

УДК 531.55 : 521.4

© 1990 г.

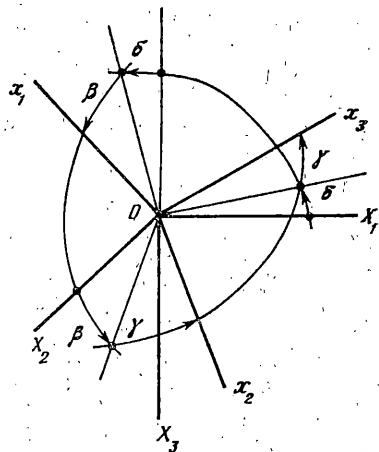
В. И. ВЕТЛОВ, В. В. САЗОНОВ, В. А. САРЫЧЕВ

## ВЛИЯНИЕ ДЕМПФИРОВАНИЯ НА РЕЖИМ ГРАВИТАЦИОННОЙ ОРИЕНТАЦИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СПУТНИКА

Рассматривается спутник в виде твердого тела, на котором установлен демпфер с конечным числом степеней свободы. Орбита спутника считается круговой, уравнения его вращательного движения содержат малый параметр  $\varepsilon$ , характеризующий приложенный к спутнику негравитационный внешний момент, влияние демпфера и отклонение твердого тела от динамически симметричного. В виде рядов по степеням  $\varepsilon$  построена двухпараметрическая интегральная поверхность уравнений движения, описывающая квазистационарные вращения спутника, совпадающие при  $\varepsilon=0$  с конической прецессией симметричного твердого тела в гравитационном поле. Движения, близкие таким квазистационарным вращениям, использовались для реализации режима одноосной гравитационной ориентации орбитальных комплексов «Салют-6» и «Салют-7». Изучено влияние типа демпфера на торможение квазистационарных вращений. В результате обработки данных бортовых измерений угловой скорости орбитального комплекса «Салют-7» получены оценки постоянной времени торможения его вращения.

**1. Уравнения движения.** Рассмотрим спутник, представляющий собой твердое несущее тело, на котором установлен демпфер с конечным числом степеней свободы. Центр масс спутника движется по круговой орбите около Земли. Для записи уравнений вращательного движения спутника введем две правые декартовы системы координат: систему  $Ox_1x_2x_3$  с началом в центре масс спутника, направление осей которой неизменно относительно главных центральных осей инерции несущего тела, и орбитальную систему  $Ox_1X_2X_3$ . Ось  $Ox_3$  направлена вдоль геоцентрического радиуса-вектора точки  $O$ , ось  $Ox_1$  — по касательной к орбите в сторону движения спутника. Положение системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $Ox_1X_2X_3$  зададим с помощью углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  (фиг. 1). Элементы матрицы перехода  $\|a_{ij}\|_{i,j=1,2,3}^3$ , где  $a_{ij}$  — косинус угла между осями  $Ox_i$  и  $Ox_j$ , выражаются через эти углы следующим образом

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & a_{21} &= \sin \beta \\ a_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma \\ a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma \\ a_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma \\ a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma \\ a_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, & a_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \\ & & & + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma \\ a_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma \end{aligned}$$



Фиг. 1

Углы  $\delta$  и  $\beta$  задают положение оси  $Ox_1$  в орбитальной системе координат, угол  $\gamma$  задает поворот спутника вокруг этой оси. При  $\delta=\beta=0$  ось  $Ox_1$  направлена в центр Земли. Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек указываются в системе  $Ox_1x_2x_3$ .

Уравнения движения спутника относительно центра масс запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) \\ \dot{\delta} &= (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) / \cos \beta - \omega_0 \\ \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma\end{aligned}\quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial U}{\partial a_{i2}} a_{i3} - \frac{\partial U}{\partial a_{i3}} a_{i2} \right) + M_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial U}{\partial a_{i3}} a_{i1} - \frac{\partial U}{\partial a_{i1}} a_{i3} \right) + M_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial U}{\partial a_{i1}} a_{i2} - \frac{\partial U}{\partial a_{i2}} a_{i1} \right) + M_3$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, n)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  — абсолютная угловая скорость несущего тела,  $\omega_0$  — угловая скорость орбитального движения;  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  — обобщенные координаты демпфера;  $T = T(\omega, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  — кинетическая энергия движения спутника вокруг центра масс;  $U = U(a_{11}, \dots, a_{33}, \mathbf{q}, t)$  — силовая функция спутника;  $\Phi = \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  — диссипативная функция демпфера, представляющая собой отрицательно определенную квадратичную форму обобщенных скоростей  $\dot{\mathbf{q}}$ ;  $(M_1, M_2, M_3)$  — непотенциальный внешний момент, действующий на спутник. Первые три уравнения системы (1.1) суть кинематические уравнения Эйлера для углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ ; вторые ее три уравнения — уравнения Эйлера — Лагранжа, выражающие закон изменения кинетического момента спутника относительно точки  $O$ ; последние  $n$  уравнений — уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение демпфера.

