \Psi_3(\lambda)=\lambda^3+b_1\lambda^2+b_2\lambda+b_3\\ \beta=\rho c_1,\ K=\nu J_1/(mJ_2)\\ a_1=\sigma/J_2+1/\tau,\ a_2=\beta\gamma_1/(J_2\tau),\ a_3=\beta\gamma_2/(J_2\tau)\\ b_1=\sigma/J_1+1/\tau,\ b_2=\beta\gamma_1/(J_1\tau),\ b_3=\beta\gamma_2/(J_1\tau(1+\gamma_3))\end{gathered} \qquad (1.8)$$

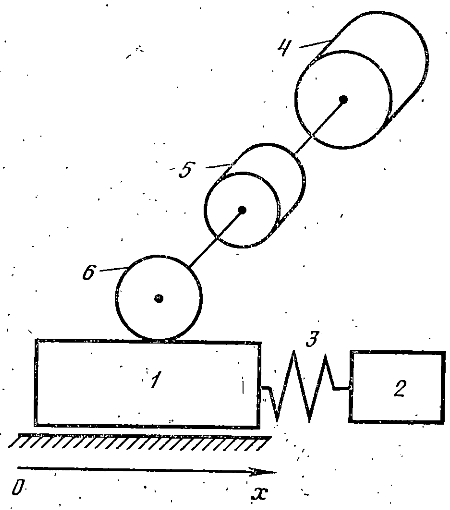
Теперь форма записи (1.7) приведена в соответствие с [3]. Задача сводится к исследованию устойчивости (1.7) в зависимости от γ_1, γ_2, γ_3 при изменении K от 0 до $+\infty$. Для этого необходимо провести ряд подготовительных действий.

2. Начальные и предельные точки. Изучим расположение корней (1.7) относительно мнимой оси в зависимости от γ_1, γ_2, γ_3 при $K=0$ и при $K=+\infty$. В первом случае соответствующие корни (1.7) называются начальными точками уравнения (1.7), во втором — предельными точками.

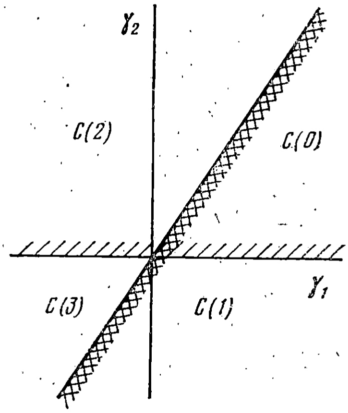
Исключив из числа начальных точек (1.7) корень второй кратности $\lambda=0$, получим уравнение

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0 \qquad (2.1)$$

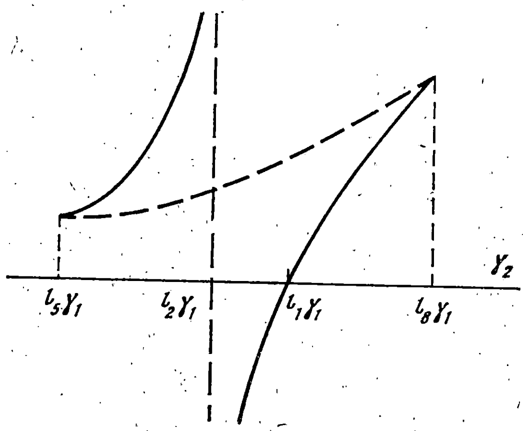
Построим для (2.1) диаграмму Вышнеградского [4] на плоскости параметров (γ_1, γ_2). С этой целью положим $\lambda=i\omega$ и приравняем нулю действительную и мнимую части (2.1). В результате, учитывая (1.8), получим, что уравнение $\gamma_2=l_1\gamma_1$, $l_1=\sigma/J_2+1/\tau$ определяет на плоскости (γ_1, γ_2) прямую, точки которой соответствуют чисто мнимым корням (2.1),



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

а уравнение $\gamma_2=0$ определяет прямую, точки которой соответствуют нулевому корню (2.1).

