МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1990

УДК 534.1

О. З. МАЛАХОВА

ОБ ОСОБОМ СЛУЧАЕ В ТЕОРИИ САМОСИНХРОНИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЕЙ

Рассматривается вопрос о самосинхронизации k механических вибровозбудителей с почти одинаковыми парциальными угловыми скоростями, расположенных на несущем теле с одной степенью свободы. Отмечается, что необходимые условия существования и устойчивости синхронных движений получаются на основе интегрального признака устойчивости, причем в случае $k<4$ эти условия являются также и достаточными, а в особом случае, когда $k\geqslant 4$, – лишь необходимыми. Для особого случая получены достаточные условия существования и устойчивости синхронных движений. Исследование проведено методом малого параметра Пуанкаре. В качестве примера рассмотрена задача о самосинхронизации четырех вибровозбудителей, три из которых одинаковы.

1. Введение. В теории самосинхронизации механических вибровозбудителей показано [1], что синхронные движения могут соответствовать лишь тем значениям начальных фаз вращения вибровозбудителей $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_k^0$ (k — число вибровозбудителей), которые удовлетворяют некоторой системе k трансцендентных уравнений. Как правило, эти уравнения позволяют однозначно найти $k-1$ независимых неизвестных разностей фаз $\alpha_1^0-\alpha_k^0, \ldots, \alpha_{k-1}^0-\alpha_k^0$ и первое приближение к угловой скорости синхронного вращения, а одна из фаз в силу автономности исходной системы может быть выбрана произвольно. Существует, однако, ряд представляющих прикладной интерес особых случаев, когда из указанных уравнений не удается однозначно определить все $k-1$ разностей фаз; одному из таких случаев посвящена настоящая работа, в которой исследуется вопрос о самосинхронизации k механических вибровозбудителей с почти одинаковыми парциальными угловыми скоростями, расположенных на несущем теле с одной степенью свободы. Необходимые условия существования и устойчивости синхронных движений могут быть получены на основе интегрального признака устойчивости [1, 2]. Как показано в [1], при $k<4$ эти условия являются также и достаточными. В данной работе получены достаточные условия существования и устойчивости синхронных решений в особом случае, когда $k\geqslant 4$. В качестве примера приведено решение задачи о самосинхронизации четырех вибровозбудителей, три из которых одинаковы.

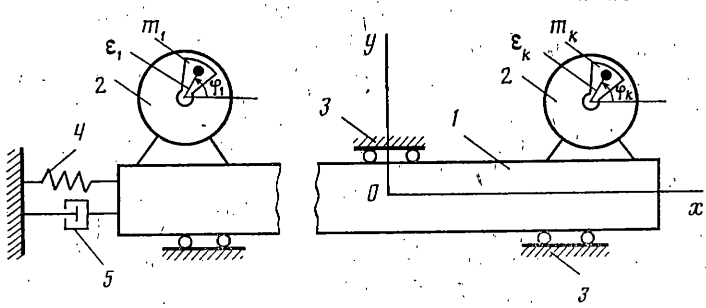
2. Постановка задачи. Рассматривается система, изображенная схематически на фигуре. На несущем теле *1* установлены k дебалансных вибровозбудителей *2*, приводимых во вращение электродвигателями асинхронного типа. Несущее тело может перемещаться относительно неподвижного основания *3* вдоль некоторого фиксированного направления Ox и связано с основанием посредством линейных упругих элементов *4* и демпфирующих элементов *5*. Система характеризуется k обобщенными вращательными координатами — углами поворота роторов вибровозбудителей φ_s ($s=1, \ldots, k$), отсчитываемыми от направления Ox против хода часовой стрелки, и одной обобщенной колебательной координатой — перемещением несущего тела x, отсчитываемым от его статического положения. Уравнения движения имеют вид [1]:

$$J_s\ddot{\varphi}_s=L_s(\dot{\varphi}_s)-R_s(\dot{\varphi}_s)+m_s\varepsilon_s(\ddot{x}\sin\varphi_s-g\cos\varphi_s) \tag{2.1}$$

$$(s=1, \ldots, k)$$

$$M\ddot{x}+b\dot{x}+cx=\sum_{j=1}^{k} m_j\varepsilon_j(\ddot{\varphi}_j \sin\varphi_j+\dot{\varphi}_j^2\cos\varphi_j)$$

где m_s — масса ротора s-го вибровозбудителя, ε_s — его эксцентриситет, а J_s — момент инерции относительно оси вращения; $L_s(\dot{\varphi}_s)$ и $R_s(\dot{\varphi}_s)$ — соответственно вращающий момент асинхронного двигателя и момент сил сопротивления, действующие на ротор s-го вибровозбудителя; M — масса несущего тела с учетом массы вибровозбудителей, c — жесткость упругих элементов 4, b — коэффициент сопротивления демпфирующих элемен-



тов 5, g — ускорение силы тяжести.

Рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости решений системы (2.1) вида

$$\varphi_s=\sigma_s(\Omega t+\alpha_s^0+\psi_s^*(\Omega t)) \quad (s=1,\dots,k)$$
$$x=x(\Omega t) \tag{2.2}$$

где Ω — абсолютное значение средней скорости вращения роторов, α_s^0 — начальные фазы вращения, $\psi_s^*(\Omega t+2\pi)=\psi_s^*(\Omega t)$, $x(\Omega t+2\pi)=x(\Omega t)$, $\sigma_s=\pm1$. При этом предполагается, что функции $L_s(\dot{\varphi}_s)$ и $R_s(\dot{\varphi}_s)$ в уравнениях (2.1) можно линеаризовать вблизи значения $\dot{\varphi}_s=\sigma_s\Omega_s$, так что

$$L_s(\dot{\varphi}_s)-R_s(\dot{\varphi}_s)=-\varkappa_s^*(\dot{\varphi}_s-\sigma_s\Omega)+\varkappa_s^*\sigma_s(\Omega_s-\Omega) \tag{2.3}$$

Здесь $\varkappa_s^*>0$, а Ω_s — так называемые парциальные угловые скорости вибровозбудителей, определяемые из условий

$$L_s(\sigma_s\Omega_s)-R_s(\sigma_s\Omega_s)=0 \quad (s=1,\dots,k)$$

После замены $\varphi_s=\sigma_s(\Omega t+\psi_s)$, учета соотношений (2.3) и перехода к безразмерным переменным и параметрам, уравнения (2.1) принимают вид (штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau=\Omega t$):

$$I_s\psi_s''+\varkappa_s\omega^{-1}\psi_s'=\varkappa_s(\omega_s-\omega)\omega^{-2}+\mu S_s[y''\sin(\tau+\psi_s)-g_1\sigma_s\omega^{-2}\cos(\tau+\psi_s)] \tag{2.4}$$

$$y''+\mu\frac{\eta}{\omega}y'+\frac{\lambda^2}{\omega^2}y=\sum_{j=1}^{k} S_j[\psi_j''\sin(\tau+\psi_j)+(1+\psi_j')^2\cos(\tau+\psi_j)]$$

$$I_s=J_s/(m_1\varepsilon_1^2),\quad \varkappa_s=\varkappa_s^*/(m_1\varepsilon_1^2\Omega_0),\quad \omega=\Omega/\Omega_0 \tag{2.5}$$
$$\omega_s=\Omega_s/\Omega_0,\quad S_s=m_s\varepsilon_s/(m_1\varepsilon_1),\quad \mu=m_1/M,\quad \lambda^2=c/(M\Omega_0^2)$$
$$g_1=g/(\mu\varepsilon_1\Omega_0^2),\quad y=x/(\mu\varepsilon_1),\quad \eta=b/(\mu M\Omega_0)$$

Таким образом, задача о самосинхронизации вибровозбудителей сводится к выяснению условий существования и устойчивости периодических решений системы (2.4) с периодом 2π и нахождению синхронной частоты ω. Предполагаем, что движение происходит вдали от резонанса, μ — малый параметр, все остальные безразмерные параметры и переменные, определяемые соотношениями (2.5), имеют порядок единицы, парциальные частоты вибровозбудителей отличаются одна от другой на величины порядка μ^2:

$$\omega_s=1+\mu^2\Delta_s \quad (s=1,\dots,k) \tag{2.6}$$

Отметим, что приводимые ниже результаты распространяются также и на случаи, когда парциальные частоты вибровозбудителей различаются на величины более высокого порядка малости, т. е. $\omega_s=1+\mu^l\Delta_s^*$ ($l=3, 4, \ldots$). В частности, можно предполагать, что парциальные частоты всех вибровозбудителей одинаковы ($\omega_s=1$, $s=1, \ldots, k$). Случай, когда частоты ω_s отличаются одна от другой на величины порядка μ, не является, вообще говоря, особым и может быть изучен путем использования, например, интегрального признака устойчивости [1].

