

УДК 534.014
© 1990 г.

М. М. ВЕТЮКОВ, С. В. ДОБРОСЛАВСКИЙ, Р. Ф. НАГАЕВ
АВТОКОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ
СУХОГО ТРЕНИЯ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

Рассматриваются фрикционные автоколебания одномассовой системы (фиг. 1). Предполагается, что коэффициент трения скольжения тела о движущуюся со скоростью V ленту постоянен. В то же время коэффициент трения относительного покоя f является, согласно гипотезе [1, 2], монотонно возрастающей функцией времени длительности контакта (фиг. 2). Получена нелинейная функция последования, характеризующая в общем виде класс движений с интервалами длительного контакта тела с лентой. Построены периодические колебания, отличающиеся тем, что внутри одного периода происходит несколько мгновенных перемен знака относительной скорости. Определены условия возбуждения установившихся колебаний стохастического типа. Ранее частная задача этого типа с кусочно-линейной характеристикой в более узком диапазоне изменения параметров системы была рассмотрена в [3].

1. Анализ проскальзывания после интервалов длительного застоя. Пусть продолжительность k -го интервала длительного контакта равна t_k ($k = \dots, -1, 0, 1, \dots$). Сила сухого трения внутри этого интервала равна

$$F = cx, \quad |F| \leq f(t_k)P, \quad \dot{x} = V \quad (1.1)$$

где абсолютная координата тела x совпадает с деформацией пружины, а P — вес тела. На этапах проскальзывания вместо (1.1) следует писать дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} + cx = -f_*P \operatorname{sign}(\dot{x} - V), \quad \dot{x} \neq V \quad (1.2)$$

Пусть проскальзывание началось в момент $t=0$, когда согласно (1.1):

$$x = f(t_k)P/c, \quad \dot{x} = V \quad (1.3)$$

При $t > 0$ и вплоть до ближайшей относительной остановки скорость проскальзывания отрицательна ($\dot{x} < V$). Введем безразмерные величины

$$\tau = (c/m)^{1/2}t, \quad \xi = (cx)/(f_*P), \quad \theta = (mc)^{1/2}V/(f_*P) \quad (1.4)$$

$$\tau_k = (c/m)^{1/2}t_k, \quad \varepsilon_k = \varepsilon(\tau_k), \quad \varepsilon(\tau) = (f(\tau) - f_*)/f_*$$

Зависимость $\varepsilon(\tau)$ представлена на фиг. 3, где предельное значение $\varepsilon_* = (f^* - f_*)/f_* > 0$. В безразмерных переменных задача (1.1), (1.2) примет вид (штрихом обозначена производная по τ):

$$\begin{aligned} \xi' &= \theta, \quad |\xi| \leq 1 + \varepsilon_k \\ \xi' &\neq \theta, \quad \xi'' + \xi + \operatorname{sign}(\xi' - \theta) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

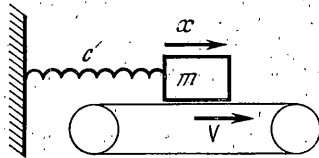
Пусть при $0 < \tau < \tau^{(1)}$, $\xi' < \theta$. Согласно (1.5) в силу начальных условий $\tau=0$, $\xi=1+\varepsilon_k$, $\xi'=0$ получим

$$\xi = 1 + \theta \sin \tau + \varepsilon_k \cos \tau \quad (1.6)$$

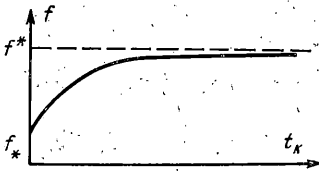
Поскольку при $\tau = \tau^{(1)}$ впервые $\xi' = \theta$, из (1.6) получим

$$\xi|_{\tau=\tau^{(1)}} = \xi^{(1)} = 1 - \varepsilon_k, \quad \tau^{(1)} = 2(\pi - \operatorname{arctg}(\varepsilon_k/\theta)) \quad (1.7)$$

