

УДК 539.3

© 1990 г.

С. И. БОЯРЧЕНКО, С. И. МОЙСЕЕНКО

ВЫПУЧИВАНИЕ СЛОИСТО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ ПЛИТЫ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ НА КОНТАКТНЫХ ГРАНИЦАХ

Исследуется проблема бифуркации равновесия нелинейно-упругой слоистой плиты тонкой периодической структуры с контактами проскальзывания между слоями. С помощью метода осреднения получена краевая задача для определения главного члена асимптотики критической нагрузки и формы потери устойчивости плиты. В качестве примера использования теоретических расчетов приведены результаты численного решения задачи устойчивости слоистой плиты из высокоэластичного одноконстантного несжимаемого материала с кусочно-непрерывными быстро осциллирующими по толщине упругими свойствами для трех различных постановок граничных условий на боковой поверхности плиты.

1. Осредненные уравнения нейтрального равновесия. Проблеме получения осредненных уравнений для периодических сред посвящены многие работы (например, [1–5]). Исследования потери устойчивости в структуре армированных материалов, использующие подход, основанный на континуальной теории слоистых сред, приведены в [6–9]. Континуальная модель безграничной слоистой линейно упругой среды, в которой учтена возможность проскальзывания между слоями, построена в [10]. В [11] рассматривается осесимметричная деформация линейно упругой слоистой цилиндрической оболочки с учетом проскальзывания слоев. Ниже с позиций нелинейной теории упругости исследуется проблема устойчивости упругой плиты с тонкой периодической структурой при конечной докритической деформации.

Рассмотрим упругую плиту с периодически изменяющимися быстро осциллирующими по толщине кусочно-непрерывными упругими свойствами; в горизонтальных плоскостях свойства материала предполагаются однородными. Будем считать, что плита состоит из n макрослоев (периодов) и в каждом слое укладываются m микрослоев, материал каждого такого слоя будем предполагать ортотропным и неоднородным по поперечной координате (с произвольной неоднородностью), будем также считать, что слои имеют две общих плоскости материальной симметрии, ортогональные плоскости плиты в недеформированном состоянии. В этом случае тензор упругих модулей материала [12] будет периодической кусочно-непрерывной функцией поперечной координаты с периодом ε (где $\varepsilon = Hn^{-1}$ — малый параметр, H — толщина плиты).

Пусть докритическая деформация такова, что одна из главных осей тензора деформаций совпадает с осью x_3 (ортогональной плоскости плиты в недеформированном состоянии), плоскости, параллельные срединной поверхности, испытывают аффинную деформацию, не зависящую от поперечной координаты; напряжения на этих плоскостях отсутствуют. Удлинения поперечных волокон, вообще говоря, зависят от x_3 ; в случае несжимаемого материала деформация будет однородной по всему телу. Нетрудно показать, что такая деформация может быть обеспечена только за счет сил, распределенных по боковой поверхности, т. е. лицевые поверхности плиты свободны от напряжений.

Для исследования устойчивости начального деформированного состояния, воспользуемся методом наложения малой деформации на конечную. Тогда в каждом микрослое должны выполняться условия нейтрального

равновесия, которые для материала без связей можно записать в виде [13]:

$$\partial_p A_{pr}^{[j]} \cdot \partial_r w^j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, mn) \quad (1.1)$$

$$A_{pr}^{[j]} = K_{pqrs}^{[j]} i_q i_s \quad (p, q, r, s=1, 2, 3)$$

где w^j — вектор добавочных перемещений, $\partial_p = \partial/\partial x_p$, x_p , i_p — соответственно, декартовы координаты и орты декартовой системы координат недеформированной конфигурации тела, K_{pqrs} — компоненты тензора упругостей, $[j]$ — остаток от деления j на m .