3. Достаточные условия существования синхронных решений. Периодические решения уравнений (2.4) могут быть найдены с помощью метода малого параметра Пуанкаре [3, 4]. При достаточно малых значениях μ эти периодические решения и частота ω представимы в виде сходящихся рядов

$$\psi_s(\tau)=\psi_s^{(0)}(\tau)+\mu\psi_s^{(1)}(\tau)+\mu^2\psi_s^{(2)}(\tau)+\ldots$$

$$y(\tau)=y^{(0)}(\tau)+\mu y^{(1)}(\tau)+\mu^2 y^{(2)}(\tau)+\ldots \tag{3.1}$$

$$\omega=\omega^{(0)}+\mu\omega^{(1)}+\mu^2\omega^{(2)}+\ldots \tag{3.2}$$

$$\omega^{(0)}=1, \quad \psi_s^{(0)}(\tau)=\alpha_s^0=\mathrm{const} \quad (s=1,\ldots,k) \tag{3.3}$$

$$y^{(0)}(\tau)=\frac{1}{\lambda^2-1}\sum_{j=1}^{k}S_j\cos(\tau+\alpha_j^0)$$

порождающее решение системы (2.4).

Следует отметить, что разложение решения по целым степеням малого параметра в особом случае, вообще говоря, может оказаться несправедливым. Ниже будет указано условие, при котором такое представление возможно.

Порождающее решение (3.3) зависит от k произвольных постоянных $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_k^0$ — начальных фаз, которые определяются из условий периодичности коэффициентов в разложении (3.1) функций $\varphi_s(\tau)$. Условия периодичности $\psi_s^{(1)}$ имеют вид

$$\varkappa_s\omega^{(1)}+\frac{S_s}{2(\lambda^2-1)}\sum_{j=1}^{k}S_j\sin(\alpha_s^0-\alpha_j^0)=0 \quad (s=1,\ldots,k) \tag{3.4}$$

Складывая все соотношения (3.4) и учитывая, что $\varkappa_s>0$, можно получить $\omega^{(1)}=0$. Таким образом, условия (3.4) могут быть сведены к системе $k-1$ трансцендентных уравнений относительно $k-1$ неизвестных разностей фаз $\beta_s^0=\alpha_s^0-\alpha_k^0$ ($s=1,\ldots,k-1$, α_k^0 можно выбрать произвольным образом):

$$\sum_{j=1}^{k}S_j\sin(\beta_s^0-\beta_j^0)=0\,(s=1,\ldots,k-1), \quad \beta_k^0=0 \tag{3.5}$$

В [1] замечено, что уравнения (3.5) удовлетворяются при выполнении двух равенств

$$\sum_{s=1}^{k-1}S_s\sin\beta_s^0=0, \quad \sum_{s=1}^{k-1}S_s\cos\beta_s^0+S_k=0 \tag{3.6}$$

из которых следует, что величины S_s можно толковать как длины сторон замкнутого k-угольника, а углы β_s^0 — как углы между сторонами и осью Ox^1, причем сторона длины S_k расположена вдоль указанной оси. Ясно, что в случае $k\geqslant4$ соотношения (3.6) не позволяют однозначно определить все постоянные $\beta_1^0,\ldots,\beta_{k-1}^0$, т. е. в этом случае уравнения (3.5) представляют собой лишь необходимые условия существования периодических решений системы (2.4). Для получения достаточных условий требуется рассмотреть более высокие приближения.

Условия существования периодических функций $\psi_s^{(2)}(\tau)$ могут быть приведены к виду

$$\varkappa_s(\Delta_s-\omega^{(2)})+\frac{S_s}{2(\lambda^2-1)}\sum_{j=1}^{k}S_j\cos(\alpha_j^0-\alpha_s^0)(\alpha_j^{(1)}-\alpha_s^{(1)})-\frac{g_1S_s^2}{2}\frac{\varkappa_s}{I_s^2+\varkappa_s^2}=0$$

$$(s=1,\ldots,k) \tag{3.7}$$

где $\alpha_j^{(1)}=\langle\psi_j^{(1)}(\tau)\rangle$ $(j=1,\ldots,k)$ (здесь и далее треугольными скобками обозначается осреднение по τ в интервале $[0,2\pi]$).