Диаграмма приведена на фиг. 2. Здесь $C(j)$ — область на плоскости (γ_1, γ_2), которой соответствует ровно j корней (2.1) с положительной действительной частью. Штриховкой выделена сторона границы области, при переходе на которую соответствующее число корней с положительной действительной частью уменьшается на единицу.

Аналогично строится диаграмма для предельных точек (1.7). В этом случае выражения для соответствующих границ на плоскости (γ_1, γ_2) запишутся в виде $\gamma_2=l_2\gamma_1$, $l_2=(1+\gamma_3)(\sigma/J_1+1/\tau)$ и $\gamma_2=0$.

Исследуем теперь поведение кратной нулевой начальной точки (1.7) при возрастании K из нуля. Так как по условию (1.6) $\gamma_2\neq 0$, нулевая начальная точка имеет ровно вторую кратность. В этом случае, как показано в [3], при возрастании K из нуля выйдут два корня, которые начнут расходиться в разные стороны вдоль прямой, повернутой относительно мнимой оси на угол $\psi={}^1/_2(n_1-n_2)\pi$, где n_1, n_2 — соответственно количества действительных начальных и действительных предельных точек (1.7) правее мнимой оси. Но, как следует из анализа диаграмм Вышнеградского для начальных и предельных точек, при $\gamma_2<0$ правее мнимой оси может находиться только нечетное число начальных и нечетное число предельных точек, а при $\gamma_2>0$ — только четное число. Следовательно, при повороте на угол ψ мнимая ось всегда переходит сама в себя, и корни начнут расходиться из нуля вдоль мнимой оси.

3. Переход корней через мнимую ось. Определим условия перехода корней (1.7) через мнимую ось. Для этого положим $\lambda=i\omega$ и приравняем действительную и мнимую части (1.7) нулю. В результате будем иметь

$$-a_3\omega^2+a_1\omega^4+K(b_3-b_1\omega^2)=0 \tag{3.1}$$
$$-a_2\omega^3+\omega^5+K(b_2\omega-\omega^3)=0$$

Если $\omega=0$ удовлетворяет (3.1), то должно быть также выполнено $Kb_3=0$. Но $b_3\neq0$, так как $\gamma_2\neq0$. Следовательно, $\omega=0$ удовлетворяет (3.1) только при $K=0$.

Исключив K из (3.1) при условии $\omega\neq0$, получим

$$A\omega^4-B\omega^2+C=0 \tag{3.2}$$
$$A=a_1-b_1,\ B=a_3+a_1b_2-a_2b_1-b_3,\ C=a_3b_2-a_2b_3$$

Таким образом, если (3.2) имеет действительный положительный корень $\omega\neq0$, то соответствующие корни (1.7) будут $\lambda=\pm i\omega$. Введем обозначения для корней (3.2):

$$z_-=(B-\sqrt{D})/2A,\ z_+=(B+\sqrt{D})/2A$$
$$D=B^2-4AC$$

Определим теперь на плоскости $(\gamma_1,\ \gamma_2)$ область, в которой $B\leqslant0$. Из (3.2), (1.8) получим

$$\gamma_2\leqslant l_3\gamma_1,\ \ l_3=(1+\gamma_3)(J_1-J_2)/(J_1-J_2+J_1\gamma_3)\tau \tag{3.3}$$

Рассмотрим, далее, на плоскости $(\gamma_1,\ \gamma_2)$ геометрическое место точек, для которых выполнено $D=B^2-4AC\leqslant0$. Учитывая (1.8), получим

$$l_4\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant l_5\gamma_1 \tag{3.4}$$
$$l_{4,\,5}=(1+\gamma_3)(J_1-J_2)\,[(J_1-J_2+J_1\gamma_3)/\tau+2\sigma\gamma_3\mp2\sqrt{D_1}]\times$$
$$\times(J_1-J_2+J_1\gamma_3)^{-2},\ D_1=\sigma\gamma_3\,[\sigma\gamma_3+(J_1-J_2+J_1\gamma_3)/\tau]$$