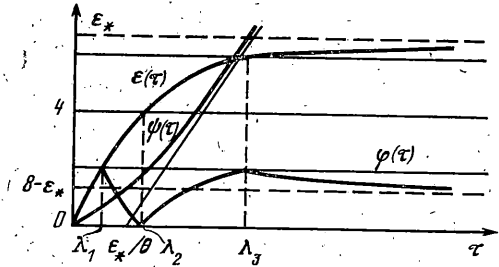
Мгновенная переменная знака относительной скорости проскальзывания в момент $\tau^{(1)}$ произойдет, если $\xi''|_{\tau=\tau^{(1)+0}} > 0$, $\xi'|_{\tau=\tau^{(1)+0}} > \theta$. Отсюда при учете



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

(1.5) и (1.7) получим $\varepsilon_k > 2$. Допустим, что это неравенство имеет место. В последующем интервале $\tau^{(1)} < \tau < \tau^{(1)} + \tau^{(2)}$, $\xi' > \theta$ и непосредственное интегрирование при учете (1.7) дает

$$\xi = -1 + \theta \sin(\tau - \tau^{(1)}) + (2 - \varepsilon_k) \cos(\tau - \tau^{(1)}) \quad (1.8)$$

Из (1.8) при $\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)}$, когда $\xi' = \theta$, найдем

$$\xi|_{\tau=\tau^{(1)}+\tau^{(2)}} = \xi^{(2)} = \varepsilon_k - 3, \quad \tau^{(2)} = 2 \operatorname{arctg}((\varepsilon_k - 2)/\theta) \quad (1.9)$$

причем наличие мгновенной перемены знака относительной скорости в этот момент ($\xi''|_{\tau^{(1)}+\tau^{(2)}} < 0$, $\xi'|_{\tau^{(1)}+\tau^{(2)}} < \theta$) гарантируется, если $\varepsilon_k > 4$.

Последующий анализ интервалов проскальзывания после мгновенных остановок проводится по аналогичной схеме и приводит к следующим формулам для продолжительности i -го этапа и значения координаты ξ в его конце

$$\xi^{(i)} = (-1)^i (\varepsilon_k - 2i + 1), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\tau^{(i)} = \begin{cases} 2(\pi - \operatorname{arctg}((\varepsilon_k - 2(i-1))/\theta)), & i = 2n + 1 \\ 2 \operatorname{arctg}((\varepsilon_k - 2(i-1))/\theta), & i = 2n \end{cases} \quad (1.10)$$

При этом оказывается, что i -й этап проскальзывания существует, если $\varepsilon_k > 2(i-1)$.

2. Исследование функции последования. Предположим, что $2(j-1) < \varepsilon_k < 2j$, где $j = 1, 2, \dots$. Тогда после j этапов проскальзывания в момент $\tau = T_j = \sum \tau^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, j$) неизбежно начало этапа длительного контакта тела с лентой. Изменение деформации пружины на этом этапе в силу (1.5) отвечает следующему линейному закону

$$\xi = \xi^{(j)} + \theta(\tau - T_j) \quad (2.1)$$

Этап завершится в момент $\tau = T_j + \tau_{k+1}$, когда $\xi = 1 + \varepsilon_{k+1}$. Подстановка этих значений в (2.1) сразу же приводит к следующему неявному соотношению, связывающему продолжительности двух последовательных интервалов длительного контакта

$$\psi(\tau_{k+1}) = \varphi(\tau_k) \quad (2.2)$$

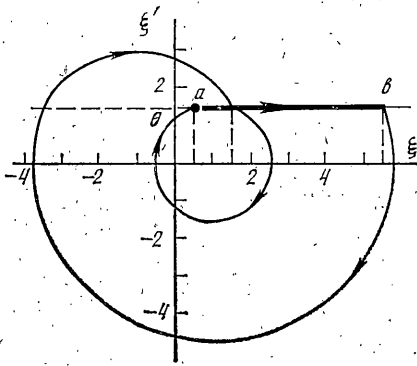
$$\varphi(\tau) = 1 - (-1)^j [\varepsilon(\tau) - 2j + 1], \quad 2(j-1) < \varepsilon(\tau) < 2j, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\psi(\tau) = \theta\tau - \varepsilon(\tau) \quad (2.3)$$