Граничные условия на лицевых плоскостях плиты, выражающие отсутствие нагрузки в возмущенном состоянии равновесия, записываются следующим образом:

$$A_{3r}^{[j]} \cdot \partial_r w^j |_{x_3=+0} = 0, \quad A_{3r}^{[m]} \cdot \partial_r w^{mn} |_{x_3=H-0} = 0 \quad (1.2)$$

Между слоями имеет место контакт с проскальзыванием, как в [10], при котором на границах между слоями должны выполняться условия непрерывности напряжений и перемещений в направлениях, перпендикулярных этим плоскостям, т. е.

$$A_{3r}^{[j-1]} \cdot \partial_r w^{j-1} |_{x_3=\varepsilon j-0} = A_{3r}^{[j]} \cdot \partial_r w^j |_{x_3=\varepsilon j+0} \quad (1.3)$$

$$w_3^{j-1} |_{x_3=\varepsilon j-0} = w_3^j |_{x_3=\varepsilon j+0}$$

а для тангенциального проскальзывания вдоль границ слоев принят линейный закон для добавочных касательных напряжений

$$\tau^j = mk\varepsilon^{-1} E_2 \cdot (w^j - w^{j-1}) \quad (1.4)$$

где $E_2 = i_1 i_1 + i_2 i_2$, k — положительная константа размерности напряжения, характеризующая жесткость связи между слоями, τ^j — вектор касательных напряжений, который можно представить в виде

$$\tau^j = A_{3r}^{[j]} \cdot \partial_r w^j$$

Таким образом, на границах слоев, кроме условий (1.3), должны выполняться следующие условия, вытекающие из (1.4):

$$(w_v^{j-1} + \varepsilon(mk)^{-1} A_{3r}^{[j-1]} \cdot \partial_r w^{j-1} \cdot i_v) |_{x_3=\varepsilon j-0} = \dot{w}_v^j |_{x_3=\varepsilon j+0} \quad (v=1, 2) \quad (1.5)$$

и неравенство

$$A_{3r}^{[j]} \cdot \partial_r w^{[j]} \cdot i_3 |_{x_3=\varepsilon j+0} < 0$$

выполнение которого исключает возможность отрыва слоев.

Так как тензоры $A_{pr}^{[j]}$ не зависят от x_1 , x_2 , уравнения (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.5) допускают решения вида

$$w^j = f^j(x_3) \exp[i(\alpha x_1 + \beta x_2)] \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в уравнения нейтрального равновесия, в условия на лицевых и контактных поверхностях, а также вводя вектор

$$g^j(x_3) = (A_{33}^{[j]} d + i\alpha A_{31}^{[j]} + i\beta A_{32}^{[j]}) \cdot f^j \quad (1.7)$$

(d — оператор дифференцирования по x_3), вместо уравнений (1.1) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$dh^j = \Lambda_\varepsilon^{[j]} \cdot h^j, \quad h^j = \begin{pmatrix} f^j \\ g^j \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

где $\Lambda_\varepsilon^{[j]}$ — матрица с тензорными элементами $\Lambda_{\mu\nu}^{[j]}$ ($\mu, \nu=1, 2$):

$$\Lambda_{11}^{[j]} = -(A_{33}^{[j]})^{-1} \cdot R^{[j]}, \quad \Lambda_{12}^{[j]} = (A_{33}^{[j]})^{-1}$$

$$\Lambda_{21}^{[j]} = -B^{[j]} \cdot \Lambda_{11}^{[j]} - Q^{[j]}, \quad \Lambda_{22}^{[j]} = -B^{[j]} \cdot \Lambda_{12}^{[j]}$$

$$R^{[j]} = i\alpha A_{31}^{[j]} + i\beta A_{32}^{[j]}, \quad B^{[j]} = i\alpha A_{13}^{[j]} + i\beta A_{23}^{[j]}$$

$$Q^{[j]} = -\alpha^2 A_{11}^{[j]} - \beta^2 A_{22}^{[j]} - \alpha\beta (A_{12}^{[j]} + A_{21}^{[j]})$$

Граничные условия (1.2) принимают вид

$$\Gamma \cdot \mathbf{h}^1|_{x_3=+0} = 0, \quad \Gamma \cdot \mathbf{h}^{mn}|_{x_3=H-0} \quad (1.9)$$

здесь $\Gamma = (\mathbf{O}, \mathbf{E})$, где \mathbf{O} — нуль-тензор, \mathbf{E} — единичный тензор.