Полученные соотношения (3.3), (3.4) будут использованы в дальнейшем при построении области устойчивости (1.7) на плоскости $(\gamma_1,\ \gamma_2)$. Кроме того, здесь также можно показать, что для всех $\gamma_3>0$ выполняется

$$0<l_4<l_3<l_5 \tag{3.5}$$

4. Направление перехода корней. Исследуем, в какую полуплоскость переходят чисто мнимые корни (1.7) при возрастании K. Пусть $\lambda=i\omega$, $\omega\neq0$ есть корень (1.7) при фиксированном K, а $\lambda+\Delta\lambda=\Delta\delta+i(\omega+\Delta\omega)$ есть корень (1.7) при $K+\Delta K$, где $\Delta K>0$ достаточно мало. Подставив значения $\lambda+\Delta\lambda$ и $K+\Delta K$ в уравнение (1.7) и приравняв в отдельности действительную и мнимую части нулю, получим систему уравнений в приращениях. Далее, учитывая, что ω и K удовлетворяют (3.1), после ряда преобразований можно разрешить полученную систему в приращениях относительно $\Delta\delta$:

$$\Delta\delta(\omega^2)=2(\omega^2)^2\Delta K(B-2A\omega^2)/\Delta_0 \tag{4.1}$$
$$\Delta_0=[-3a_2\omega^2+5\omega^4+K(b_2-3\omega^2)]^2+$$
$$+[-2a_3\omega+4a_1\omega^3+K(-2b_1\omega)]^2$$

где Δ_0 — определитель системы уравнений в приращениях. Естественно, что (4.1) имеет место только при $\Delta_0\neq0$.

После подстановки в (4.1) выражений для корней (3.2) будем иметь

$$\Delta\delta(z_-)=2z_-^2\Delta K\sqrt{D}/\Delta_0,\ \Delta\delta(z_+)=-2z_+^2\Delta K\sqrt{D}/\Delta_0 \tag{4.2}$$

Таким образом, при выполнении условий $\omega\neq0$, $\Delta_0\neq0$, $D\neq0$ корни (1.7) пересекают мнимую ось ровно два раза с изменением K. Причем пара корней, соответствующих z_-, переходит из левой полуплоскости в правую, а пара, соответствующая z_+,— из правой в левую.

5. Учет ограничений. Теперь следует отметить, что при исследовании перехода корней (1.7) через мнимую ось необходимо учитывать знак K в силу условий задачи. Для определения знака K воспользуемся вторым уравнением системы (3.1), рассмотрев предварительно ряд вспомогательных неравенств при условии $D>0$.

Пусть $a_2>z_+$, тогда $2Aa_2-B>0$ $(2Aa_2-B)^2>D$. Отсюда с учетом (3.2) будем иметь

$$\gamma_2<l_1\gamma_1,\ \gamma_2<l_6\gamma_1,\ l_6=(1+\gamma_3)(J_1-J_2)(2\sigma/J_2+1/\tau)/(J_1-J_2+J_1\gamma_3) \tag{5.1}$$

Аналогично для $b_2>z_+$ получаем

$$\gamma_2<l_2\gamma_1,\ \gamma_2<l_7\gamma_1,\ l_7=(1+\gamma_3)(J_1-J_2)(2\sigma/J_1+1/\tau)/(J_1-J_2+J_1\gamma_3) \tag{5.2}$$

Если $a_2<z_-$, то

$$\gamma_2<l_1\gamma_1,\ \gamma_2>l_6\gamma_1 \tag{5.3}$$

Если $b_2<z_-$, то

$$\gamma_2<l_2\gamma_1,\ \gamma_2>l_7\gamma_1 \tag{5.4}$$

Далее также потребуется определить, какой из двух переходов корней (1.7) через мнимую ось произойдет раньше (т. е. при меньшем значении K). Для этого рассматривается знак выражения

$$K_+-K_-=\sqrt{D}(\gamma_2-l_8\gamma_1)/A(\gamma_2-l_2\gamma_1) \tag{5.5}$$
$$l_8=(1+\gamma_3)(\sigma/J_2+1/\tau)$$

где K_+, K_- — значения K, соответствующие z_+, z_-.