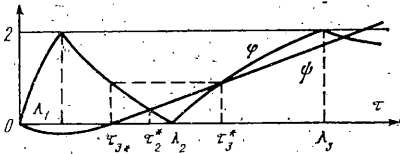
Качественный анализ зависимости φ и ψ от τ приведен на фиг. 3. Существенно, что функция $\varphi(\tau)$ непрерывна, а ее производная претерпевает разрыв в точках $\tau = \lambda_1, \lambda_2, \dots$, определяемых из уравнения

$$\varepsilon(\lambda_i) = 2i \quad (2.4)$$

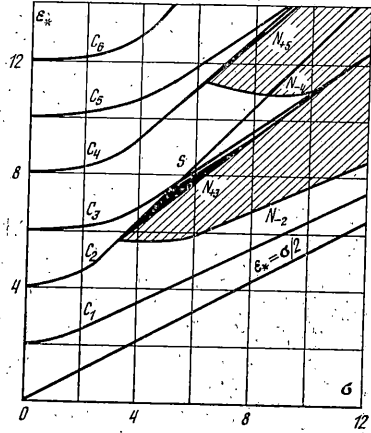
График $\varphi(\tau)$ можно построить также посредством надлежащего отображения графика $\varepsilon(\tau)$ относительно прямой $\varepsilon = 2$. В силу этого, в частности, всегда $0 < \varphi(\tau) < 2$.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Функция последования (2.2) задает точечное отображение прямой в прямую. Неподвижной точке отображения, определяемой из уравнения

$$\psi(\tau_j^*) = \varphi(\tau_j^*), \quad \lambda_{j-1} < \tau_j^* < \lambda_j, \quad j=1, 2, \dots \quad (2.5)$$

соответствует $j/2$ -оборотный периодический режим фрикционных автоколебаний. Фазовый портрет $3/2$ -оборотного режима ($j=3$) на плоскости (ξ, ξ') приведен на фиг. 4. Отметим, что в рассматриваемом движении фазовая траектория пересекает площадку длительного контакта ab , претерпевая при этом излом.

Период выделенного $1/2j$ -оборотного режима в соответствии с вышесказанным определяется по формуле $T = T_j + \tau_j^*$, причем интервалы безостановочного проскальзывания $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(j)}$, также как и значения координаты ξ в моменты мгновенных остановок $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(j)}$, определяются по формулам (1.10) при $\tau_k = \tau_j^*$. Существенно, что движение в интервалах между зонами длительного контакта носит характер затухающих колебаний. Размах первого колебания после длительной остановки, а также продолжительность этой остановки тем больше, чем больше j .

Для дальнейшего важно, что при $j=2, 4, 6, \dots$ (на убывающих участках функции $\varphi(\tau)$) уравнение (2.5) допускает единственное решение

$$\tau_j^* = 2j/\theta, \quad \lambda_{j-1} < (2j/\theta) < \lambda_j \quad (2.6)$$

Устойчивость исследуемого $1/2j$ -оборотного режима в малом проверяется непосредственным варьированием уравнения (2.2) вблизи неподвижной точки $\tau_k = \tau_j^*$. В результате приходим к следующему выражению для характеристического числа

$$h = \varphi'(\tau_j^*) / \psi'(\tau_j^*) = -(-1)^j \varepsilon'(\tau_j^*) / (\theta - \varepsilon'(\tau_j^*)) \quad (2.7)$$

Для устойчивости достаточно, чтобы $-1 < h < 1$. При $j=3, 5, 7, \dots$ возможен выход на аperiodическую границу (N_+) ; области существования $1/2j$ -оборотного режима ($h=1$):

$$\theta = 2\varepsilon'(\tau_j^*) \quad (2.8)$$

На границе (2.8) происходит слияние устойчивого и неустойчивого решений (2.5), причем при больших значениях θ эти решения не существуют. С другой стороны существенна субпериодическая граница $(N_-)_j$, для которой $h=-1$. Уравнение границы $(N_-)_j$ при $j=2, 4, 6, \dots$, когда $(2j/\lambda_j) < \theta < (2j/\lambda_{j-1})$, имеет вид

$$\theta = 2\varepsilon'(2j/\theta) \quad (2.9)$$

Область плоскости параметров (θ, ε_*) , примыкающая к этой границе и отвечающая меньшим значениям θ , соответствует неустойчивости ($h < -1$), если на границе выполняется неравенство

$$\theta^2/(4j) + \varepsilon''(2j/\theta) > 0, \quad j=2, 4, 6, \dots, \quad \partial h/\partial \theta > 0 \quad (2.10)$$

В противном случае неустойчивости отвечают значения θ , большие критического.