Вместо условий сопряжения (1.3), (1.5) получим

$$(I + \varepsilon P) \cdot \mathbf{h}^{j-1}|_{x_3=\varepsilon j-0} = \mathbf{h}^j|_{x_3=\varepsilon j+0} \quad (1.10)$$

$$h_6^j|_{x_3=\varepsilon j+0} < 0$$

где I — единичная матрица размерности 6×6 , а в матрице P (той же размерности) отличны от нуля только элементы $P_{14} = P_{25} = 1/(mk)$. Отметим, что $(I + \varepsilon P)^{-1} = I - \varepsilon P$, $(I \pm \varepsilon P)^j = I \pm \varepsilon j P$.

Определим функции $\mathbf{u}^j = (I - \varepsilon j P) \cdot \mathbf{h}^j$; тогда нетрудно видеть, что $\mathbf{u}^{j-1}|_{x_3=\varepsilon j-0} = \mathbf{u}^j|_{x_3=\varepsilon j+0}$, и можно ввести непрерывную на $[0, H]$ вектор-функцию \mathbf{u} , удовлетворяющую на каждом интервале $(\varepsilon j, \varepsilon(j+1))$ ($j=1, 2, \dots, mn-1$) уравнению

$$d\mathbf{u} = (I - \varepsilon j P) \cdot \Lambda_\varepsilon^{[j]} \cdot (I + \varepsilon j P) \cdot \mathbf{u} \quad (1.11)$$

и граничным условиям

$$\Gamma \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ при } x_3 = 0, H \quad (1.12)$$

Из (1.9) следует, что

$$u_6(\varepsilon j) < 0 \quad (j=1, 2, \dots, mn-1) \quad (1.13)$$

Очевидно, что задача (1.11) — (1.13) эквивалентна задаче (1.8) — (1.10).

Положим $\varphi(x_3/\varepsilon) = -x_3 + \varepsilon/2 + \varepsilon j$ на каждом интервале $(\varepsilon j, \varepsilon(j+1))$ (нетрудно показать, что $\varphi(x_3/\varepsilon) \sim O(\varepsilon)$), тогда уравнение (1.11) можно записать так

$$d\mathbf{u} = (I - (x_3 + \varphi(x_3/\varepsilon) - \varepsilon/2)P) \cdot \Lambda_\varepsilon^{[j]} \cdot (I + (x_3 + \varphi(x_3/\varepsilon) - \varepsilon/2)P) \cdot \mathbf{u} \quad (1.14)$$

К задаче (1.12) — (1.14) можно применить метод осреднения [14]. Следует отметить, что задача асимптотического осреднения линейно упругой слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах формально решена в [15] для системы дифференциальных уравнений с не зависящими от поперечной координаты коэффициентами. В настоящей статье с помощью введения новой вектор-функции условия скачка на контактных границах удается заменить условиями непрерывности и таким образом перейти к задаче, для которой обоснована [1] возможность метода осреднения.