Будем считать, что функции  $T$ ,  $U$ ,  $\Phi$  и  $M_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) в (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} [A\omega_1^2 + (C + \varepsilon B)\omega_2^2 + C\omega_3^2] + \varepsilon T_1(\omega, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ U &= -\frac{3}{2} \omega_0^2 [Aa_{31}^2 + (C + \varepsilon B)a_{32}^2 + Ca_{33}^2] + \varepsilon U_1(a_{11}, \dots, a_{33}, \mathbf{q}, u) \\ \Phi &= \varepsilon \Phi_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad M_i = \varepsilon m_i(a_{11}, \dots, a_{33}, \omega, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, u) \quad (i=1, 2, 3)\end{aligned}\quad (1.2)$$

где  $\varepsilon$  — безразмерный малый положительный параметр,  $u = \omega_0$ , функции  $U_1$  и  $m_i$  периодически зависят от  $u$  с периодом  $2\pi$ . Иными словами, спутник близок к динамически симметричному твердому телу с осевым моментом инерции  $A$  и экваториальным  $C$ , демпфер слабо влияет на движение спутника, внешние моменты, за исключением гравитационного, малы. Зависимость функций  $U_1$  и  $m_i$  от  $u$  означает зависимость возмущающего внешнего момента от положения спутника на орбите.

**2. Режим гравитационной ориентации.** Введя обозначение  $\lambda = A/C$ , уравнения (1.1) при  $\varepsilon = 0$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) \\ \dot{\delta} &= (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) / \cos \beta - \omega_0 \\ \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \quad \omega_1 = 0 \\ \omega_2 \cdot (1 - \lambda) \omega_1 \omega_3 &= -3\omega_0^2 (1 - \lambda) a_{31} a_{33} \\ \omega_3 \cdot (1 - \lambda) \omega_1 \omega_2 &= 3\omega_0^2 (1 - \lambda) a_{31} a_{32}\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q_j} - \frac{\partial T_1}{\partial q_j} = \frac{\partial U_1}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, n)\quad (2.2)$$

Первые шесть уравнений выписанной системы (уравнения (2.1)) не содержат  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  и могут быть проинтегрированы независимо от остальных

ее уравнений. Указанные шесть уравнений допускают двухпараметрическое семейство частных решений

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \Omega t + \gamma_0, \quad \delta = 0, \quad \beta = \arcsin \frac{\lambda \Omega}{\omega_0(4-3\lambda)} \\ \omega_1 &= \Omega, \quad \omega_2 = \omega_0 \cos \beta \cos \gamma, \quad \omega_3 = -\omega_0 \cos \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\Omega$  и  $\gamma_0$  — произвольные постоянные,  $|\lambda \Omega| < \omega_0 |4-3\lambda|$ . Это семейство называется конической прецессией и описывает стационарные вращения спутника вокруг оси  $Ox_1$ , неподвижной в орбитальной системе координат. При  $0 < \lambda < 1$  решения (2.3) устойчивы по переменным  $\omega_1, \delta, \beta, \omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma$  и  $\omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma$  [1].

Подставив формулы (2.3) в уравнения (2.2), получим замкнутую систему относительно  $\mathbf{q}$ . Будем считать, что эта система допускает экспоненциально асимптотически устойчивое решение

$$\mathbf{q} = \Phi_0(\gamma, \Omega, u) \quad (2.4)$$

где  $\Phi_0(\gamma, \Omega, u)$  —  $2\pi$ -периодическая функция  $\gamma$  и  $u$ .