Вблизи границы (N_-) , существует режим с двумя различными интервалами длительного контакта внутри периода

$$\tau_k = 2j/\theta + \gamma(-1)^k \quad (j=2, 4, 6, \dots) \quad (2.11)$$

где постоянная γ определяется из уравнения

$$\varepsilon(2j/\theta + \gamma) - \varepsilon(2j/\theta - \gamma) = \theta\gamma \quad (2.12)$$

Если третья производная $\varepsilon'''(2j/\theta)$ отрицательная, то этот режим существует за границей (N_-) , в области неустойчивости основного $1/2j$ -оборотного режима. Наоборот, при $\varepsilon'''(2j/\theta) > 0$ выделенный режим существует внутри области устойчивости основного. Подобная ситуация имеет место для принятой ниже экспоненциальной характеристики (см. (3.1)), причем решение (2.11) в этом случае неустойчиво. Таким образом, переход через границу (N_-) , здесь не влечет за собой удвоение периода. Соответствующие области, как показывает непосредственная проверка, соответствуют движениям стохастического типа. В частном случае кусочно-линейной характеристики [3] это прямо вытекает из критерия, приведенного в [4].

При построении областей существования и устойчивости $1/2j$ -оборотных режимов ($j=1, 2, 3, \dots$) на плоскости (θ, ε_*) следует иметь в виду так называемые C -границы, на которых корень уравнения (2.5) совпадает с угловой точкой характеристики $\varphi(\tau)$: $\tau_j^* = \lambda_{j-1}, \lambda_j$. Вследствие (2.6) уравнение C -границы записывается в следующем разрешенном относительно параметра θ виде

$$\theta = [2j+1 - (-1)^j]/\lambda_j \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (2.13)$$

Непосредственное сравнение выражений (2.8), (2.9) и (2.13) показывает, что границы $(N_-)_j$, $(N_+)_{j+1}$ и C_j при $j=2, 4, 6, \dots$ пересекаются на плоскости (θ, ε_*) в одной точке, определяемой из уравнений

$$2j/\lambda_j = 2\varepsilon'(\lambda_j) = \theta \quad (2.14)$$

При $j=3, 5, 7, \dots$ границы $(N_+)_{j-1}$, $(N_-)_{j+1}$ и C_j также пересекаются в точке, для которой

$$2(j+1)/\lambda_j = 2\varepsilon'(\lambda_j) = \theta \quad (2.15)$$

Существенен также еще один тип границ, которые имеют ярко выраженный нелокальный смысл. В наиболее простом случае выход на такую границу характеризуется наличием трех неподвижных точек τ_2^* , τ_3^* , τ_4^* , причем первые две являются неустойчивыми, а последняя может также принадлежать интервалу (λ_2, λ_3) . При этом нуль функции $\psi - \tau_{3*}$ придает функции то же значение, что и промежуточная неподвижная точка (фиг. 5). В силу этого для рассматриваемой границы имеем

$$\psi(\tau_3^*) = \varphi(\tau_3^*) = \varphi(\tau_{3*}), \quad \psi(\tau_{3*}) = 0 \quad (2.16)$$

Граница (2.16) определяет на плоскости (θ, ε_*) некоторую кривую, которая примыкает к границам C_2 ($\tau_3^* = \tau_{3*} = \lambda_2$) и $(N_+)_3$. Если θ несколько меньше критического, то кривая ψ проходит несколько ниже изображенной на фиг. 5. При этом вблизи точки τ_2^* реализуется стохастическое движение («странный» аттрактор), для которого интервалы контакта τ_k всегда принадлежат интервалу (τ_{3*}, τ_3^*) . Наоборот, при больших θ значения τ_k всегда, рано или поздно, перейдут в область, для которой $\varphi(\tau_k) > \varphi(\tau_3^*)$. Следовательно здесь при $k \rightarrow \infty$ реализуется двухоборотный (или $3/2$ -оборотный) периодический режим, которому отвечает неподвижная точ-

ка τ_1^* (для экспоненциальной характеристики (3.1) эта пограничная точка всегда устойчива). Вследствие вышесказанного выделенную границу будем далее называть границей стохастичности или S -границей.