Введем $y = \varepsilon^{-1}x_3$, оператор дифференцирования представим в виде $d = \partial_x + \varepsilon^{-1}\partial_y$. Решение задачи будем отыскивать в форме ряда

$$\mathbf{u} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{u}^s(x_3, y) \varepsilon^s \quad (1.15)$$

Основными неизвестными в задаче выпучивания плиты являются те значения параметров нагружения, при которых задача (1.1) — (1.3), (1.5) имеет нетривиальное решение. Неизвестные критические значения параметров нагружения также будем искать в виде ряда по степеням ε :

$$A_{pr}^{[j]} = \sum_{s=0}^{\infty} A_{pr}^{(s)[j]}(y) \varepsilon^s \quad (1.16)$$

поэтому и матрицы $\Lambda_\varepsilon^{[j]}$ тоже окажутся представленными рядами

$$\Lambda_\varepsilon^{[j]} = \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda_s^{[j]} \varepsilon^s$$

Разлагая в ряд по ε обе части уравнения (1.14), граничные условия (1.12) и неравенство (1.13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим (здесь и в дальнейшем угловые скобки означают операцию осреднения по y):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0 &= \mathbf{u}^0(x_3) \\ \partial_x \mathbf{u}^0 &= (I - x_3 P) \cdot \langle \Lambda_0^{[j]} \rangle \cdot (I + x_3 P) \cdot \mathbf{u}^0 \\ \Gamma \cdot \mathbf{u}^0 &= 0 \text{ при } x_3 = 0, H \\ u_6^0(\varepsilon j) &< 0 \quad (j=1, 2, \dots, mn-1) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Введем кусочно-непрерывную функцию \mathbf{h} , совпадающую на каждом интервале $(\varepsilon j, \varepsilon(j+1))$ с функцией \mathbf{h}^j , очевидно

$$\mathbf{h} = (I + (x_3 + \varphi(y) - \varepsilon/2)P) \cdot \mathbf{u} \quad (1.18)$$

Разложим \mathbf{h} в ряд по ε

$$\mathbf{h} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{I}^s(x_3, y) \varepsilon^s$$

тогда из (1.15) и (1.17) следует

$$\mathbf{I}^0 = \mathbf{I}^0(x_3) = (I + x_3 P) \cdot \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}^0 = (I - x_3 P) \cdot \mathbf{I}^0 \quad (1.19)$$

Подставляя (1.19) в (1.17), получим краевую задачу для определения \mathbf{I}^0 :

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{I}^0 &= \langle \Lambda_0^{[j]} \rangle \cdot \mathbf{I}^0 + P \cdot \mathbf{I}^0 \\ \Gamma \cdot \mathbf{I}^0 &= 0 \text{ при } x_3 = 0, H \\ l_6(\varepsilon j + 0) &< 0 \quad (j=1, 2, \dots, mn-1) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Возвращаясь теперь к исходной задаче, можем, используя (1.20), (1.16) и (1.7), записать уравнение для определения главного члена \mathbf{f}^0 асимптотики кусочно-непрерывной вектор-функции \mathbf{f} , совпадающей на каждом интервале $(\varepsilon j, \varepsilon(j+1))$ с \mathbf{f}^j :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \mathbf{f}^0 + \mathbf{V} \cdot \partial_x \mathbf{f}^0 + \mathbf{W} \cdot \mathbf{f}^0 &= 0 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{L} + \mathbf{N}, \quad \mathbf{W} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{L}, \quad \mathbf{P}_1 = (mk)^{-1} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{L} &= \langle (\mathbf{A}_{33}^{(0)[j]})^{-1} \cdot \mathbf{R}^{(0)[j]} \rangle, \quad \mathbf{N} = \langle (\mathbf{A}_{33}^{(0)[j]})^{-1} \rangle + \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{M} &= \mathbf{N} \cdot \langle \mathbf{B}^{(0)[j]} \cdot (\mathbf{A}_{33}^{(0)[j]})^{-1} \rangle \cdot \mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{S} &= \langle \mathbf{B}^{(0)[j]} \cdot (\mathbf{A}_{33}^{(0)[j]})^{-1} \cdot \mathbf{R}^{(0)[j]} - \mathbf{Q}^{(0)[j]} \rangle \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{B}^{(0)[j]} = i\alpha \mathbf{A}_{13}^{(0)[j]} + i\beta \mathbf{A}_{23}^{(0)[j]}, \quad \mathbf{R}^{(0)[j]} = i\alpha \mathbf{A}_{31}^{(0)[j]} + i\beta \mathbf{A}_{32}^{(0)[j]}$$

$$\mathbf{Q}^{(0)[j]} = -\alpha^2 \mathbf{A}_{11}^{(0)[j]} - \beta^2 \mathbf{A}_{22}^{(0)[j]} - \alpha\beta (\mathbf{A}_{12}^{(0)[j]} + \mathbf{A}_{21}^{(0)[j]})$$