В результате суммирования уравнений (3.7) находится $\omega^{(2)}$:

$$\omega^{(2)}=\left(\sum_{s=1}^{k}\varkappa_s\right)^{-1}\sum_{s=1}^{k}\left[\varkappa_s\Delta_s-\frac{1}{2}g_1^2S_s^2\frac{\varkappa_s}{I_s^2+\varkappa_s^2}\right] \tag{3.8}$$

что позволяет вместо k условий (3.7) рассматривать $k-1$ соотношений относительно неизвестных $\beta_1^0,\ldots,\beta_{k-1}^0$, $\beta_1^{(1)},\ldots,\beta_{k-1}^{(1)}$ $(\beta_j^{(1)}=\alpha_j^{(1)}-\alpha_k^{(1)})$:

$$\sum_{j=1}^{k-1}S_j\cos(\beta_j^0-\beta_s^0)\beta_j^{(1)}=B_s\quad(s=1,\ldots,k-1) \tag{3.9}$$

$$B_s=2(\lambda^2-1)S_s^{-1}[-\varkappa_s(\Delta_s-\omega^{(2)})+{}^1/_2g_1^2S_s^2\varkappa_s(I_s^2+\varkappa_s^2)^{-1}] \tag{3.10}$$

причем $\omega^{(2)}$ — уже известная величина, определенная формулой (3.8).

Соотношения (3.9) представляют собой линейную неоднородную систему уравнений относительно $\beta_j^{(1)}$ $(j=1,\ldots,k-1)$. Можно показать, что все миноры третьего порядка определителя системы (3.9) равны нулю, а миноры второго порядка определяются выражением

$$\begin{vmatrix} S_m\cos(\beta_m^0-\beta_s^0) & S_i\cos(\beta_i^0-\beta_s^0)\\ S_m\cos(\beta_m^0-\beta_j^0) & S_i\cos(\beta_i^0-\beta_j^0)\end{vmatrix}=S_mS_i\sin(\beta_s^0-\beta_j^0)\sin(\beta_m^0-\beta_i^0)$$

Пусть по крайней мере одно из этих выражений отлично от нуля, например

$$S_{k-2}S_{k-1}\sin^2(\beta_{k-2}^0-\beta_{k-1}^0)\neq0 \tag{3.11}$$

Тогда условия разрешимости системы (3.9) относительно $\beta_j^{(1)}$ $(j=1,\ldots,k-1)$ имеют вид

$$\begin{gathered}F_s(\beta_1^0,\ldots,\beta_{k-1}^0)\equiv B_s\sin(\beta_{k-2}^0-\beta_{k-1}^0)+B_{k-2}\sin(\beta_{k-1}^0-\beta_s^0)+\\ +B_{k-1}\sin(\beta_s^0-\beta_{k-2}^0)=0\quad(s=1,\ldots,k-3)\end{gathered} \tag{3.12}$$

Уравнения (3.12) совместно с условиями (3.6) или равносильными им вследствие допущения (3.11) двумя последними уравнениями системы (3.5) составляют систему $k-1$ уравнений с $k-1$ неизвестными $\beta_1^0,\ldots$ $\ldots,\beta_{k-1}^0$:

$$F_s(\beta_1^0,\ldots,\beta_{k-1}^0)=0\quad(s=1,\ldots,k-1) \tag{3.13}$$

$$F_{k-2}\equiv-\sum_{j=1}^{k-1}S_j\sin(\beta_{k-2}^0-\beta_j^0)-S_k\sin\beta_{k-2}^0 \tag{3.14}$$

$$F_{k-1}\equiv-\sum_{j=1}^{k=1}S_j\sin(\beta_{k-1}^0-\beta_j^0)-S_k\sin\beta_{k-1}^0$$

Пусть $\beta_1^0=\beta_1^*,\ldots,\beta_{k-1}^0=\beta_{k-1}^*$ — некоторое решение системы (3.13). Необходимо выяснить, при каких условиях этому решению будет отвечать периодическое решение системы (2.4) вида (3.1). Иными словами, нужно найти условия, при которых могут быть однозначно определены все периодические коэффициенты в разложении решения по целым степеням малого параметра (3.1).

Рассмотрение третьего приближения уравнений (2.4) позволяет получить $k-1$ соотношений

$$\sum_{j=1}^{k-1} S_j \cos(\beta_j^* - \beta_s^*)\beta_j^{(2)} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} S_j[(\beta_j^{(1)})^2 - 2\beta_j^{(1)}\beta_s^{(1)}]\times$$
$$\times \sin(\beta_s^* - \beta_j^*) + [f_s^{(1)}(\beta_1^*, \ldots, \beta_{k-1}^*) + \varkappa_s\omega^{(3)}]2(\lambda^2-1)S_s^{-1} \tag{3.15}$$

