МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1990

УДК 539.374

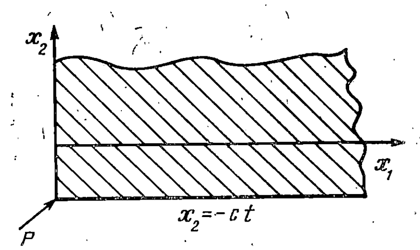
Г. И. БЫКОВЦЕВ, А. С. ЛУКАНОВ

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КЛИНА В ПРОЦЕССЕ НАРАЩИВАНИЯ

Рассматривается плоская задача об одностороннем наращивании прямоугольного упругого клина. Задача решается в приращениях. На поверхности роста задается краевое условие, учитывающее изотропный характер процесса наращивания. Относительно скоростей напряжений и деформаций полученная проблема сводится к задаче о напряженно-деформированном состоянии бесконечного клина, нагруженного в вершине сосредоточенной силой. Интегрирование по времени позволяет найти напряженное состояние как в наращиваемой части, так и в основном клине.

1. Решение задачи о деформировании клина в процессе наращивания является одной из первых попыток дать аналитическое решение упрощенной модели процесса наращивания. Подобные задачи наращивания возникли с появлением новых технологических процессов для получения конструкционных материалов с заданными свойствами. К таким процессам, например, относится процесс изготовления специальных пленок методом напыления.

Основная качественная особенность постановки краевых задач наращивания заключается в наличии части внешней поверхности, на которой осуществляется наращивание, т. е. присоединение новых частиц материала. При этом, условия на наращиваемой поверхности отличаются от краевых условий на неподвижной граничной поверхности, что впервые отмечено в [1]. На границе растущего тела должны быть заданы все компоненты тензора напряжений σ_{ij}^0 [1–6], на которые наложены три дополнительных условия $\sigma_{ij}n_j=p_i$, отражающие наличие заданного силового воздействия на наращиваемой поверхности.



Один из способов построения краевой задачи с изменяющейся границей и векторным условием на ней состоит в переходе в уравнениях механики сплошной среды и в граничных условиях к скоростям (частным производным по времени) $\sigma_{ij}^{\cdot}$, $e_{ij}^{\cdot}$, $u_i^{\cdot}$ [1, 3–5].

Рассмотрим задачу о бесконечном клине, одна из граней которого наращивается (напыляется) с постоянной скоростью. Предполагается, что процесс наращивания изотропный, а наращиваемая поверхность свободна от механических нагрузок.

Как показано в [3] на этой поверхности, описываемой уравнением $x_2=-ct$ (Фигура), имеет место краевое условие

$$\sigma_{ij}^0=(\delta_{ij}-n_in_j)f \qquad (1.1)$$

где f — постоянная величина, определяющая физический (технологический) процесс наращивания.

Для простоты положим, что наращиваемый слой $x_1>0$, $-ct\leqslant x_2<0$ является упругим и его свойства совпадают с упругими свойствами клина. Тогда скорости напряжений деформаций и перемещений должны удовлетворять уравнениям теории упругости в приращениях

$$
\begin{gathered}
\partial\sigma_{11}^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial x_1+\partial\sigma_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial x_2=0, \quad \partial\sigma_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial x_1+\partial\sigma_{22}^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial x_2=0 \\
e_{11}^{\boldsymbol{\cdot}}=(\sigma_{11}^{\boldsymbol{\cdot}}-\nu\sigma_{22}^{\boldsymbol{\cdot}})/E, \quad e_{22}^{\boldsymbol{\cdot}}=(\sigma_{22}^{\boldsymbol{\cdot}}-\nu\sigma_{11}^{\boldsymbol{\cdot}})/E \\
e_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}=(1+\nu)\sigma_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}/E \\
e_{11}^{\boldsymbol{\cdot}}=\partial u_1^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial x_1, \; e_{22}^{\boldsymbol{\cdot}}=\partial u_2^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial x_2, \; e_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}={}^1/_2(\partial u_1^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial x_2+\partial u_2^{\boldsymbol{\cdot}}/\partial x_1)
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

Как показано в [1, 3], на наращиваемой поверхности для $\sigma_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}$ должны выполняться краевые условия

$$
\sigma_{ij,j}(x_i,\tau^*)c-\sigma_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}(x_i,\tau^*)n_j=0 \tag{1.3}
$$

где $t=\tau^*(x_i)$ — уравнение наращиваемой поверхности.