Граничные условия для функции \mathbf{f}^0 имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{33}^{(0)1} d + \mathbf{R}^{(0)1}) \cdot \mathbf{f}^0 &= 0 \quad \text{при } x_3 = 0 \\ (\mathbf{A}_{33}^{(0)m} d + \mathbf{R}^{(0)m}) \cdot \mathbf{f}^0 &= 0 \quad \text{при } x_3 = H \end{aligned} \quad (1.22)$$

Искомая вектор-функция \mathbf{f}^0 должна удовлетворять неравенству (вытекающему из неравенства (1.20)):

$$(\mathbf{A}_{33}^{(0)[j]} d + \mathbf{R}^{(0)[j]}) \cdot \mathbf{f}^0 \cdot \mathbf{i}_3 |_{x_3 = \varepsilon j + 0} < 0 \quad (1.23)$$

Осредненная система уравнений (1.21) с краевыми условиями (1.22) и неравенством (1.23) служит для определения главного члена асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ критической нагрузки и формы потери устойчивости упругой плиты.

В случае несжимаемого материала систему уравнений нейтрального равновесия, краевые условия и условия сопряжения можно записать в форме, аналогичной (1.1)–(1.3); (1.5), с помощью метода, описанного в [13].

2. Бифуркация равновесия слоисто-периодической упругой плиты из неогукковского материала при комбинированном нагружении.

Уравнения равновесия в метрике естественной (ненапряженной) конфигурации для каждого слоя имеют вид [16]:

$$\begin{aligned} \nabla^0 \cdot \mathbf{P}^j &= 0, \quad \nabla^0 \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{v}^j = 0 \\ \mathbf{P}^j &= \mu (\nabla^0 \mathbf{v}^j + p^j \mathbf{U}^{-1}) + \mu \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \mathbf{U}^{-1} \cdot (\nabla^0 \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{U}^{-1} \\ (\mathbf{P}^j)^T &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^j \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mu = \mu(x_3/\varepsilon)$ — модуль упругости материала, являющийся кусочно-непрерывной быстро осциллирующей функцией поперечной координаты; ∇^0 — набла-оператор в недеформированной конфигурации; \mathbf{R} — радиус-вектор точки в начальном деформированном состоянии, $\mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1/2} \cdot \nabla^0 \mathbf{P}$ — тензор поворота в докритическом состоянии, \mathbf{G} — мера деформации Коши, λ_1, λ_2 — главные степени удлинения в плоскости плиты, \mathbf{D}^j — линейное приращение тензора напряжений Пиола, p^j — неизвестная функция координат, дополнительным уравнением для определения которой служит условие несжимаемости; \mathbf{U} — положительно определенный квадратный корень из меры деформации Коши докритического состояния, вектор $\mathbf{v}^j = v_k^j \mathbf{i}_k$ связан с вектором добавочных перемещений \mathbf{w}^j соотношением $\mathbf{v}^j = \mathbf{w}^j \cdot \mathbf{A}$.