6. Случай кратных корней. Рассмотрим возможность образования кратных корней (1.7) с нулевой действительной частью. Пусть $\lambda=i\omega$, $\omega\geqslant 0$ есть корень второй кратности уравнения (1.7), тогда условие равенства нулю производной от характеристического определителя системы запишется в виде

$$-3a_2\omega^2+5\omega^4+K(b_2-3\omega^2)=0 \tag{6.1}$$
$$-2a_3\omega+4a_1\omega^3+K(-2b_1\omega)=0$$

Таким образом, если $\lambda=i\omega$ есть корень второй кратности (1.7), то ω удовлетворяет одновременно системам (3.1) и (6.1). Но условие (6.1) равносильно условию $\Delta_0=0$, следовательно, формулы (4.1), (4.2) в случае кратных корней (1.7) теряют смысл.

Условиям (3.1), (6.1) удовлетворяет значение $\omega=0$ при $K=0$, что соответствует нулевой начальной точке (1.7). Определим, в какой полуплоскости окажется пара корней, вышедших из нуля при возрастании K. Для этого запишем верхний корень (1.7), вышедший из нуля, в виде $\lambda=\Delta\rho\ [\cos(\pi/2+\Delta\varphi)+i\sin(\pi/2+\Delta\varphi)]$. Здесь в силу непрерывности траекторий корней по K при $K\to 0$ будет выполнено $\Delta\rho\to 0$, $\Delta\varphi\to 0$, так как корни начинают расходиться вдоль мнимой оси (п. 2). Данное значение λ подставим в (1.7) и приравняем нулю действительную и мнимую части. В результате с учетом членов до третьего порядка малости будем иметь

$$(a_3b_2-a_2b_3)\Delta\rho^3-2a_3b_3\Delta\rho^2\Delta\varphi=0,$$

откуда при условии $\gamma_1\neq 0$ получаем

$$\Delta\varphi=\Delta\rho\gamma_1\gamma_3/(2\gamma_2) \tag{6.2}$$

Если же $\gamma_1=0$, то аналогичным образом получаем

$$\Delta\varphi=-\Delta\rho^3\tau(J_1-J_2+J_1\gamma_3)/(2\beta\gamma_2) \tag{6.3}$$

Пусть теперь $\lambda=i\omega$, $\omega>0$ есть корень второй кратности уравнения (1.7). Запишем это условие в виде

$$(\lambda-\delta)(\lambda+i\omega)^2(\lambda-i\omega)^2=0 \tag{6.4}$$

где δ — действительный корень (1.7).

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ в (1.7) и (6.4). В результате получим

$$a_2-2\omega^2+K=0,\ a_3-2a_1\omega^2+Kb_1=0 \tag{6.5}$$

$$-\omega^4+Kb_2=0,\ -a_1\omega^4+Kb_3=0 \tag{6.6}$$

Исключив K из (6.5) будем иметь

$$\omega^2=(a_3-a_2b_1)/2(a_1-b_1) \tag{6.7}$$

После исключения K из (6.6) получим

$$b_3=a_1b_2 \tag{6.8}$$

Если теперь выписать выражение для кратного корня (3.2):

$$z_-=z_+=B/2A=(a_3+a_1b_2-a_2b_1-b_3)/2(a_1-b_1)$$

то из (6.7), (6.8) следует, что кратный корень (1.7) соответствует кратному корню (3.2). Кратный же корень (3.2) соответствует кратному корню (1.7) только при условии (6.8).