Режимом одноосной гравитационной ориентации спутника будем называть такое его движение, в котором угол между осями  $Ox_1$  и  $(-OX_3)$  не превышает нескольких градусов. Если  $\lambda \ll 1$  и  $\varepsilon \ll 1$ , то для реализации этого режима можно использовать движения, близкие конической прецессии (2.3). Такой частный случай режима одноосной гравитационной ориентации называется режимом гравитационной ориентации вращающегося спутника [2-4]. Невозможными движениями спутника в ориентированном состоянии будем считать его квазистационарные вращения, описываемые двухпараметрической интегральной поверхностью системы (1.1), совпадающей при  $\varepsilon = 0$  с семейством решений (2.3), (2.4). Эту поверхность и уравнения движения на ней построим методом [5] в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \psi + \sum \varepsilon^k \gamma_k(\psi, \Omega, u), \quad \delta = \sum \varepsilon^k \delta_k(\psi, \Omega, u) \\ \beta &= \beta_0(\Omega) + \sum \varepsilon^k \beta_k(\psi, \Omega, u), \quad \omega_1 = \Omega + \sum \varepsilon^k \omega_{1,k}(\psi, \Omega, u) \\ \omega_2 &= \omega_0 \cos \beta_0(\Omega) \cos \psi + \sum \varepsilon^k \omega_{2,k}(\psi, \Omega, u) \\ \omega_3 &= -\omega_0 \cos \beta_0(\Omega) \sin \psi + \sum \varepsilon^k \omega_{3,k}(\psi, \Omega, u) \\ \mathbf{q} &= \Phi_0(\psi, \Omega, u) + \sum \varepsilon^k \Phi_k(\psi, \Omega, u) \\ \psi &= P_0(\Omega) + \sum \varepsilon^k P_k(\Omega), \quad \Omega = \sum \varepsilon^k Q_k(\Omega) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь суммирование производится по  $k$  от 1 до  $\infty$ , функции  $\gamma_k, \delta_k, \beta_k, \omega_{i,k}$  ( $i=1, 2, 3$ )  $2\pi$ -периодически зависят от  $\psi$  и  $u$ ,

$$\beta_0(\Omega) = \arcsin \frac{\lambda \Omega}{\omega_0(4-3\lambda)}, \quad P_0(\Omega) = \frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \Omega$$

Выписанные ряды будем рассматривать как формальные, т.е. не будем заботиться об их сходимости. Подставив ряды (2.5) в систему (1.1), (1.2) и приравняв выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в левой и правой частях получившихся равенств, придем к цепочке линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов этих рядов. Интегральная поверхность (2.5) системы (1.1), (1.2) при отсутствии переменных  $\mathbf{q}$  и некоторых конкретных функций  $m_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) изучалась в [2-4]. Результаты этих работ легко перенести на рассматриваемый случай. Несколько изменив построения [3], можно доказать, что при выполнении условий

$$\begin{aligned} (l\omega_0 + mP_0)^4 - d_1\omega_0^2(l\omega_0 + mP_0)^2 + d_2\omega_0^4 \neq 0, \quad l\omega_0 + mP_0 \neq 0 \\ d_1 = 7 - 6\lambda - 9\lambda(1-\lambda)\sin^2 \beta_0, \quad d_2 = 3(1-\lambda)(4-3\lambda)\cos^2 \beta_0 \\ (l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, |l| + |m| > 0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

цепочка уравнений, определяющих коэффициенты рядов (2.5), имеет единственное  $2\pi$ -периодическое по  $\psi$  и  $u$  решение, удовлетворяющее соотно-

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_k(\psi, \Omega, u) d\psi du = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_{1,k}(\psi, \Omega, u) d\psi du = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

Если функции  $U_1$  и  $m_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) в (1.2) не зависят от  $u$ , то  $\Phi_0$  в (2.4) также не зависит от  $u$  и коэффициенты рядов (2.5) следует искать не зависящими от этого аргумента. В таком случае при выполнении условий [2]:

$$(lP_0)^4 - d_1(lP_0\omega_0)^2 + d_2\omega_0^4 \neq 0, \quad P_0 \neq 0 \quad (l=0, 1, \dots) \quad (2.7)$$

цепочка уравнений, определяющих указанные коэффициенты, будет иметь единственное  $2\pi$ -периодическое по  $\psi$  решение, удовлетворяющее соотношениям

$$\int_0^{2\pi} \gamma_k(\psi, \Omega) d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \omega_{1,k}(\psi, \Omega) d\psi = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

Ниже условия (2.6) или, если функции  $U_1$  и  $m_i$  не зависят от  $u$ , условия (2.7) будем считать выполненными.

Эволюция квазистационарных вращений спутника описывается последним уравнением (2.5). В ряде случаев при анализе этой эволюции можно ограничиться исследованием укороченного уравнения

$$\Omega^* = \varepsilon Q_1(\Omega) \quad (2.8)$$

Условия (2.6) или (2.7) нарушаются в изолированных точках оси  $\Omega$ , которые назовем резонансными. Внутри интервалов, лежащих между этими точками, уравнение (2.8) описывает эволюцию квазистационарных вращений спутника с погрешностью  $O(\varepsilon)$  на отрезках времени длиной  $\sim \varepsilon^{-1}$ . При переходе решения укороченного уравнения через резонансную точку (если такой переход возможен, т. е. если резонансная точка не является особой для (2.8)) погрешность может возрасти. Вычисления [4] показывают, что при  $0 < \lambda < 0,5$  значения  $\Omega$ , в которых нарушаются условия (2.7), принадлежат интервалу  $(-2\omega_0, 2\omega_0)$ .