Граничные условия на лицевых плоскостях плиты имеют вид

$$\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{P}^1|_{x_3=+0} = 0, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{P}^m|_{x_3=-H-0} = 0 \quad (2.2)$$

На контактных поверхностях должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{P}^{j-1}|_{x_3=\varepsilon j-0} &= \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{P}^j|_{x_3=\varepsilon j+0} \\ v_3^{j-1}|_{x_3=\varepsilon j-0} &= v_3^j|_{x_3=\varepsilon j+0}, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{i}_3|_{x_3=\varepsilon j+0} < 0 \\ v_v^{j-1} - \frac{\varepsilon}{mk} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{P}^{j-1} \cdot \mathbf{i}_v|_{x_3=\varepsilon j-0} &= v_v^j|_{x_3=\varepsilon j+0} \quad (v=1, 2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Требуется отыскать соотношение между параметрами нагружения λ_1 и λ_2 , при котором краевая задача (2.1)–(2.3) имеет нетривиальное решение. Можно показать, что неизвестные критические значения параметров λ_1 и λ_2 следует отыскивать в виде ряда по степеням безразмерного параметра ε :

$$\lambda_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_1^{(s)} \varepsilon^s, \quad \lambda_2 = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_2^{(s)} \varepsilon^s \quad (2.4)$$

Отыскивая решение задачи (2.1)–(2.3) в виде

$$\begin{aligned} v_t^j &= f_t^j(x_3) \exp [i(\alpha x_1 + \beta x_2)], \quad (t=1, 2, 3) \\ p^j &= f_4^j(x_3) \exp [i(\alpha x_1 + \beta x_2)] \end{aligned}$$

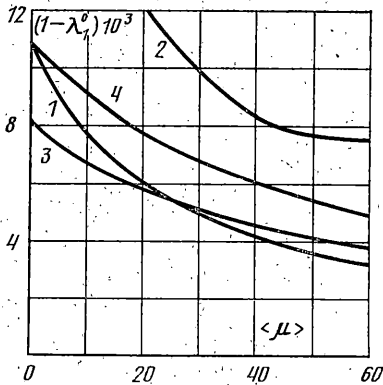
и применяя алгоритм, описанный в первом разделе статьи, получим главный член асимптотики формы потери устойчивости плиты и уравнение для определения главного члена критических параметров нагружения. При этом будем рассматривать две независимые задачи.

Задача А: $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_4^{(0)}$ — четные функции, $f_3^{(0)}$ — нечетная функция координаты x_3 .

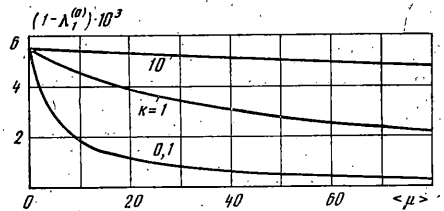
Задача В: $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_4^{(0)}$ — нечетные функции, $f_3^{(0)}$ — четная функция координаты x_3 .

Задача А описывает симметричные, а задача В — антисимметричные, т. е. изгибаемые, формы потери устойчивости плиты.

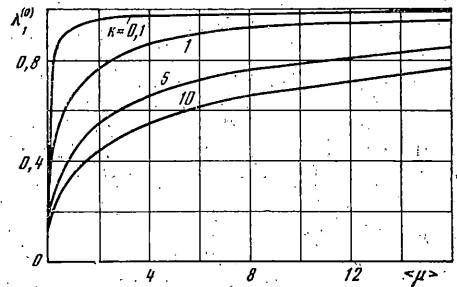
В силу громоздкости, приведем только уравнения для определения критического соотношения между параметрами $\lambda_1^{(0)}$ и $\lambda_2^{(0)}$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В задаче А:

$$(n_1^2+z)(n_2^2+(1-\kappa)z+\kappa)n_1 \operatorname{ch}(n_2\gamma) \operatorname{sh}(n_1\gamma) - (n_2^2+z)(n_1^2+(1-\kappa)z+\kappa)n_2 \operatorname{ch}(n_1\gamma) \operatorname{sh}(n_2\gamma) = 0 \quad (2.5)$$