7. Соотношения между угловыми коэффициентами. Для построения области устойчивости (1.7) на плоскости (γ_1, γ_2) необходимо определить соотношения между угловыми коэффициентами l_i граничных прямых в зависимости от γ_3.

Условие $l_2 \geqslant l_5$ после умножения на $J_1\sigma$ и выделения D_1 запишется в виде

$$[J_1\sqrt{D_1}-(J_1-J_2)\sigma]^2 \geqslant 0 \tag{7.1}$$

Неравенство (7.1) обращается в равенство при

$$\gamma_3=L_0=-(1-J_2/J_1),\ \gamma_3=L_1=(1-J_2/J_1)/(1+J_1/(\sigma\tau)) \tag{7.2}$$

Причем здесь в силу (1.6) будет выполнено $L_0<0<L_1$. Следовательно, $l_2>l_5$ при $\gamma_3 \in (0, L_1) \cup (L_1, +\infty)$, $l_2=l_5$ при $\gamma_3=L_1$.

Условие $l_5 \geqslant l_7$ после выделения D_1 запишется в виде

$$J_1\sqrt{D_1}-(J_1-J_2)\sigma \geqslant 0,$$

откуда с учетом (7.1), (7.2) получаем, что $l_5<l_7$ при $\gamma_3 \in (0, L_1)$, $l_5=l_7$ при $\gamma_3=L_1$, $l_5>l_7$ при $\gamma_3 \in (L_1, +\infty)$.

Исследование условия $l_7 \geqslant l_2$ показывает, что $l_7>l_2$ при $\gamma_3 \in (0, L_1)$, $l_7=l_2$ при $\gamma_3=L_1$, $l_7<l_2$ при $\gamma_3 \in (L_1, +\infty)$.

Для l_1 и l_2 получаем, что $l_1>l_2$ при $\gamma_3 \in (0, L_2)$, $l_1=l_2$ при $\gamma_3=L_2$, $l_1<l_2$ при $\gamma_3 \in (L_2, +\infty)$, где $L_2=(1-J_2/J_1)/(1+J_2/(\sigma\tau))$.

Аналогичным образом получаются остальные соотношения. Условие $l_1 \geqslant l_5$ после умножения на $J_2\sigma$ и выделения D_1 запишется в виде

$$[J_2\sqrt{D_1}-(1+\gamma_3)(J_1-J_2)\sigma]^2 \geqslant 0 \tag{7.3}$$

Неравенство (7.3) обращается в равенство при

$$\begin{gathered}\gamma_3=L_0,\ \gamma_3=L_3=(1-J_2/J_1)J_1\sigma/(J_2^2T)\\ T=1/\tau+(2-J_1/J_2)\sigma/J_2\end{gathered} \tag{7.4}$$

Если $T>0$, будет выполнено $l_1>l_5$ при $\gamma_3 \in (0, L_3) \cup (L_3, +\infty)$, $l_1=l_5$ при $\gamma_3=L_3$.

Если $T \leqslant 0$, то $l_1>l_5$ при $\gamma_3 \in (0, +\infty)$.

Неравенство $l_5 \geqslant l_6$ после выделения D_1 запишется в виде

$$J_2\sqrt{D_1}-(1+\gamma_3)(J_1-J_2)\sigma \geqslant 0$$

откуда с учетом (7.3), (7.4) для $T>0$ получаем, что $l_5<l_6$ при $\gamma_3 \in (0, L_3)$, $l_5=l_6$ при $\gamma_3=L_3$, $l_5>l_6$ при $\gamma_3 \in (L_3, +\infty)$. Если же $T \leqslant 0$, то $l_5<l_6$ при $\gamma_3 \in (0, +\infty)$.

