

УДК 539.3:534.1

© 1990 г.

С. В. ГОЛЬДЕНШЛОГЕР

ЗАКРИТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ НЕУПРУГИХ ПЛАСТИН

Для исследования закритического изгиба неупругих пластин при пропорциональном нагружении используется подход, отличающийся учетом действительного положения мгновенной области разгрузки в процессе деформации. В рамках дифференциально-линейных определяющих соотношений получено уравнение закритического изгиба в области частичной разгрузки. Выписано соотношение, описывающее положение границы области мгновенной разгрузки в процессе деформации. Подробно рассматривается цилиндрический закритический изгиб. Для этого случая получена в квадратурах асимптотика начальной стадии выпучивания.

1. Введение. Выпучивание неупругих тонкостенных конструкций является результатом бифуркации процесса деформирования [4]. После изгиба вследствие увеличения общей (изгибной) жесткости за счет распространения области разгрузки, конструкция может нести возрастающую нагрузку вплоть до исчерпания несущей способности. Следовательно, практически важным является вопрос исследования закритических деформаций. Заметим, что в случае, когда под критическим понимается неустойчивость состояния равновесия, соответствующая нагрузка, как правило, является предельной и задача исследования закритического поведения практически лишена смысла.

Ниже рассматривается закритическое деформирование упругопластических пластин в классе дифференциально-линейных определяющих соотношений. Подход является обобщением методики примененной ранее [2, 3] для неупругих стержней. Распространение области мгновенной разгрузки в процессе деформирования приводит к весьма сложной картине распределений напряжений по толщине пластины [4]. Разгрузка в разных точках пластины появляется неодновременно (при разных значениях нагрузок). В известных решениях [5—7] это обстоятельство не учитывается, что, как показывают вычисления для простейшей модельной задачи [8], может приводить не только к количественным ошибкам, но и к искажению качественной картины деформирования. В еще большей степени это относится к определению максимальной (предельной) нагрузки, поскольку нахождение последней невозможно без исследования действительного распределения напряжений.

2. Об определяющих соотношениях. Основная сложность задач исследования закритического деформирования неупругих конструкций состоит в необходимости учета явления разгрузки. Это обстоятельство накладывает определенные ограничения на вид соотношений между напряжениями и деформациями. В частности, определяющие соотношения не могут быть записаны в конечном виде даже при пропорциональном нагружении.

При потере устойчивости неупругих пластин (если докритическое состояние однородно) объем области мгновенной разгрузки плавно нарастает от нуля. Следовательно, в соответствующих координатах траектория деформирования не имеет излома в момент бифуркации (по Шенли). Поэтому, по крайней мере, в окрестности точки бифуркации определяющие соотношения являются дифференциально-линейными. По-видимому, это положение нарушается только для задач в постановке Кармана, когда излом траектории нагружения является следствием никогда в реальных

конструкциях не выполняющегося предположения о мгновенной разгрузке.

Пусть в условиях однородного напряженного состояния в пластине выполняется условие пластичности Мизеса по деформациям

$$\varepsilon_i = \varepsilon_s \quad (2.1)$$

где ε_s — деформация, соответствующая пределу текучести материала при одноосном сжатии, ε_i — интенсивность деформаций, $\varepsilon_i = (2\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl})^{1/2}$, ε_{kl} — компоненты тензора деформаций.

Положим, что в процессе изменения нагрузок происходит бифуркация. В области, где в результате выпучивания $d\varepsilon_i > 0$ определяющее соотношение примем в виде

$$d\sigma_{ij} = A_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, A_{ijkl} — коэффициенты, являющиеся функционалами процесса нагружения.

Не останавливаясь здесь на структуре последних величин отметим, что соотношением (2.2) описывается также случай, когда поверхность нагружения имеет пирамидальную (коническую) особенность. Для дальнейшего важно заметить, что, поскольку материал считается однородным, коэффициенты A_{ijkl} не зависят от координат точек.

При $d\varepsilon_i \leq 0$ происходит упругая разгрузка по закону Гука (E_{ijkl} — упругие модули):

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (2.3)$$

Геометрическое место точек, где

$$d\varepsilon_i = 0 \quad (2.4)$$

назовем мгновенной поверхностью разгрузки.