В задаче Б:

$$(n_1^2+z)(n_2^2+(1-\kappa)z+\kappa)n_1 \operatorname{ch}(n_1\gamma) \operatorname{sh}(n_2\gamma) - (n_2^2+z)(n_1^2+(1-\kappa)z+\kappa)n_2 \operatorname{ch}(n_2\gamma) \operatorname{sh}(n_1\gamma) = 0 \quad (2.6)$$

$$\tilde{n}_{1,2} = \left\{ \frac{1}{2} [q \pm (q^2 - 4r)^{1/2}] \right\}^{1/2}, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$z = (\lambda_1^{(0)} \lambda_2^{(0)})^{-2} \gamma^{-2} (\alpha^2 (\lambda_1^{(0)})^{-2} + \beta^2 (\lambda_2^{(0)})^{-2})$$

$$r = z(\kappa + (1-\kappa)z); \quad q = z + \kappa - 3z(1-\kappa)$$

$\kappa = \nu/\delta$, $\nu = \langle \mu \rangle \langle \mu^{-1} \rangle$ — параметр, характеризующий степень неоднородности плиты, для однородной плиты $\nu=1$; $\delta = 2k \langle \mu^{-1} \rangle (2k \langle \mu^{-1} \rangle + 1)^{-1}$ — параметр, характеризующий жесткость связи слоев, в случае жесткого сцепления $\delta=1$.

Уравнения (2.5), (2.6) решались численно. Поскольку при выводе этих уравнений не учитывалась возможность отрыва слоев, применять полученные результаты следует лишь в случае отсутствия напряжений, которые могли бы привести к отрыву (положительные напряжения, нормальные к поверхности раздела между слоями). Как и ожидалось, в случае изгибных форм потери устойчивости это условие выполняется (что проверялось непосредственно при расчетах), а для симметричных форм — нарушается. Поэтому полученные результаты в последнем случае могут быть использованы лишь как оценочные.

При исследовании влияния жесткости сцепления слоев интересно выделить два предельных случая в зависимости от изменения величины параметра k , характеризующего жесткость сцепления: $k=0$ соответствует свободному (идеально гладкие поверхности) скольжению слоев относительно друг друга; $k \rightarrow \infty$ отвечает жесткому (без проскальзывания) сцеплению между слоями.

Были рассмотрены следующие постановки граничных условий:

1. Сжатие плиты происходит в направлении x_1 , а боковые поверхности $x_2 = \pm \text{const}$ подкреплены, т. е. запрещено смещение в направлении x_2 . В этом случае $\lambda_2^{(0)} = 1$.

2. При сжатии в направлении x_1 поверхности $x_2 = \pm \text{const}$ свободны от напряжений. Условие несжимаемости в этом случае приводит к соотношению $\lambda_2^{(0)} = (\lambda_1^{(0)})^{-1/2}$.

3. Равномерное сжатие в двух направлениях x_1 и x_2 , т. е. $\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)}$.

Параметр волнообразования выбирался таким образом, чтобы форма потери устойчивости описывалась полуволной синусоиды при отношении толщины плиты к ее длине, равному 0,05.

Результаты численного решения уравнений (2.5), (2.6) приведены в графической форме на фиг. 1–3. На фиг. 1 изображены области изгибной формы потери устойчивости в зависимости от величины $\langle \mu \rangle$, характеризующей жесткость слоев, для однородного ($\nu=1$) пакета слоев при $k=1$ для различных типов граничных условий. Кривые 1–4 получены для следующих параметров: 1 — $\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)}$, $\alpha = \beta$; 2 —