Уравнение (2.8) можно преобразовать к виду, имеющему простой механический смысл. Подставив ряды (2.5) в четвертое уравнение системы (1.1), (1.2), получим

$$Q_1(\Omega) = A^{-1} \left\langle m_1 + B(\omega_2\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{32}a_{33}) + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial U_1}{\partial a_{i2}} a_{i3} - \frac{\partial U_1}{\partial a_{i3}} a_{i2} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \omega_1} - \omega_2 \frac{\partial T_1}{\partial \omega_3} + \omega_3 \frac{\partial T_1}{\partial \omega_2} \right\rangle$$

Здесь и ниже угловыми скобками обозначается усреднение заключенного в них выражения по  $\gamma$  и  $u$  вдоль решений (2.3), (2.4) на квадрате  $0 \leq \gamma, u \leq 2\pi$ . В случае, когда выражение в скобках не зависит от  $u$ , такое усреднение сводится к усреднению по  $\gamma$  на отрезке  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ . Непосредственный подсчет показывает, что  $\langle \omega_2\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{32}a_{33} \rangle = 0$ . В силу уравнений (2.2) имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial T_1}{\partial q_i} - T_1 - U_1 \right) = 2\Phi_1 - \frac{\partial U_1}{\partial u} \omega_0 - \sum_{i=1}^3 \omega_i \frac{\partial T_1}{\partial \omega_i} - \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial U_1}{\partial a_{ik}} a_{ik}$$

При выводе этого соотношения учитывалось, что  $\Phi_1$  — квадратичная форма относительно  $\mathbf{q}$  и поэтому  $(\partial \Phi_1 / \partial \mathbf{q}') \mathbf{q}' = 2\Phi_1$ . Вдоль решения (2.3)

имеем

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= 0, \quad \dot{\omega}_2 = P_0(\Omega)\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = -P_0(\Omega)\omega_2 \\ a_{i1} &= 0, \quad a_{i2} = P_0(\Omega)a_{i3}, \quad a_{i3} = -P_0(\Omega)a_{i2} \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned}$$

и таким образом, вдоль решения (2.3), (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial T_1}{\partial q_j} - T_1 - U_1 \right) &= 2\Phi_1 - \frac{\partial U_1}{\partial u} \omega_0 - \\ - P_0 \left[ \omega_3 \frac{\partial T_1}{\partial \omega_2} - \omega_2 \frac{\partial T_1}{\partial \omega_3} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial U_1}{\partial a_{i2}} a_{i3} - \frac{\partial U_1}{\partial a_{i3}} a_{i2} \right) \right] \end{aligned}$$

Теперь выражение для  $Q_1(\Omega)$  можно записать так

$$\begin{aligned} Q_1(\Omega) &= \frac{1}{A} \left\langle m_1 + \frac{1}{P_0} \left[ 2\Phi_1 - \frac{\partial U_1}{\partial u} \omega_0 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial T_1}{\partial q_j} - T_1 - U_1 \right) \right] - \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \omega_1} \right\rangle \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что  $\langle \partial U_1 / \partial u \rangle = 0$  и средние значения вдоль решений (2.3), (2.4) полных производных по времени также равны нулю, получим искомый вид уравнения (2.8):

$$\dot{\Omega} = 2\varepsilon (AP_0)^{-1} \langle \Phi_1 \rangle + \varepsilon A^{-1} \langle m_1 \rangle \quad (2.9)$$

Слагаемое  $2\varepsilon (AP_0)^{-1} \langle \Phi_1 \rangle$  в правой части (2.9) характеризует диссипацию энергий демпфером. Поскольку  $\Phi_1$  — отрицательно определенная квадратичная форма относительно  $\mathbf{q}$ , справедливо неравенство  $\langle \Phi_1 \rangle \leq 0$ . Слагаемое  $\varepsilon A^{-1} \langle m_1 \rangle$  характеризует накачку энергии в систему из внешних источников. Это слагаемое может иметь любой знак. Равнодействующая указанных стока и притока энергии определяет скорость изменения  $\Omega$ .

**3. Примеры.** Исследуем уравнение (2.9) для конкретных демпферов. В рассмотренных ниже примерах функции  $U_1$ ,  $m_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и ряды (2.5) не зависят от  $u$  так, что условия существования и единственности этих рядов выражаются неравенствами (2.7).