3. Определение внутренних силовых факторов. Рассмотрим тонкую однородную пластину постоянной толщины h , срединная плоскость которой отнесена к декартовой системе координат xuz . Пусть в направлениях x и y на пластину действуют сжимающие нагрузки с интенсивностями p и s , а также касательные нагрузки τ в плоскости xu . Положим, что

$$p = p(\lambda), \quad s = s(\lambda), \quad \tau = \tau(\lambda) \quad (3.1)$$

причем $p(\lambda)$, $s(\lambda)$ и $\tau(\lambda)$ — известные аналитические функции параметра λ .

Предположим, что функции (3.1) таковы, что в каждой точке пластины выполняется условие (2.4). Рассмотрим процесс возрастания параметра λ . Пусть λ_0 — то значение, при котором происходит бифуркация, в результате чего в определенной части пластины при $d\lambda > 0$ имеет место разгрузка ($d\varepsilon_i < 0$). Объем этой области при $\lambda = \lambda_0$ равен нулю. Ее размер в направлении оси z обозначим z_0 ($z_0 = z_0(x, y)$). В соответствии с гипотезой прямых нормалей приращение деформаций в результате выпучивания можно определить так (деформация сжатия считается положительной):

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= (z - z_0) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} d\lambda, & d\varepsilon_y &= (z - z_0) \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} d\lambda \\ d\gamma_{xy} &= 2(z - z_0) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial \lambda} d\lambda \end{aligned} \quad (3.2)$$

где ε_x , ε_y — линейные деформации, γ_{xy} — деформация сдвига, W — перемещение в направлении оси z (прогиб).

В области, ограниченной поверхностью $z = z_0(x, y)$ напряжения и деформации связаны законом Гука (2.3), который для изотропного материала дает

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= E^*(d\varepsilon_x - \nu d\varepsilon_y) \\ d\sigma_y &= E^*(d\varepsilon_y - \nu d\varepsilon_x), \quad d\tau_{xy} = G d\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $E^* = E/(1 - \nu^2)$, E — модуль Юнга, $G = E/2(1 + \nu)$, ν — коэффициент Пуассона.

В остальной части пластины имеет место активная пластическая деформация, и, в соответствии с (2.2) (коэффициенты запишем в двухиндексной форме)

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= A_{11}d\varepsilon_x + A_{12}d\varepsilon_y, \quad d\sigma_y = A_{22}d\varepsilon_y + A_{21}d\varepsilon_x \\ d\tau_{xy} &= L_{21}d\gamma_{xy} \quad (L_{21} = A_{1121}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Соответствующие приращения изгибающих (M_x и M_y) и крутящего (M_{xy}) моментов получаются интегрированием по толщине пластины с учетом того, что в областях разгрузки и догрузки действуют разные законы (3.3) и (3.4). Получаем

$$\begin{aligned} dM_x &= \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial \lambda} [D + (A_{11} - E^*)\psi] + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} [(E^*\nu + A_{12})\psi - \nu D] \right\} d\lambda \\ dM_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y \partial \lambda} \left[G \frac{h^3}{12} + (L_{21} - G)\psi \right] d\lambda \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} dM_y &= \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2 \partial \lambda} [D + (A_{22} - E^*)\psi] + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} [(E^*\nu + A_{21})\psi - \nu D] \right\} d\lambda \\ D &= \frac{1}{12} E h^3 (1 - \nu^2) \\ \psi &= \psi(z_0) = \frac{1}{2} 4 h^3 - \frac{1}{8} h^2 z_0 + \frac{5}{6} z_0^3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Нагрузки, действующие в плоскости пластины получают приращения

$$\begin{aligned} dN_x &= \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} [(A_{11} - E^*)\varphi - E^*z_0 h] + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} [(E^*\nu + A_{12})\varphi + E^*\nu z_0 h] \right\} d\lambda \\ dN_{xy} &= 2 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial \lambda} [(G - L_{21})\varphi - G z_0 h] d\lambda \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} dN_y &= \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} [(A_{22} - E^*)\varphi - E^*z_0 h] + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} [(E^*\nu + A_{21})\varphi + E^*\nu z_0 h] \right\} d\lambda \\ \varphi &= \varphi(z_0) = \frac{1}{8} h^2 - \frac{3}{2} z_0^2 - \frac{1}{2} z_0 h \end{aligned} \quad (3.8)$$

В области, где разгрузка отсутствует в формулах (3.5)–(3.8) следует положить $z_0 = \frac{1}{2}h$. Тогда из (3.6) и (3.8) получаем $\psi = \frac{1}{12}h^3$, $\varphi = -\frac{1}{2}h^2$.