Пусть слой наращивается на прямоугольный клин, который в момент времени $t=0$ занимает область $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$. Процесс наращивания идет с постоянной скоростью c, так что уравнение наращиваемой поверхности имеет вид: $x_1>0$, $x_2=-ct$. Боковая грань клина $x_1>0$, $x_2>-ct$ свободна от напряжений. Тогда для уравнений (1.2) имеем краевые условия

$$
\sigma_{11}^{\boldsymbol{\cdot}}=0,\; \sigma_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}=0 \quad (x_1=0,\; x_2>-ct) \tag{1.4}
$$

Из соотношений (1.1) и (1.3) получаем

$$
\sigma_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}=0,\; \sigma_{22}^{\boldsymbol{\cdot}}=0 \quad (x_1>0,\; x_2=-ct) \tag{1.5}
$$

2. Точка $x_1=0$, $x_2=-ct$ особая, и при $r=[x_1^2+(x_2-ct)^2]^{1/2}\to 0$ скорости напряжений неограниченно возрастают. Анализ упругих решений с различными особенностями порядка r^α исследовались в [7]. Анализ этих решений показал, что краевые условия для напряжений при $x_1=0$ могут выполняться только при $\alpha=1$.

Введем подвижную систему координат $x=x_1$, $y=x_2+ct$ тогда, краевая задача (1.2)—(1.5) сводится для определения $\sigma_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}$, $u_i^{\boldsymbol{\cdot}}$ к решению уравнений теории упругости, сформулированных в приращениях для прямоугольного клина $x>0$, $y>0$, нагруженного в вершине «сосредоточенной силой», имеющей проекции на оси координат P_1 и P_2. Это решение в приращениях имеет вид [8]:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11}^{\boldsymbol{\cdot}}(x,y)=(x^2+y^2)^{-2}(P_1x^3+P_2x^2y) \\
\sigma_{22}^{\boldsymbol{\cdot}}(x,y)=(x^2+y^2)^{-2}(P_1xy^2+P_2y^3) \\
\sigma_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}(x,y)=(x^2+y^2)^{-2}(P_1x^2y+P_2xy^2)
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Напряжения в наращиваемом слое получаем интегрированием соотношений (2.1) по времени с момента зарождения $t=x_2/c$:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11}(t,x_1,x_2)=\int\limits_{-x_2/c}^{t}\sigma_{11}^{\boldsymbol{\cdot}}(x_1,x_2+c\tau)\,d\tau+f \\
\sigma_{22}(t,x_1,x_2)=\int\limits_{-x_2/c}^{t}\sigma_{22}^{\boldsymbol{\cdot}}(x_1,x_2+c\tau)\,d\tau \\
\sigma_{12}(t,x_1,x_2)=\int\limits_{-x_2/c}^{t}\sigma_{12}^{\boldsymbol{\cdot}}(x_1,x_2+c\tau)\,d\tau
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