1. Пусть демпфер представляет собой сосуд, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью. Такой демпфер имеет бесконечное число степеней свободы, однако если считать, что движение жидкости в сосуде характеризуется малыми числами Рейнольдса и воспользоваться результатами [6], то задачу можно свести к конечномерной. Согласно [6] спутник с таким демпфером можно считать твердым телом, на которое действует дополнительный внешний момент специального вида. Из естественных внешних моментов будем учитывать только гравитационный. В рамках модели, описанной в п. 2, эквивалентный спутник — твердое тело характеризуется следующими соотношениями

$$\begin{aligned} T_1 &= 0, \quad U_1 = 0, \quad \Phi_1 = 0 \\ m_1 &= \sum_{i=1}^3 [R_{1i} b_i + (\omega_2 R_{3i} - \omega_3 R_{2i}) a_i] \\ m_2 &= \sum_{i=1}^3 [R_{2i} b_i + (\omega_3 R_{1i} - \omega_1 R_{3i}) a_i] \\ m_3 &= \sum_{i=1}^3 [R_{3i} b_i + (\omega_1 R_{2i} - \omega_2 R_{1i}) a_i] \end{aligned}$$

где  $\|R_{ij}\|_{i,j=1}^3$  — постоянная симметричная положительно определенная матрица, зависящая от формы сосуда и характеристик жидкости;  $a_i$  и  $b_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) равны соответственно производным  $\omega_i$  и  $\dot{\omega}_i$ , вычисленным в силу уравнений движения спутника при  $m_1=m_2=m_3=0$ . При вычислении  $Q_1(\Omega)$  эти производные рассчитываются вдоль решения (2.3). Несложная выкладка приводит к формуле

$$Q_1(\Omega) = A^{-1} \langle m_1 \rangle = -\frac{1}{2} \dot{\omega}_0^2 A^{-1} (R_{22} + R_{33}) P_0(\Omega) \cos^2 \beta_0(\Omega)$$

В режиме гравитационной ориентации вращающегося спутника  $\cos \beta_0(\Omega) \approx 1$ , поэтому можно взять

$$Q_1(\Omega) = -\alpha \Omega, \quad \alpha = 2\omega_0^2 (R_{22} + R_{33}) (1-\lambda) [A(4-3\lambda)]^{-1}$$

Укороченное уравнение (2.9) принимает вид

$$\dot{\Omega} = -\varepsilon \alpha \Omega \quad (3.1)$$

В случае  $\lambda=0,05$  и  $\varepsilon \approx 0,01$  это уравнение достаточно точно (с погрешностью  $O(\varepsilon)$  на отрезке времени  $\Delta t \sim \varepsilon^{-1}$ ) описывает эволюцию квазистационарного вращения спутника в области  $2\omega_0 \leq |\Omega| \leq 7,7\omega_0$ . При  $|\Omega| \geq 7,7\omega_0$  уравнение (3.1) теряет точность из-за отбрасывания в нем множителя  $\cos^2 \beta_0(\Omega)$ : если  $|\Omega| < 7,7\omega_0$ , то  $\cos^2 \beta_0(\Omega) \geq 0,99$ . В области  $|\Omega| \leq 2\omega_0$  потеря точности может быть вызвана прохождением решений этого уравнения через резонансные точки, в которых нарушаются условия (2.7). При  $\lambda = 0,05$  наибольшее резонансное значение  $|\Omega| = 1,96\omega_0$ .

2. Рассмотрим демпфер в виде симметричного маховика с одной степенью свободы. При вращении маховика относительно несущего тела на маховик действует момент сил вязкого трения, за счет которого осуществляется демпфирование, и упругий восстанавливающий момент. Из внешних моментов, приложенных к спутнику, будем учитывать только гравитационный. Для такого спутника

$$\begin{aligned} \varepsilon T_1 &= \frac{1}{2} J (\dot{q})^2 + J \dot{q} (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + n_3 \omega_3), \quad \varepsilon = J/A \\ \varepsilon U_1 &= -\frac{1}{2} g_2 q^2, \quad \varepsilon \Phi_1 = -\frac{1}{2} g_1 (q')^2, \quad m_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned}$$

где  $q$  — угол поворота маховика относительно несущего тела;  $(n_1, n_2, n_3)$  — единичный вектор, направленный вдоль оси вращения маховика;  $J$  — осевой момент инерции маховика;  $g_1$  и  $g_2$  — коэффициенты демпфирования и упругости.