4. Уравнения закритического изгиба. Поскольку изгибная жесткость пластины много меньше соответствующей величины в ее плоскости, бифуркация состоит в появлении углов поворота при малых деформациях.

Проектируя все силы, действующие на элемент пластины в искривленном состоянии на ось z , после обычной процедуры исключения поперечных сил [9], получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (dM_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (dM_y) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (dM_{xy}) + \\ + d \left(N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отметим, что в этом уравнении отражено равновесное изменение моды выпучивания (W) в зависимости от параметра λ . Вследствие этого, как видно из (3.5), (3.7) и (4.1), последнее является нелинейным уравнением относительно W , несмотря на то, что деформации считаются малыми (в общепринятом смысле).

Используя в (4.1) формулы (3.5) и (3.7) приходим к уравнению закритического изгиба пластины в области разгрузки

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial \lambda} - \nu \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} \right) + (A_{11} - E^*)\psi \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} + (E^*\nu + A_{12})\psi \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2 \partial \lambda} - \nu \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} \right) + (A_{22} - E^*)\psi \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} + (E^*\nu + A_{21})\psi \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \frac{\partial}{\partial x \partial y} \left\{ \left[\frac{Gh^3}{12} + (L_{21} - G) \psi \right] \right\} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y \partial \lambda} + \\
& + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} [(A_{11} - E^*) \varphi - E^* z_0 h] + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} [E^* \nu z_0 h + (E^* \nu + A_{12}) \varphi] \right\} + \\
& + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} [(A_{22} - E^*) \varphi - E^* z_0 h] + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} [E^* \nu z_0 h + (E^* \nu + A_{21}) \varphi] \right\} + \\
& + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial \lambda} [(G - L_{21}) \varphi - Ghz_0] + \\
& + h \left(p \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} + 2\tau \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial \lambda} + S \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} \right) = 0 \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Это уравнение выполняется в области $\Sigma = \{x \in [\beta_1, \beta_2]; y \in [\gamma_1, \gamma_2]; z \in [z_0, -h/2]\}$, где $\beta_{1,2}; \gamma_{1,2}$ — границы области разгрузки, соответственно, в направлении осей x и y .

В остальной части пластины выполняется уравнение, получающееся из (4.1) подстановкой (3.5) и (3.7) при $z_0 = h/2$. Имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{12} \left(A_{11} \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial \lambda} + A_{22} \frac{\partial^5 W}{\partial y^4 \partial \lambda} + \gamma \frac{\partial^5 W}{\partial x^2 \partial y^2 \partial \lambda} \right) + \\
& + \frac{h}{2} \left[4L_{21} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial \lambda} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left(A_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} + A_{12} \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \left(A_{22} \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} + A_{21} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} \right) \right] + p \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} + \\
& + 2\tau \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial \lambda} + S \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} = 0, \quad \gamma = A_{12} + A_{21} + 4L_{21} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Это уравнение переходит в известное уравнение Пирсона [10], если считать, что приращения мембранных сил в процессе выпучивания равны нулю, после интегрирования по λ .

Полученные уравнения закритического изгиба являются существенно нелинейными, причем, (4.2) содержит еще и «скрытую» нелинейность в коэффициентах, включающих z_0 — глубину мгновенной области разгрузки.

Поскольку приращения деформаций, не могут быть независимыми, из условия совместности

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (d\varepsilon_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (d\varepsilon_y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (d\gamma_{xy}) = 0$$

получаем уравнение относительно функции $z_0(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial \lambda} - 2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y \partial \lambda} = 0 \quad (4.4)$$

Таким образом, задача исследования закритического изгиба неупругой пластины сводится к решению уравнений (4.2) — (4.4) в соответствующих областях с присоединением дополнительных условий, к записи которых перейдем.

5. Дополнительные условия для уравнений закритического изгиба. Одной из основных математических проблем изучения закритического поведения неупругих систем является необходимость сопряжения уравнений изгиба в областях частичной разгрузки и догрузки. Эти уравнения в общем случае имеют разный тип и порядок, а граница между областями их определения зависит от самого решения. Такая нелинейность в квадрате типична для упругопластических задач вообще и, в главном, аналогична известной проблеме Стефана [11] в теории теплопроводности. Заметим, что для стержней эта качественная аналогия может быть доведена до ко-

личественной при специальном предположении о виде поперечного сечения [12].