После подстановки (2.1) $x=x_1$, $y=x_2+ct$ и интегрирования получаем

$$
\sigma_{11}=\frac{1}{2c}\left[P_1\left(\frac{x_1(x_2+ct)}{x_1^2+(x_2+ct)^2}+\operatorname{arctg}\frac{x_2+ct}{x_1}\right)+P_2\left(1-\frac{x_1^2}{x_1^2+(x_2+ct)^2}\right)\right]+f
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{22}=\frac{1}{2c}\left[P_1\left(\operatorname{arctg}\frac{x_2+ct}{x_1}-\frac{x_1(x_2+ct)}{x_1^2+(x_2+ct)^2}\right)+\right. \\
\left.+P_2\left(\frac{x_1^2}{x_1^2+(x_2+ct)^2}-\ln\frac{x_1^2}{x_1^2+(x_2+ct)^2}-1\right)\right]
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

$$\sigma_{12}=\frac{1}{2c}\left[P_1\left(1-\frac{x_1^2}{x_1^2+(x_2+ct)^2}\right)+\right.$$
$$\left.+P_2\left(\operatorname{arctg}\frac{x_2+ct}{x_1}-\frac{x_1(x_2+ct)}{x_1^2+(x_2+ct)^2}\right)\right]$$

На свободной поверхности $x_1=0$ имеем $\sigma_{11}=0$, $\sigma_{12}=0$ и из (2.3) получаем

$$\pi P_1/2+P_2+2cf=0,\quad P_1+\pi P_2/2=0$$

откуда находим проекции «сосредоточенной силы»:

$$P_1=4\pi cf/(\pi^2-4),\; P_2=8cf/(4-\pi^2)$$

Отметим, что указанное решение при $x_1\to0$ имеет особенность порядка $\sigma_{22}\sim16f(4-\pi^2)^{-1}\ln x_1$. Остальные напряжения особенностей не имеют. Эта особенность может привести к отрыву наращиваемого слоя от подложки.

Напряжения в угле $x_1>0$, $x_2>0$, на который осаживается наращиваемый слой, определяются по формуле

$$\sigma_{ij}=\int_0^t\sigma_{ij}^{\bullet}(x_1,x_2+c\tau)\,d\tau$$

После интегрирования получаем

$$\sigma_{11}(t,x_1,x_2)=\frac{P_1}{2c}\left[\frac{x_1(x_2+ct)}{x_1^2+(x_2+ct)^2}+\operatorname{arctg}\frac{x_2+ct}{x_1}-\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}+\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right]+$$
$$+\frac{P_2}{2c}\left[\frac{x_1^2}{x_1^2+(x_2+ct)^2}-\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}\right]$$

$$\sigma_{22}(t,x_1,x_2)=\frac{P_1}{2c}\left[\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}-\frac{x_1(x_2+ct)}{x_1^2+(x_2+ct)^2}+\operatorname{arctg}\frac{x_2+ct}{x_1}-\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right]+$$
$$+\frac{P_2}{2c}\left[\ln\frac{x_1^2+(x_2+ct)^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_1^2}{x_1^2+(x_2+ct)^2}-\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}\right]$$

$$\sigma_{12}(t,x_1,x_2)=\frac{P_1}{2c}\left[\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}-\frac{x_1^2}{x_1^2+(x_2+ct)^2}\right]+$$
$$+\frac{P_2}{2c}\left[\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}-\frac{x_1(x_2+ct)}{x_1^2+(x_2+ct)^2}+\operatorname{arctg}\frac{x_2+ct}{x_1}-\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right]$$

Напряжение σ_{22} имеет особенность при $x_2=0$ и $x_1\to0$ такого же типа, как и в наращиваемом слое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.* Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 142–152.
2. *Арутюнян Н. Х. Наумов В. Э.* Краевая задача теории вязкоупруго-пластичности для растущего тела, подверженного старению // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 17–28.
3. *Быковцев Г. И., Луканов А. С.* Некоторые вопросы теории затвердевающих и наращиваемых вязкоупругих сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 116–118.
4. *Харлаб В. Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела // Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та. 1966. Вып. 49. С. 93–119.
5. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
6. *Тринчер В. К.* О постановке задачи определения напряженно-деформированного состояния растущего тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 119–124.
7. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.
8. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию 22.04.1987