Уравнения (2.2) (в данном случае одно уравнение) принимают вид

$$q'' + \kappa_1 q' + \kappa_2 q + n_1 \dot{\omega}_1 + n_2 \dot{\omega}_2 + n_3 \dot{\omega}_3 = 0, \quad \kappa_i = g_i/J \quad (i=1, 2)$$

Решая это уравнение при  $\omega_1, \omega_2$  и  $\omega_3$ , заданных соотношениями (2.3), находим выражение для функции (2.4):

$$\begin{aligned} \Phi_0(\gamma, \Omega) &= \frac{\omega_0 P_0 \cos \beta_0}{(\kappa_2 - P_0^2)^2 + \kappa_1^2 P_0^2} \{ [(\kappa_2 - P_0^2) n_3 - \kappa_1 P_0 n_2] \cos \gamma + \\ &+ [(\kappa_2 - P_0^2) n_2 + \kappa_1 P_0 n_3] \sin \gamma \} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$Q_1(\Omega) = -\frac{\kappa_1 \omega_0^2 (n_2^2 + n_3^2) P_0^3 \cos^2 \beta_0}{2 [(\kappa_2 - P_0^2)^2 + \kappa_1^2 P_0^2]}$$

Полагая  $\cos \beta_0 \approx 1$  и вводя обозначения

$$b = \frac{\kappa_1 (4-3\lambda)}{4(1-\lambda)} \quad a = \frac{1}{2} b \omega_0^2 (n_2^2 + n_3^2), \quad c = \kappa_2^{1/2} \frac{4-3\lambda}{4(1-\lambda)}$$

уравнение (2.9) можно записать так

$$\dot{\Omega} = -\varepsilon a \Omega^3 [(c^2 - \Omega^2)^2 + b^2 \Omega^2]^{-1} \quad (3.3)$$

Относительно точности этого уравнения справедливы все замечания, сделанные выше при анализе точности уравнения (3.1). Решение уравне-

ния (3.3) с начальным условием  $\Omega(t_0) = \Omega_0$  задается неявной формулой

$$\frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_0^2) + (b^2 - 2c^2) \ln(\Omega/\Omega_0) - \frac{1}{2}c^4(\Omega^{-2} - \Omega_0^{-2}) = -\varepsilon a(t - t_0) \quad (3.4)$$

В области  $|\Omega| \gg \max(b, c)$  эту формулу можно приближенно представить в виде

$$\Omega = \Omega_0 [1 - 2\varepsilon a \Omega_0^{-2}(t - t_0)]^{1/2} \quad (3.5)$$

В области  $|\Omega| \ll \min(c, c^2/b)$  формула (3.4) переходит в

$$\Omega = \Omega_0 [1 + 2\varepsilon a \Omega_0^2 c^{-4}(t - t_0)]^{-1/2}$$

Пусть теперь упругой связи между маховиком и несущим телом нет, т. е.  $\kappa_2 = 0, c = 0$ . Тогда при  $|\Omega| \gg b$  по-прежнему справедлива формула (3.5), а при  $|\Omega| \ll b$  решение (3.4) принимает вид

$$\Omega = \Omega_0 \exp[-\varepsilon a b^{-2}(t - t_0)]$$

Таким образом, при малых  $|\Omega|$  торможение вращения спутника в случае  $c = 0$  происходит быстрее чем в случае  $c \neq 0$ .

Приведенные примеры показывают, что вид уравнения (2.9) существенно зависит от типа демпфера. Однако можно сделать одно общее наблюдение. Пусть система (1.1), (1.2) не зависит от  $u$ . Тогда функция  $\varphi_0$  в (2.4) также не будет зависеть от  $u$ :  $\varphi_0 = \varphi_0(\gamma, \Omega)$ . Пусть, кроме того,  $m_1 = 0$ . Учитывая, что  $\Phi_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  — квадратичная форма относительно  $\dot{\mathbf{q}}$ , получаем

$$Q_1(\Omega) = \frac{P_0(\Omega)}{A} \int_0^{2\pi} \Phi_1 \left[ \varphi_0(\gamma, \Omega), \frac{\partial \varphi_0(\gamma, \Omega)}{\partial \gamma} \right] d\gamma$$

Если в представляющей интерес области изменения  $\Omega$  интеграл в правой части последней формулы слабо зависит от этой переменной, то  $Q_1(\Omega) \approx -\alpha\Omega$ ,  $\alpha = \text{const} \geq 0$ . В качестве примера рассмотрим функцию (3.2). При  $\kappa_2 = 0, \cos \beta_0 \approx 1$  и  $|\Omega| \ll b$  она имеет вид  $\varphi_0(\gamma, \Omega) = \kappa_1^{-1}(n_3 \sin \gamma - n_2 \cos \gamma)$ . В этом случае уравнение (3.3) переходит в уравнение (3.1), в котором  $\alpha = a/b^2$ . Аналогичных примеров можно привести достаточно много (демпферы в виде массы на пружине, маятника и т. п.), и уравнение (3.1) описывает эволюцию квазистационарного вращения спутника для достаточно широкого класса демпферов.