Среди выделенных периодических режимов простейшим является полуоборотный режим, который характеризуется отсутствием мгновенных относительных остановок в интервалах между зонами длительного контакта ($\xi' < \theta$, $j=1$). Безразмерный период такого движения равен

$$T = \tau^{(1)} + \tau_1^* = 2[\pi - \arctg(\varepsilon(\tau_1^*)/\theta)] + \tau_1^* \quad (2.17)$$

Этот режим всегда устойчив и существует в диапазоне $2\varepsilon'(0) > \theta$, $\theta > 4/\lambda_1$. При нескольких больших скоростях ленты, когда $\theta > 2\varepsilon'(0)$, уравнение (2.5) допускает только нулевое решение $\tau_0^* = 0$ ($j=0$). Этому решению соответствуют орбитально устойчивые чисто гармонические колебания тела без зон длительного контакта с лентой $\xi = 1 + \theta \sin \tau$.

3. Случай экспоненциальной характеристики трения покоя. Ниже ограничимся рассмотрением характеристики трения экспоненциального типа [1, 2]:

$$f = f_* - (f^* - f_*) \exp(-\delta t) \quad (3.1)$$

где δ — положительная постоянная. В данном случае в качестве безразмерных интервалов длительного контакта удобнее принять величины $\eta_k = \delta t_k$ ($k = \dots, -1, 0, 1, \dots$). При этом вместо (2.2) и (2.3) получим

$$\Psi(\eta_{k+1}) = \Phi(\eta_k), \quad \Psi(\eta) = \sigma\eta - \varepsilon(\eta) \quad (3.2)$$

где функция $\Phi(\eta)$ по-прежнему определяется согласно (2.3), а новый параметр скорости ленты $\sigma = cV/(f_*P\delta)$. Дальнейший анализ проводится в соответствии с вышеописанной общей схемой, если всегда осуществлять замену $\tau \rightarrow \eta$, $\theta \rightarrow \sigma$ и, кроме того, согласно (3.1) предположить

$$\varepsilon(\eta) = \varepsilon_* [1 - \exp(-\eta)] \quad (3.3)$$

Сказанное выше означает, что в задаче с экспоненциальной характеристикой трения имеют место только два определяющих критерия подобия ε_* и σ , не зависящие от массы тела m . В связи с этим от массы тела не зависит структура разбиения плоскости (ε_* , σ) на области, отвечающие стационарным движениям различных типов. В то же время величины количественных характеристик движения, таких, например, как период или амплитуда, будут также зависеть от третьего безразмерного параметра, равного $(c/m)^{1/2}/\delta$.

Вследствие (3.3) непосредственно из уравнения (2.4) получим

$$\lambda_i = \ln(\varepsilon_*/(\varepsilon_* - 2i)) \quad (i=1, 2, \dots, [1/2\varepsilon_*]) \quad (3.4)$$

где квадратные скобки означают целую часть числа. Чисто гармонические колебания без длительного контакта существуют при $\sigma > 2\varepsilon_*$. Фрикционные автоколебания без мгновенных относительных остановок тела между интервалами длительного контакта (полуоборотный режим) существуют и устойчивы в полосе

$$2\varepsilon_* > \sigma > 4 \ln^{-1}(\varepsilon_*/(\varepsilon_* - 2)) \quad (3.5)$$

Приведем теперь уравнения границ $(N_+)_j$, $(N_-)_j$ и C_j , прямо вытекающие из (2.8), (2.9) и (2.13):