Здесь $f_s^{(1)}$ — функции, вид которых определяется лишь исходными параметрами

$$\omega^{(3)} = -\left(\sum_{s=1}^{k}\varkappa_s\right)^{-1}\sum_{s=1}^{k} f_s^{(1)}(\beta_1^*, \ldots, \beta_{k-1}^*)$$

$$\beta_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} - \alpha_k^{(2)}, \quad \alpha_j^{(2)} = \langle\psi_j^{(2)}(\tau)\rangle \cdot (j=1, \ldots, k)$$

Очевидно, что для разрешимости соотношений (3.15) относительно $\beta_j^{(2)}$ $(j=1, \ldots, k-1)$ правые части этих соотношений должны удовлетворять $k-3$ условиям, аналогичным (3.12). Учитывая последние два уравнения системы (3.9), указанные условия можно привести к линейной относительно $\beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(1)}$ системе уравнений с известной правой частью

$$\sum_{j=1}^{k-1} \left.\frac{\partial F_s}{\partial \beta_j^0}\right|_{\beta_i^0=\beta_i^*} \beta_j^{(1)} = H_s^{(1)}(\beta_1^*, \ldots, \beta_{k-1}^*) \tag{3.16}$$

Система (3.16) будет иметь единственное решение, если

$$|\partial F_s/\partial \beta_j^0|_{\beta_i^0=\beta_i^*} \neq 0 \tag{3.17}$$

Условие (3.17) равносильно требованию, что решение $\beta_1^0=\beta_1^*, \ldots$ $\ldots, \beta_{k-1}^0=\beta_{k-1}^*$ системы (3.13) является простым.

Аналогично могут быть рассмотрены и более высокие приближения. При этом условия периодичности функций $\psi_s^{(n+3)}(\tau)$ $(n=1, 2, \ldots)$ будут иметь вид, сходный с (3.15), а следствием разрешимости соотношений, выражающих эти условия, относительно постоянных $\beta_j^{(n+2)} = \alpha_j^{(n+2)} - \alpha_k^{(n+2)}$ $(\alpha_j^{(n+2)} = \langle\psi_j^{(n+2)}(\tau)\rangle)$ будут равенства типа (3.16):

$$\sum_{j=1}^{k-1} \left.\frac{\partial F_s}{\partial \beta_j^0}\right|_{\beta_i^0=\beta_i^*} \beta_j^{(n+1)} = H_s^{(n+1)}(\beta_1^*, \ldots, \beta_{k-1}^*)$$

Отсюда в силу (3.17) однозначно определяются $\beta_1^{(n+1)}, \ldots, \beta_{k-1}^{(n+1)}$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение. Каждому простому решению системы уравнений (3.13), т. е. решению, для которого выполнено условие (3.17), соответствует при достаточно малых значениях μ единственное аналитическое относительно μ 2π-периодическое решение уравнений (2.4), обращающееся при $\mu=0$ в порождающее решение (3.3).

При допущениях, принятых в п. 2, всем указанным решениям уравнений (3.13) будут отвечать синхронные движения исходной системы вида (2.2), где $\Omega=\Omega_0(1+\mu^2\omega^{(2)}+O(\mu^3))$.

4. Об устойчивости синхронных решений. Пусть $\psi_j^*(\tau)$ $(j=1, \ldots, k)$, $y^*(\tau)$ — периодическое решение, а ω^* — синхронная скорость, соответствующие некоторому простому решению $\beta_1^0=\beta_1^*, \ldots, \beta_{k-1}^0=\beta_{k-1}^*$ системы (3.13) и представленные в виде разложений (3.1)—(3.2).

Уравнения в вариациях, составленные для системы (2.4) и решения $\psi_j^*(\tau)$, $y^*(\tau)$, имеют вид

$$I_s w_s''+(\varkappa_s/\omega^*)w_s'=\mu S_s[z''\sin(\tau+\psi_s^*)+ +y^{*\prime\prime}\cos(\tau+\psi_s^*)w_s+(g_1\sigma_s/\omega^{*2})\sin(\tau+\psi_s^*)w_s] \quad (s=1,\ldots,k) \tag{4.1}$$

$$z''+\mu\frac{\eta}{\omega^*}z'+\frac{\lambda^2}{\omega^{*2}}z=\sum_{j=1}^{k}S_j[w_j''\sin(\tau+\psi_j^*)+\psi_j^{*\prime\prime}\cos(\tau+\psi_j^*)w_j-$$

$$-(1+\psi_j^{*\prime})^2\sin(\tau+\psi_j^*)w_j+2(1+\psi_j^{*\prime})w_j'\cos(\tau+\psi_j^*)]$$

Согласно методу Н. А. Артемьева [4], характеристические показатели $\gamma_i(\mu)$ системы (4.1) могут быть вычислены с помощью подстановки $w_s(\tau)=p_s(\tau)\exp(\gamma_i(\mu)\tau)$ $(s=1,\ldots,k)$, $z(\tau)=q(\tau)\exp(\gamma_i(\mu)\tau)$ из условий периодичности функций $p_s(\tau)$ и $q(\tau)$.