#### 4. Гравитационная ориентация орбитального комплекса «Салют-7» «Космос-1686».

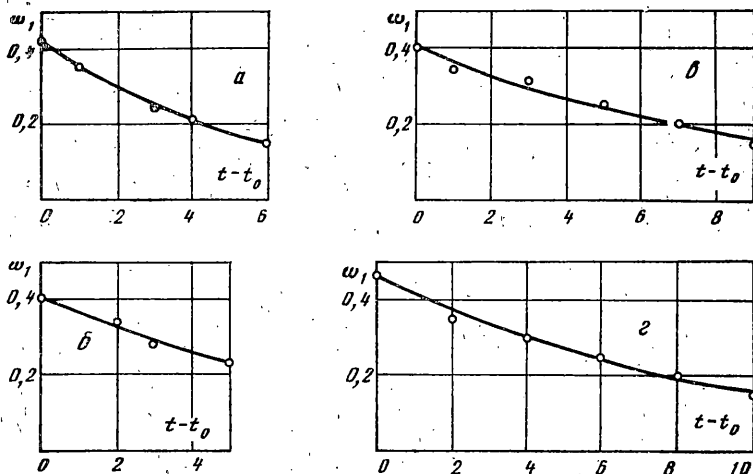
Режим гравитационной ориентации вращающегося спутника применялся на орбитальных комплексах «Салют-6» — «Космос-1267», «Салют-7» — «Космос-1443» и «Салют-7» — «Космос-1686». Этот режим оказался удобным для длительного хранения комплексов на орбите, поскольку он обеспечивает гарантированный приемлемый энергосъем с солнечных батарей спутников «Космос» при весьма малых затратах топлива на управление вращательным движением [7] (в [7] режим гравитационной ориентации вращающегося спутника назван режимом обобщенной гравитационной ориентации). Как выяснилось, вращение комплекса вокруг продольной оси с течением времени замедляется, и для восстановления режима комплекса необходимо периодически подкручивать, примерно один раз в 7–10 сут.

Наиболее вероятной причиной указанного замедления следует считать диссипацию энергии внутренними устройствами комплекса (топливо в баках, жесткость конструкции и т. п.). Другие возможные причины, например, диссипативный момент от вихревых токов, наведенных в оболочке комплекса магнитным полем Земли, или непотенциальный аэродинамический момент, судя по оценкам [3, 4], должны приводить к существенно большим характерным временам замедления чем те, которые наблюдались в действительности. Будем считать, что торможение вращения описывается уравнением (ср. (3.1)):

$$\tau \dot{\Omega} + \Omega = 0 \quad (4.1)$$

где  $\tau = \text{const} > 0$  — постоянная времени торможения. Согласно анализу, проведенному в п. 3, такой закон торможения является достаточно общим. Область применения этого закона, определяемая условиями (2.7) и  $\cos^2 \beta_0(\Omega) > 0,99$ , в случае рассматриваемых орбитальных комплексов ( $\lambda = 0,056, \omega_0 = 0,067$  град/с) имеет вид  $0,13 \text{ град/с} \leq |\Omega| \leq 0,46 \text{ град/с}$ . В указанный диапазон попадают почти все измерения угловой скорости  $\omega_1$ , выполненные во время использования на этих комплексах режима гравитационной ориентации вращающегося спутника.

Ниже приводятся результаты обработки измерений  $\omega_1$ , выполненных на орбитальном комплексе «Салют-7» — «Космос-1686» в течение шести интервалов его свободного движения. Каждый такой интервал ограничен двумя последовательными за-



Фиг. 2

крутками. Включенные в обработку данные измерений и полученные результаты приведены ниже

интервал 1:		$t_0=1.10.1986,$	$\tau^{\sim}=5,92,$	$\sigma_{\Omega}=0,011$		
$t-t_0$	0	1	3	4	6	
$\omega_1$	0,420	0,350	0,242	0,226	0,148	
$\Omega^{\sim}$	0,418	0,353	0,252	0,213	0,152	
интервал 2:		$t_0=7.10.1986,$	$\tau^{\sim}=8,33,$	$\sigma_{\Omega}=0,022$		
$t-t_0$	0	2	3	5		
$\omega_1$	0,410	0,340	0,278	0,227		
$\Omega^{\sim}$	0,414	0,326	0,289	0,227		
интервал 3:		$t_0=14.10.1986,$	$\tau^{\sim}=10,02,$	$\sigma_{\Omega}=0,048$		
$t-t_0$	0	2	6	8		
$\omega_1$	0,342	0,308	0,210	0,138		
$\Omega^{\sim}$	0,355	0,291	0,195	0,160		
интервал 4:		$t_0=23.10.1986,$	$\tau^{\sim}=9,58,$	$\sigma_{\Omega}=0,060$		
$t-t_0$	0	1	3	5	7	9
$\omega_1$	0,410	0,343	0,308	0,255	0,197	0,140
$\Omega^{\sim}$	0,404	0,364	0,295	0,240	0,195	0,142
интервал 5:		$t_0=1.11.1986,$	$\tau^{\sim}=9,06,$	$\sigma_{\Omega}=0,040$		
$t-t_0$	0	2	4	6	8	10
$\omega_1$	0,468	0,346	0,295	0,245	0,200	0,142
$\Omega^{\sim}$	0,458	0,367	0,294	0,236	0,189	0,152
интервал 6:		$t_0=11.11.1986,$	$\tau^{\sim}=8,09,$	$\sigma_{\Omega}=0,004$		
$t-t_0$	0	6	8			
$\omega_1$	0,438	0,212	0,160			
$\Omega^{\sim}$	0,438	0,209	0,163			