Возвращаясь к уравнениям изгиба (4.2) и (4.3), прежде всего отметим естественное начальное условие, которому должно удовлетворять решение

$$W(x, y, \lambda_0) = 0 \quad (5.1)$$

— выпучивание происходит при $\lambda = \lambda_0$.

Не обсуждая здесь граничные условия, зависящие от вида опирания пластины, которые хорошо известны, остановимся на условиях сопряжения. На границах $\gamma_{1,2}(x)$ и $\beta_{1,2}(y)$ должны быть непрерывны кривизны, углы поворота и прогибы:

$$\begin{aligned} W_p = W_e, \quad \partial W_p / \partial x = \partial W_e / \partial x, \quad \partial W_p / \partial y = \partial W_e / \partial y \\ \partial^2 W_p / \partial x^2 = \partial^2 W_e / \partial x^2, \quad \partial^2 W_p / \partial y^2 = \partial^2 W_e / \partial y^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

где W_p и W_e , соответственно, решения уравнений (4.3) и (4.2).

Дополнительными условиями для уравнения (4.4) служат очевидные равенства, выполняющиеся на границах $\gamma_{1,2}(x)$ и $\beta_{1,2}(y)$:

$$z_0(x, y) = 1/2 h \quad (5.3)$$

6. Цилиндрический закритический изгиб. Рассмотрим случай, когда пластина сжата на свободно опертых краях напряжением $p = p(\lambda)$, а два другие свободны от нагрузки и также свободно оперты. Этот случай представляет интерес потому, что является промежуточным между стержнем и пластиной, когда сжатие происходит по длинным сторонам ($a \gg b$). Это обстоятельство позволяет упростить задачу, положив $\partial W / \partial y = 0$. Уравнение (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} D(z_0) \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial \lambda} + B(z_0) \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial \lambda} + \Gamma(z_0) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} \\ + p \cdot h \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + p h \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} = 0 \quad (-\beta \leq x \leq 0) \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$D(z_0) = D + (A_{11} - E^*) (1/24 h^3 - 1/8 h^2 z_0 + 5/6 z_0^3)$$

$$B(z_0) = 2(A_{11} - E^*) (5/2 z_0^2 - 1/8 h^2) dz_0 / dx$$

$$\Gamma(z_0) = (A_{11} - E^*) [5z_0 (dz_0 / dx)^2 + 5/2 z_0^2 - 1/8 h^2] d^2 z_0 / dx^2$$

где β — полудлина области разгрузки $p = dp/d\lambda$.

В области, где разгрузка отсутствует, из (4.3) имеем

$$A_{11} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial \lambda} + p \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} = 0 \quad \left(-\frac{b}{2} \leq x < -\beta \right) \quad (6.2)$$

Для цилиндрического изгиба уравнение (4.4) обращается в тождество. Для определения z_0 воспользуемся первым соотношением (3.7), откуда

$$p \cdot h = \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} \left[(1/8 h^2 - 3/2 z_0^2 - 1/2 h z_0) (A_{11} - E^*) - E^* z_0 h \right] \quad (6.3)$$

Последнее соотношение можно записать как уравнение относительно z_0 :

$$\alpha_1 z_0^2 + \alpha_2 z_0 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 = 3(E^* - A_{11})/2 \quad (6.4)$$

$$\alpha_2 = -(E^* - A_{11}) h/2, \quad \alpha_3 = (A_{11} - E^*) h^2/8 - p \cdot h (\partial^3 W / \partial x^2 \partial \lambda)^{-1}$$

Корни этого уравнения будут вещественными при $\alpha_2^2 \geq 4\alpha_1\alpha_3$, или

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \lambda} \leq \frac{6p}{hK}, \quad K = \frac{E^* A_{11} - E^{*2} - A_{11}^2}{E^* - A_{11}} \quad (6.5)$$

и при $E^* = 0$, $K = A_{11}$, а при $A_{11} = 0$, $K = -E^*$. Если $A_{11} = E^*$, $K \rightarrow \infty$, то $\partial^3 W / \partial x^2 \partial \lambda \rightarrow \infty$.