$\lambda_2^{(0)}=1$, $\alpha=\beta$; 3 - $\lambda_2^{(0)}=1$, $\beta=0$; 4 - $\lambda_2^{(0)}=(\lambda_1^{(0)})^{-1/2}$, $\beta=0$. Кривые 1 и 2 характеризуют случай волнообразования в двух взаимно перпендикулярных направлениях, в которых реализуется сжатие. Во всех случаях характерным является уменьшение относительной критической деформации с ростом жесткости материала. Сравнение кривых 2 и 3 позволяет сделать вывод о том, что для того, чтобы вызвать волнообразование вдоль двух направлений, необходима большая деформация, чем в одном направлении, т. е. физически будет реализовываться случай $\beta=0$. Также видно, что боковое поджатие делает конструкцию менее устойчивой (при прочих равных условиях), так как в этом случае критическая деформация меньше (ср. кривые 3 и 4). Вообще говоря, чем ближе отношение $\lambda_1^{(0)}/\lambda_2^{(0)}$ к единице, т. е. чем ближе состояние к равномерному сжатию, тем меньше деформационная устойчивость плиты. Сказанное становится более очевидным, если рассмотреть совместно с кривыми 3 и 4 кривую 2, изображенную на фиг. 2.

Анализ влияния проскальзывания между слоями легко провести с помощью результатов, представленных на фиг. 2 (рассчитана при $\nu=1$, $\lambda_1^{(0)}=\lambda_2^{(0)}$, $\beta=0$). Здесь в случае двухстороннего сжатия (случай 3) изображены области устойчивости для некоторых значений параметра (кривая 1 получена для $k=10$, $2-k=1$, $3-k=0,1$). Чем меньше величина этого параметра, тем уже область устойчивости. Следовательно, уменьшение жесткости сцепления между слоями может стать причиной потери устойчивости. Также понижает устойчивость и рост неоднородности пакета слоев, что характеризуется увеличением параметра ν . Однако величина этого эффекта относительно невелика. Так, например, увеличение ν в два раза дает уменьшение критической деформации $(1-\lambda_1^{(0)})$ не более, чем на 0,01% для всех значений $\langle \mu \rangle$.

На фиг. 3 (получена при $\nu=1$, $\lambda_2^{(0)}=(\lambda_1^{(0)})^{-1/2}$, $\beta=0$) представлены результаты для осесимметричной формы плиты устойчивости. Для удобства по оси ординат откладывается критический параметр сжатия. Поэтому здесь область устойчивости расположена между соответствующей кривой и прямой $\lambda_1^{(0)}=1$. Результаты даны для случая равномодульных слоев при отсутствии всех напряжений, за исключением σ_{11} (случай 2). Кривые построены для следующих значений параметра k : 1 - $k=0,1$, 2 - $k=1$, 3 - $k=5$, 4 - $k=10$. Здесь, как и в случае несимметричной формы, увеличение параметра k ведет к росту устойчивости плиты. Неустойчивость плиты при малых значениях k объясняется тем, что в этом случае сцепление между слоями невелико, и слои деформируются как бы независимо один от другого, следовательно, жесткость конструкции на изгиб снижается, что уменьшает запас устойчивости.

Авторы благодарят Л. М. Зубова за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Бердичевский В. Л. Об осреднении периодических структур // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 993-1006.
3. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.
4. Молотков Л. А., Хило А. Е. Эффективные среды для периодических анизотропных систем // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 128. С. 130-138.
5. Победра В. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
6. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
7. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
8. Новичков Ю. Н., Синицын Е. Н. Поверхностное выпучивание слоистой среды // Механика полимеров. 1973. № 4. С. 648-654.
9. Болотин В. В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1965. Вып. 11. С. 31-63.
10. Зволлинский Н. В., Шатинек К. Н. Континуальная модель слоистой упругой среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 5-14.
11. Новичков Ю. Н. Осесимметричная деформация многослойных цилиндрических оболочек с учетом проскальзывания между слоями // Механика деформируемого твердого тела и теория надежности. Тр. Моск. энергет. ин-та, 1975. Вып. 227. С. 109-118.
12. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
13. Боярченко С. И., Зубов Л. М. Метод усреднения в задачах устойчивости упругих плит с тонкой периодической структурой // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 647-654.
14. Боголюбов Н. Н., Мигропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
15. Никитин И. С. Осреднение уравнения слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 80-86.
16. Зубов Л. М. Выпучивание пластинок из неогукковского материала при аффинной начальной деформации // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 632-642.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
7.12.1988