Для l_1, l_6 в случае $T>0$ получаем, что $l_1<l_3$ при $\gamma_3 \in (0, L_3)$, $l_1=l_6$ при $\gamma_3=L_3$, $l_1>l_6$ при $\gamma_3 \in (L_3, +\infty)$. Если $T \leqslant 0$, то $l_1<l_6$ при $\gamma_3 \in (0, +\infty)$.

Далее можно показать, что при $T>0$ всегда будет выполнено

$$0<L_1<L_2<L_3 \tag{7.5}$$

8. Начало исследования устойчивости. Построим область устойчивости корней (1.7) на плоскости (γ_1, γ_2). Для этого сначала покажем, что при $\gamma_1 \leqslant 0$ или при $\gamma_2<0$ уравнение (1.7) будет неустойчиво для всех $K>0$.

Так как при $K\neq0$ нулевых корней (1.7) не существует (п. 3), действительные корни (1.7) в этом случае пересекать мнимую ось не могут. Следовательно, если $\gamma_2<0$, то для всех значений $K\neq0$ правее мнимой оси будет оставаться по крайней мере один действительный корень (1.7), как это видно из диаграммы Вышнегородского для начальных точек (п. 2).

При $\gamma_2>0$, $\gamma_1\leqslant0$ для достаточно малого $K>0$ в правой полуплоскости будет лежать пара корней (1.7), вышедших из нулевой начальной точки, как это видно из (6.2), (6.3). Кроме того, в этом случае правее мнимой оси будет лежать пара начальных точек (1.7) (п. 2). Но так как в левую полуплоскость при изменении K может перейти только одна пара корней (1.7) (п. 4), то для всех $K>0$ правее мнимой оси будет находиться по крайней мере одна пара корней (1.7).

Теперь еще остается проверить возможность образования кратных чисто мнимых корней (1.7) при $K>0$, поскольку в этом случае выводы п. 4 теряют смысл. Как было показано в п. 6, необходимыми условиями наличия кратного чисто мнимого корня (1.7) являются $\gamma_2=l_4\gamma_1$ или $\gamma_2=l_5\gamma_1$, а также условие (6.8). Последнее с учетом (5.5) можно записать в виде $\gamma_2=l_8\gamma_1$. Отсюда получаем, что для образования кратного чисто мнимого корня (1.7) должно быть выполнено $l_4=l_8$ или $l_5=l_8$. Но в п. 7 было показано, что $l_2\geqslant l_5$ при $\gamma_3>0$, а из (3.5), (5.5) следует, что $l_5>l_4$, $l_8>l_2$ при $\gamma_3>0$. Значит $l_8>l_5>l_4$ при $\gamma_3>0$, и образование кратных чисто мнимых корней (1.7) здесь невозможно.

9. Завершение исследования устойчивости. Исследуем устойчивость (1.7) при $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$. В этом случае пара корней (1.7), вышедших из нуля, для достаточно малого $K>0$ будет находиться левее мнимой оси, как это следует из (6.2). Правее мнимой оси при $K=0$ может оказаться только пара начальных точек (1.7).

Рассмотрим область $\gamma_2>l_8\gamma_1$. Поскольку $l_8>l_1$ для всех $\gamma_3>0$, пара начальных точек (1.7) будет лежать правее мнимой оси. Но при этом будет выполнено $K_+>K_-$, как это видно из (5.5). Следовательно, переход корней (1.7) в правую полуплоскость произойдет раньше, чем переход в левую (п. 4).

В случае $\gamma_2=l_8\gamma_1$ будет выполнено $K_+=K_-$, причем кратных корней (1.7) образоваться не может (п. 8). Значит корни (1.7), соответствующие z_+ и z_-, окажутся на мнимой оси одновременно (то есть при одном и том же значении K).

Таким образом, при $\gamma_2\geqslant l_8\gamma_1$ уравнение (1.7) будет неустойчиво для всех $K>0$.