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_*/\sigma - \ln(2\varepsilon_*/\sigma) &= 1 + 2(j-1)/\sigma, \quad j=3, 5, 7, \dots; (N_+)_j \\ \ln(2\varepsilon_*/\sigma) &= 2j/\sigma, \quad j=2, 4, 6, \dots; (N_-)_j \\ \sigma &= [2j+1 - (-1)^j] \ln^{-1}(\varepsilon_*/(\varepsilon_* - 2j)), \quad j=1, 2, 3, \dots; C_j \end{aligned} \quad (3.6)$$

Точки пересечения границ $(N_-)_j$, $(N_+)_{j+1}$ и C_j при $j=2, 4, 6, \dots$, а также границ $(N_+)_j$, $(N_-)_{j+1}$ и C_j при $j=3, 5, 7, \dots$ определяются в силу (2.14), (2.15) соответственно из уравнений

$$\begin{aligned} \sigma \ln((\sigma+4j)/\sigma) &= 2j+1 - (-1)^j \\ \varepsilon_* &= 1/2\sigma+2j, \quad j=2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отметим, наконец, что неравенство (2.10), свидетельствующее о возможности стохастических движений при значениях σ , меньших граничного (при $h=-1$) в рассматриваемом случае имеет вид $\sigma > 2j$, $j=2, 4, 6, \dots$

Уравнение S -границы (см. (2.14)) здесь удобно записать в виде неявной зависимости между η_{3*} и η_{3*} :

$$2\eta_{3*}/\eta_{3*}+1=3(1-\exp(-\eta_{3*}))/ (1-\exp(-\eta_{3*})); \quad \sigma=12/(\eta_{3*}+2\eta_{3*})$$

$$\varepsilon_*=8/(2-\exp(-\eta_{3*})-\exp(-\eta_{3*})) \quad (3.8)$$

Согласно (3.8) начальная точка S -границы, принадлежащая границе C_2 , отвечает значению $\varepsilon_*=7,50$.

На фиг. 6 на плоскости (ε_*, σ) построены все приведенные выше границы. Чисто гармонические колебания реализуются в области, расположенной между прямыми $\varepsilon_*=0$ и $\varepsilon_*= \sigma/2$. Область простейшего полуоборотного режима расположена между прямой $\varepsilon_*= \sigma/2$ и C_1 -границей. Устойчивые $1/2j$ -оборотные режимы существуют при $j=2, 4, 6, \dots$ в областях, расположенных между прямой $\sigma=0$ и границами C_{j-1} , C_j и $(N_-)_j$, а при $j=3, 5, 7, \dots$ — между прямой $\sigma=0$ и границами C_{j-1} и C_j . Из областей этого типа только область однооборотного режима (с одной мгновенной остановкой, $j=2$) существует при сколь угодно больших значениях σ .

При переходе через границу $(N_-)_j$ в сторону увеличения ε_* ($j=2, 4, 6, \dots$) рождается стохастическое движение, для которого математическое ожидание числа мгновенных остановок в интервалах между зонами длительного контакта равно $j-1$ ($j/2$ -оборотный стохастический режим). Однооборотный стохастический режим существует в области между границами типа $(N_-)_2$, C_2 , S (N_+) $_3$ и C_3 . В треугольной области между границами $(N_+)_3$, C_2 и S (на фиг. 6 она закрашена в черный цвет) этот режим существует наряду с $3/2$ -оборотным периодическим режимом. Пересечение границы $(N_+)_3$ в сторону увеличения ε_* при больших значениях σ означает подавление однооборотного стохастического режима $3/2$ -оборотным периодическим. Еще выше за точкой пересечения границ $(N_+)_3$, C_3 и $(N_-)_4$ вдоль границы C_3 смыкаются области существования одно и двухоборотных стохастических режимов. Область, внутри которой существуют только стохастические фрикционные автоколебания того или иного типа на фиг. 6 заштрихована.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А. Ю., Крагельский И. В. О скачках при трении // Ж. техн. физики. 1944. Т. 14. Вып. 4/5. С. 276-282.
2. Костерин Ю. И. Механические автоколебания при сухом трении / М.: Изд-во АН СССР. 1960. 76 с.
3. Каценевский Л. Я. Стохастические автоколебания при сухом трении // Инж.-физ. ж. 1984. Т. 47. № 1. С. 143-147.
4. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
4.02.1987