На границе области разгрузки $z_0=h/2$ (при $x=-\beta$), и из (6.3) получаем

$$(\partial^3 W / \partial x^3 \partial \lambda)_{x=-\beta} = -2p^* / h A_{11} \quad (6.6)$$

так что неравенство (6.5) заведомо выполняется.

Заменой $\partial^2 W / \partial x^2 = U$ порядок уравнений (6.1) и (6.2) может быть понижен:

$$D(z_0) \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial \lambda} + B(z_0) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \lambda} + [\Gamma(z_0) + ph] \frac{\partial U}{\partial \lambda} + p^* h U = 0 \quad (-\beta \leq x \leq 0) \quad (6.7)$$

$$A_{11} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial \lambda} + p \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 \quad \left(-\frac{b}{2} \leq x < -\beta \right) \quad (6.8)$$

причем, z_0 является (положительным) корнем уравнения (6.4):

$$z_0 = -\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2\alpha_1} \left\{ \alpha_2^2 - 4\alpha_1 \left[\frac{h^2}{8} (A_{11} - E^*) - p^* h \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right] \right\}^{1/2}$$

Для сопряжения решений этих уравнений имеем условия

$$U(-\beta-0) = U(-\beta+0), \quad (\partial U / \partial x)_{x=-\beta-0} = (\partial U / \partial x)_{x=-\beta+0}.$$

На свободно опертом крае

$$U(-b/2) = 0 \quad (6.9)$$

Кроме того, согласно (6.6) имеем

$$(\partial U / \partial \lambda)_{x=-\beta} = -2p^* / h A_{11} \quad (6.10)$$

Выписанные условия полностью замыкают задачу определения закритической кривизны пластины (функции U).

Решение (6.8) нетрудно найти, если ввести обозначение $f = \partial U / \partial \lambda$. Уравнение (6.8) принимает вид $d^2 f / dx^2 + \xi^2 f = 0$, $\xi^2 = 12p / A_{11} h^2$ ($-b/2 \leq x < -\beta$).

Решение этого уравнения $f(x) = C_1 \sin \xi x + C_2 \cos \xi x$ содержит постоянные C_1 и C_2 , которые определим из условий (6.9) и (6.10) с учетом $f(-b/2) = 0$. Тогда

$$\partial U / \partial \lambda = -[2p^* \sin \xi (x+b/2)] [h A_{11} \sin \xi (b/2-\beta)]^{-1} \quad (6.11)$$

Отсюда имеем (учтено начальное условие (5.1)):

$$U = -\frac{2}{h} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{p^* \sin \xi (x+b/2)}{A_{11} \sin \xi (b/2-\beta)} d\lambda.$$

7. Асимптотика закритической деформации при цилиндрическом изгибе. Для начальной стадии можно представить $U(x, \lambda) \approx U(x, \lambda_0) + (\partial U / \partial \lambda) \times (\lambda - \lambda_0)$, $\lambda = \lambda_0 + 0$.

Учитывая, что согласно (5.1) $U(x, \lambda_0) = 0$, получаем $U(x, \lambda) = (\partial U / \partial \lambda) (\lambda - \lambda_0)$. При этом глубина области разгрузки изменяется мало: $z_0 = \frac{1}{2} h (1 - \delta)$, $\delta = \text{const}$, $\delta \ll 1$.

Из (6.1) с точностью до малых высшего порядка малости ($A_{11} - \text{const}$) имеем

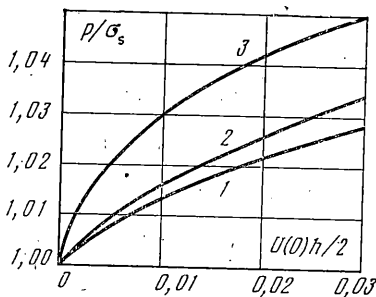
$$D(z_0) = D^* \approx h^3 \delta (E^* - A_{11}) / 4, \quad B(z_0) \approx 0$$

и уравнение (6.1) при $\lambda = \lambda_0 + 0$ с учетом обозначения $f = \partial U / \partial \lambda$ принимает вид $D^* \partial^2 f / \partial x^2 + phf = 0$, ($-\beta \leq x \leq 0$).