При $\mu=0$ система (3.1) имеет нулевой характеристический показатель кратности k $\gamma_j^{(0)}=0$ $(j=1,\ldots,k)$, k отрицательных показателей $\gamma_{k+j}^{(0)}=-\varkappa_j/I_j$ $(j=1,\ldots,k)$ и два чисто мнимых показателя

$$\gamma_{2k+1}^{(0)}=i\lambda, \quad \gamma_{2k+2}^{(0)}=-i\lambda \tag{4.2}$$

Как и обычно в задачах о самосинхронизации механических вибровозбудителей [1], в рассматриваемой системе основные условия устойчивости синхронных решений связаны с характеристическими показателями, отвечающими $\gamma_j^{(0)}=0$. При некоторых дополнительных условиях, вытекающих из приводимого ниже исследования, эти показатели, а также соответствующие им функции $p_s(\tau)$ и $q(\tau)$ оказываются аналитическими по μ, т. е. представляются в виде

$$\gamma=\mu\gamma^{(1)}+\mu^2\gamma^{(2)}+\ldots \tag{4.3}$$

$$p_s(\tau)=P_s^0+\mu p_s^{(1)}(\tau)+\mu^2 p_s^{(2)}(\tau)+\ldots \quad (s=1,\ldots,k)$$

$$q(\tau)=q^{(0)}+\mu q^{(1)}(\tau)+\mu^2 q^{(2)}(\tau)+\ldots$$

$$P_s^0=\mathrm{const}, \quad q^{(0)}=-\sum_{j=1}^{k}\frac{S_j}{\lambda^2-1}\sin(\tau+\beta_j^*+\alpha_k^0)P_j^0$$

Из условий периодичности $p_s^{(1)}(\tau)$ получается k линейных однородных алгебраических уравнений относительно P_j^0 $(j=1,\ldots,k)$

$$\sum_{j=1}^{k}[S_j\cos(\beta_s^*-\beta_j^*)-\gamma^{(1)}\delta_{sj}2\varkappa_s(\lambda^2-1)S_s^{-1}]P_j^0=0 \quad (s=1,\ldots,k)$$

где δ_{sj} — символ Кронекера, $\beta_k^*=0$.

Условие нетривиальности решений этой однородной системы приводит к алгебраическому уравнению k-й степени для определения $\gamma^{(1)}$:

$$|S_j\cos(\beta_s^*-\beta_j^*)-\gamma^{(1)}\delta_{sj}2\varkappa_s(\lambda^2-1)S_s^{-1}|=0 \tag{4.4}$$

Нетрудно показать, что уравнение (4.4) имеет нулевой корень кратности $k-2$ и два ненулевых корня, вещественная часть которых отрицательна, если только

$$\lambda^2-1<0 \tag{4.5}$$

Неравенство (4.5) представляет собой необходимое условие устойчивости рассматриваемых синхронных движений, вытекающее также и из интегрального признака устойчивости [1].

Пусть неравенство (4.5) выполняется. Тогда для получения достаточных условий устойчивости следует найти коэффициенты в разложении (4.3), отвечающие корню $\gamma^{(1)}=0$ уравнения (4.4). В силу автономности исходной системы одна из величин $\gamma^{(2)}$ равна нулю. Для определения остальных значений $\gamma^{(2)}$ запишем условия периодичности функций $p_s^{(2)}(\tau)$:

$$\sum_{j=1}^{k-1} S_j \cos(\beta_s^* - \beta_j^*) h_j^{(1)} = \sum_{j=1}^{k-1} S_j \sin(\beta_j^* - \beta_s^*)(h_j^{(0)} - h_s^{(0)})\beta_j^{(1)} +$$

$$+\gamma^{(2)} 2\varkappa_s(\lambda^2-1) S_s^{-1}\left[-\left(\sum_{i=1}^{k}\varkappa_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^{k-1}\varkappa_i h_i^{(0)} + h_s^{(0)}\right] \quad (s=1,\ldots,k-1)$$