Если $0<\gamma_2<l_5\gamma_1$, то, в силу условия $l_1\geqslant l_5$ (п. 7) для достаточно малого $K>0$ все корни (1.7) будут находиться левее мнимой оси. Возможность перехода корней (1.7) в правую полуплоскость определяется наличием действительных положительных корней уравнения (3.2). Но при $l_4\gamma_1<$ $<\gamma_2<l_5\gamma_1$ действительных корней (3.2) не существует вообще, так как здесь $D<0$ (п. 3). Что касается области $0<\gamma_2<l_4\gamma_1$, то в силу (3.3), (3.5) коэффициенты уравнения (3.2) здесь будут удовлетворять условиям $A>0$, $B<0$, $C>0$. В этом случае действительные корни (3.2) будут отрицательными. Следовательно, в области $0<\gamma_2<l_5\gamma_1$ уравнение (1.7) будет устойчиво для всех $K>0$.

В случае $\gamma_2=l_5\gamma_1$ уравнение (3.2) будет иметь корень второй кратности, который не соответствует кратному корню (1.7) (п. 8). Значит, как это следует из (4.2), здесь произойдет касание корнями мнимой оси без перехода в правую полуплоскость.

Остается исследовать устойчивость (1.7) в области $l_5\gamma_1<\gamma_2<l_8\gamma_1$. Здесь используются соотношения, полученные в п. 7.

Пусть $0<\gamma_3<L_1$, тогда будут выполнены неравенства

$$l_6>l_1>l_2>l_5,\ l_7>l_2 \tag{9.1}$$

С учетом (9.1) условия (5.1), (5.2) запишутся соответственно в виде $\gamma_2<l_1\gamma_1$, $\gamma_2<l_2\gamma_1$. Отсюда можно при помощи второго уравнения системы (3.1) определить качественный характер зависимости K_+ от γ_2. Условия

(5.3), (5.4) в случае (9.1) выполнены не будут, следовательно здесь $K_->0$ (фиг. 3; K_+ — сплошная линия, K_- — штриховая).

Рассмотрим теперь устойчивость уравнения (1.7) при изменении γ_2, пользуясь фиг. 3.

При $l_5\gamma_1<\gamma_2<l_2\gamma_1$ для достаточно малого $K>0$ все корни (1.7) лежат в левой полуплоскости. Потом для $K=K_-$ происходит переход пары корней в правую полуплоскость, а для $K=K_+$ данные корни возвращаются в левую полуплоскость. Соответственно для $K\in(0, K_-)\cup(K_+, +\infty)$ уравнение (1.7) будет устойчиво.

При $\gamma_2=l_2\gamma_1$ для достаточно малого $K>0$ все корни (1.7) лежат в левой полуплоскости. Далее для $K=K_-$ происходит переход пары корней в правую полуплоскость. Для $K=K_+=+\infty$ данные корни касаются мнимой оси с правой стороны. Уравнение (1.7) будет устойчиво для $K\in(0, K_-)$.

При $l_2\gamma_1<\gamma_2<l_1\gamma_1$ для достаточно малого $K>0$ все корни (1.7) лежат в левой полуплоскости. Потом для $K=K_-$ происходит переход пары корней в правую полуплоскость без возвращения, поскольку здесь $K_+<0$. Соответствующая область устойчивости будет $K\in(0, K_-)$.

Все оставшиеся случаи для различных значений γ_3 рассматриваются аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурфинкель В. С., Девянин Е. А., Ленский А. В. и др.* Силовая обратная связь в системе управления манипулятором // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 56–64.
2. *Гориневский Д. М., Формальский А. М.* Об устойчивости движений упругого манипулятора с обратной связью по силе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 49–56.
3. *Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф.* Траектории корней линейных автоматических систем. М.: Наука, 1964. 159 с.
4. *Булгаков Б. В.* Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 892 с.
5. *Чиликин М. Г., Сандлер А. С.* Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат, 1981. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.04.1986