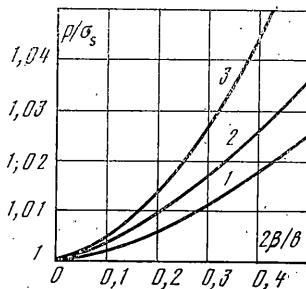
Сопрягая решение этого уравнения $f(x) = C_3 \sin \xi x + C_4 \cos \xi x$, $\xi^2 = ph / D^*$ с решением (6.11) после определения постоянных C_3 и C_4 получим

$$f(x) = -\frac{2p^* \sin \xi (x+b/2)}{h A_{11} \sin \xi (b/2-\beta)}, \quad \left(-\frac{b}{2} \leq x \leq -\beta \right) \quad (7.1)$$

$$f(x) = \frac{2p^*}{h A_{11}} \left[\frac{\xi}{\xi} \text{ctg} \xi \left(\frac{b}{2} - \beta \right) \sin \xi (x-\beta) - \cos \xi (x+\beta) \right] \quad (-\beta < x \leq 0)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Длина области разгрузки найдется из условия $(\partial W/\partial x)_{x=0}=0$ (симметрия прогибов). Учитывая (7.1) найдем

$$U = \frac{2}{h} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \left[\frac{\xi}{\zeta} \operatorname{ctg} \xi \left(\frac{b}{2} - \beta \right) \sin \zeta (x - \beta) - \cos \zeta (x + \beta) \right] d\lambda \quad (7.2)$$

и, следовательно,

$$W = \frac{2}{h} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \left[\frac{1}{\zeta^2} \cos \zeta (x - \beta) - \frac{\xi}{\zeta^3} \operatorname{ctg} \xi \left(\frac{b}{2} - \beta \right) \sin \zeta (x - \beta) \right] d\lambda$$

Условие симметрии прогибов с учетом последней формулы дает

$$\xi \operatorname{ctg} \xi (b/2 - \beta) = -\zeta \operatorname{tg} \zeta \beta \quad (7.3)$$

В момент выпучивания $\beta=0$ и $p(\lambda_0) = 1/12 \pi^2 A_{11} h^2 / b^2$. Отсюда определяется значение параметра λ_0 , при котором происходит выпучивание.

На фиг. 1, 2 представлены зависимости безразмерной кривизны в центре пластины (6.2) от λ при $p(\lambda) = \sigma_s \lambda / \lambda_0$, $h/b = 10^{-2}$ и аналогичные зависимости для длины области разгрузки (7.3). Номера кривых соответствуют разным значениям отношения A_{11}/E (линейное упрочнение): 1 — $A_{11}/E = 0,1$; 2. — $A_{11}/E = 0,3$; 3 — $A_{11}/E = 0,9$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кляшников В. Д. Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
2. Леонов М. Я., Гольденшлюгер С. В. Продольный изгиб коротких стержней. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 6. С. 1327—1331.
3. Леонов М. Я., Гольденшлюгер С. В. Закритические деформации и разрушение неупругих стержней. // Проблемы прочности, 1982. № 3. С. 18—21.
4. Гольденшлюгер С. В., Леонов М. Я. Околокритическая деформация слабоискривленного стержня. // Изв. АН СССР. МТГ. 1984. № 3. С. 160—166.
5. Зубчаинов В. Г. Послебифуркационное поведение прямоугольной пластинки за пределом упругости. // В кн.: Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1970. С. 85—89.
6. Лепик Ю. Р., Сакков Э. Э. Исследование закритической стадии пластин, потерявших устойчивость за пределом упругости. // Механика полимеров, 1969. № 5. С. 881—886.
7. Needleman A. Postbifurcation behavior and imperfection sensitivity of elastic-plastic circular plates // Int. J. Mech. Sci. 1975; V. 17. P. 1—13.
8. Леонов М. Я., Гольденшлюгер С. В. Околокритическая деформация неупругих стержней. // Изв. АН КиргССР. Фрунзе, 1982. № 4. С. 8—19.
9. Кляшников В. Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ. 1987. 224 с.
10. Пирсон К. Критерий раздвоения и пластическое изгибание пластинок. // Сб. переводов Механика. 1951. № 5. С. 17—26.
11. Лейбензон Л. С. Проблема Стефана о промерзании грунта. // В кн. Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР. 1955. Т. IV. С. 335—339.
12. Леонов М. Я., Гольденшлюгер С. В. К теории продольного изгиба неупругого стержня. // Проблемы прочности, 1984. № 2. С. 55—59.

Фрунзе

Поступила в редакцию
17.II.1988