$$h_j^{(0)} = P_j^{(0)} - P_k^{(0)} \ (j=1,\ldots,k-1), \ h_j^{(1)} = P_j^{(1)} - P_k^{(1)} \ (j=1,\ldots,k-1)$$

$$P_j^{(1)} = \langle p_j^{(1)}(\tau)\rangle \ (j=1,\ldots,k) \tag{4.6}$$

Сравнивая соотношения (4.6) и (3.9), можно получить систему $k-1$ линейных однородных алгебраических уравнений относительно $h_j^{(0)}$ $(j=1,\ldots,k-1)$:

$$Q_s \equiv \sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{\partial F_s}{\partial \beta_j^{0}} + \gamma^{(2)}\frac{\partial F_s}{\partial \Delta_j}\right)_{\beta_i^0=\beta_i^*} h_j^{(0)} = 0 \quad (s=1,\ldots,k-1) \tag{4.7}$$

где функции $F_s(\beta_1^0,\ldots,\beta_{k-1}^0)$ определены выражениями (3.8), (3.10), (3.12) и (3.14).

Уравнения (4.7) будут иметь нетривиальное решение, если

$$\left|\partial F_s/\partial\beta_j^0 + \gamma^{(2)}\partial F_s/\partial\Delta_j\right|_{\beta_i^0=\beta_i^*} = 0 \tag{4.8}$$

Пусть $\gamma^{(2)} = \gamma_*^{(2)}$ — простой корень уравнения (4.8). Тогда одна из величин $h_j^{(0)}$, например, $h_{k-1}^{(0)}$, выбирается произвольным образом (в частности, можно положить $h_{k-1}^{(0)}=1$), а остальные неизвестные $h_1^{(0)},\ldots,h_{k-2}^{(0)}$ однозначно определятся с помощью системы (4.7): $h_j^{(0)}=h_j^*$ $(j=1,\ldots,k-2)$, $h_{k-1}^{(0)}=h_{k-1}^*=1$; при этом

$$\left|\frac{\partial(Q_1,\ldots,Q_{k-1})}{\partial(h_1^{(0)},\ldots,h_{k-2}^{(0)},\gamma^{(2)})}\right|_{h_i^{(0)}=h_i^*,\ \gamma^{(2)}=\gamma_*^{(2)}} \neq 0 \tag{4.9}$$

Если теперь допустить, что найдены соответствующие $\gamma_*^{(2)}$ значения $\gamma^{(3)},\ldots,\gamma^{(n+1)}$, а также постоянные $h_j^{(m)}$ $(m=1,\ldots,n-1)$, то, согласно условиям периодичности функций $p_s^{(n+2)}(\tau)$ неизвестные $h_j^{(n)}$ $(j=1,\ldots,k-2)$ и $\gamma^{(n+2)}$ будут удовлетворять $k-1$ линейным алгебраическим уравнениям с известной правой частью:

$$\sum_{j=1}^{k-2}\frac{\partial Q_s}{\partial h_j^{(0)}}\Bigg|_{\substack{h_i^{(0)}=h_i^*\\ \gamma^{(2)}=\gamma_*^{(2)}}} h_j^{(n)} + \frac{\partial Q_s}{\partial\gamma^{(2)}}\Bigg|_{\substack{h_i^{(0)}=h_i^*\\ \gamma^{(2)}=\gamma_*^{(2)}}}\gamma^{(n+2)} = G_s^{(n)} \quad (s=1,\ldots,k-1) \tag{4.10}$$

$$h_j^{(m)} = P_j^{(m)} - P_k^{(m)}, \quad P_j^{(m)} = \langle p_j^{(m)}(\tau)\rangle \quad (m=1,\ldots,n)$$

Здесь $h_{k-1}^{(m)}$ принимаются равными нулю.

В соответствии с (4.9) определитель системы (4.10) отличен от нуля, что позволяет однозначно определить $h_j^{(n)}$ $(j=1,\ldots,k-2)$ и $\gamma^{(n+2)}$. Таким образом, применяемый метод дает возможность получить $k-1$ характеристических показателей, отвечающих $\gamma_j^{(0)}=0$, если только все корни уравнения (4.8) являются простыми.