Здесь  $t_0$  — дата начала интервала свободного движения,  $t-t_0$  (сут) — дата измерения (все измерения проводились примерно в одно и то же время суток),  $\omega_1$  (град/с) — результат измерения. Точность отдельного измерения составляет приблизительно 0,005 град/с. Обработка заключалась в попытке аппроксимировать данные каждого интервала решением уравнения (4.1) функцией

$$\Omega^{\sim}(t) = \Omega_0 \exp [-(t-t_0)/\tau] \quad (4.2)$$

выбирая подходящим образом значения параметров  $\Omega_0$  и  $\tau$ .

Для решения поставленной задачи применялся метод наименьших квадратов. Пусть  $t_i, \omega_1^{(i)} (i=0, 1, \dots, N-1)$  — данные измерений, относящиеся к одному и тому же интервалу. Составим выражение

$$L(\Omega_0, \tau) = \sum_{i=0}^{N-1} [\omega_1^{(i)} - \Omega^{\sim}(t_i)]^2$$



В качестве оценок параметров  $\Omega_0$  и  $\tau$  принимаются их значения  $\Omega_0^\sim$  и  $\tau^\sim$ , доставляющие минимум функции  $L(\Omega_0, \tau)$ . Мерой качества аппроксимации служат средне-квадратичное рассогласование измеренных и расчетных значений  $\sigma_R = [L(\Omega_0^\sim, \tau^\sim) / N]^{1/2}$ . Полученные описанным способом величины  $\tau^\sim$  (сут) и  $\sigma_R$  (град/с) для каждого из обработанных интервалов приведены выше. Там же указаны расчетные значения  $\omega_i = \Omega^\sim(t_i)$  ( $i=0, 1, \dots, N-1$ ). Графики некоторых из найденных функций (4.2) изображены сплошными линиями на фиг. 2. Кругками рядом с графиками указаны результаты измерений. Фиг. 2, а соответствует первому обработанному интервалу, фиг. 2, б – второму, фиг. 2, в – четвертому и фиг. 2, г – пятому.

Анализ результатов обработки измерений показывает, что уравнение (4.1) достаточно точно описывает торможение вращения комплекса вокруг продольной оси. Несколько неожиданным оказался большой разброс оценок  $\tau^\sim$ , показывающий различие характеристик механизма демпфирования на разных интервалах свободного движения. Возможное объяснение этого факта состоит в следующем. Демпфирование обусловлено нежесткостью солнечных батарей станции «Салют-7» и спутника «Космос-1686». Батареи станции поворачиваются вслед за Солнцем и поэтому на разных интервалах свободного движения по-разному рассеивают энергию. Среднее значение  $\tau^\sim$ , вычисленное по обработанным интервалам времени, составляет 8,5 сут, соответствующее стандартное отклонение – 1,46 сут.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноушко Ф. Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника // ПММ. 1964. Т. 28. № 1. С. 155.
2. Сарычев В. А., Сазонов В. В. Гравитационная ориентация вращающегося спутника // Космич. исслед. 1981. Т. 19. № 4. С. 499.
3. Сарычев В. А., Сазонов В. В. Влияние диссипативного магнитного момента на гравитационную ориентацию вращающегося спутника // Космич. исслед. 1982. Т. 20. № 2. С. 117.
4. Сазонов В. В., Петров А. Л. Эволюция режима гравитационной ориентации вращающегося спутника под действием непотенциального аэродинамического момента // Космич. исслед. 1987. Т. 25. № 4. С. 508.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.
6. Черноушко Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049.
7. Костенко И. К., Ветлов В. И., Нырков А. Г., Сарычев В. А., Сазонов В. В. Режим обобщенной гравитационной ориентации на орбитальных комплексах «Салют-6» – «Космос-1267» и «Салют-7» – «Космос-1443» // Космич. исслед. 1986. Т. 24. № 1. С. 46.

Москва

Поступила в редакцию  
12.07.1988