Дополнительное условие устойчивости, вытекающее из требования отрицательности вещественных частей коэффициентов $\gamma^{(1)}$ в разложении (4.3), отвечающих показателям (4.2), имеет вид

$$\eta + \frac{\lambda^4}{2(\lambda^2-1)}\sum_{s=1}^{k}\frac{S_s\varkappa_s[\varkappa_s^2+I_s^2(3+\lambda^2)]}{[I_s^2(-\lambda^2+1)+\varkappa_s^2]^2+4I_s^2\varkappa_s^2\lambda^2} > 0 \tag{4.11}$$

Значения величин $\beta_1^*, \ldots, \beta_{k-1}^*$ не влияют на выполнение неравенств (4.5) и (4.11); если параметры исходной системы таковы, что эти неравенства удовлетворяются, то исследование устойчивости рассматриваемых синхронных решений сводится к отысканию корней уравнения (4.8).

Итак, справедливо утверждение.

Утверждение. Для того, чтобы синхронное движение исходной системы, отвечающее определенному решению $\beta_1^0=\beta_1^*, \ldots, \beta_{k-1}^0=\beta_{k-1}^*$ $(k\geqslant 4)$ системы (3.13), являлось орбитально асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы вещественные части всех корней алгебраического уравнения $(k-3)$-й степени (4.8) были отрицательны при условии, что это уравнение не имеет кратных корней и выполнены неравенства (4.5) и (4.11).

5. Пример. В случае четырех вибровозбудителей, из которых три одинаковы ($S_1=S_2=S_3=1$, $\varkappa_1=\varkappa_2=\varkappa_3$, $I_1=I_2=I_3$, $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3$), согласно (3.8) и (3.10):

$$B_1=2(\lambda^2-1)[-\varkappa_1(\Delta_1-\omega^{(2)})+1/2g_1{}^2\varkappa_1(I_1{}^2+\varkappa_1{}^2)^{-1}],\ B_2=B_3=B_1 \tag{5.1}$$

$$\omega^{(2)}=(3\varkappa_1+\varkappa_4)^{-1}\{3[\varkappa_1\Delta_1-1/2g_1{}^2\varkappa_1(I_1{}^2+\varkappa_1{}^2)^{-1}]+ +\varkappa_4\Delta_4-1/2g_1{}^2\varkappa_4(I_4{}^2+\varkappa_4{}^2)^{-1}\}$$

Далее предполагается, что $B_1\neq 0$. Система (3.13) при выполнении соотношения $1<S_4<3$ допускает решения $\beta_1^0=\beta_1^*$, $\beta_2^0=\beta_2^*$, $\beta_3^0=\beta_3^*$, причем

$$\cos\beta_1^*=-(3+S_4{}^2)/(4S_4),\ \beta_2^*=\beta_1^*,\ \cos\beta_3^*=(3-S_4{}^2)/(2S_4),\ \sin\beta_1^*\sin\beta_3^*<0 \tag{5.2}$$

либо

$$\cos\beta_1^*=-(3+S_4{}^2)/(4S_4),\ \cos\beta_2^*=(3-S_4{}^2)/(2S_4),\ \beta_3^*=\beta_1^*,\ \sin\beta_1^*\sin\beta_2^*<0 \tag{5.3}$$

Для решений типа (5.2) и (5.3) выполнено условие (3.11) $\sin(\beta_2^0-\beta_3^0)\neq 0$. Следует, однако, отметить, что условие (3.11) не является обязательным. Вместо него может быть принято, например, условие $\sin(\beta_1^0-\beta_2^0)\neq 0$, что позволяет записать уравнения для определения параметров β_1^0, β_2^0, β_3^0 в отличном от (3.13) виде и найти решения, для которых $\sin(\beta_2^0-\beta_3^0)=0$:

$$\cos\beta_1^*=(3-S_4{}^2)/(2S_4),\ \cos\beta_2^*=-(3+S_4{}^2)/(4S_4),\ \beta_3^*=\beta_2^* \tag{5.4}$$
$$\sin\beta_1^*\sin\beta_2^*<0,\ 1<S_4<3$$

Пусть выполнены неравенства (4.5) и (4.11). Тогда условия устойчивости решений (5.2)–(5.4) зависят от знака выражения B_1. А именно, устойчивыми будут те из решений (5.2) и (5.3), для которых $\sin\beta_1^*>0$ при $B_1>0$ и $\sin\beta_1^*<0$ при $B_1<0$; устойчивому решению типа (5.4) отвечает $\sin\beta_1^*<0$ при $B_1>0$ и $\sin\beta_1^*>0$ при $B_1<0$.

Автор благодарит И. И. Блехмана за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блехман И. И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
2. *Блехман И. И., Лавров Б. П.* Об одном интегральном признаке устойчивости движения // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 938–941.
3. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
4. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 21.07.1988