**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1990**

УДК 530.3

В. М. МАЛЬКОВ

ТЕОРИЯ ТОНКОСЛОЙНЫХ РЕЗИНОАРМИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предложена теория статистической деформации многослойных элементов, состоящих из тонких чередующихся слоев резины и армирующих слоев из анизотропного композитного материала. Слои жестко соединены между собой, число их не ограничено. Уравнения деформации всего многослойного пакета состоят из уравнений деформации отдельных резиновых и армирующих слоев, связанных условиями упругого сопряжения на поверхностях контакта. Ввиду малой толщины слоев, их деформация описывается уравнениями двух переменных, полученных из уравнений упругости асимптотическим методом. Теория позволяет определять напряженно-деформированное состояние слоев и жесткостные характеристики пакета при статическом нагружении. Рассмотрены возможности упрощения уравнений в зависимости от свойств конструкции и примеры решения задач.

1. Многослойные резиноармированные элементы имеют ряд уникальных свойств, благодаря которым находят все более широкое применение в машиностроении и других отраслях в качестве амортизаторов, шарниров или опор, вытесняя традиционные элементы.

Однако математически обоснованные и пригодные для практического использования методы расчета на прочность рассматриваемых композитных конструкций отсутствуют. Существующие теории многослойных оболочек не применимы для этих целей, поскольку оболочки имеют другие условия закрепления и нагружения. Деформации и напряжения в слоях резиноармированных элементов и многослойных оболочек качественно отличаются. Резиновые и армирующие слои нельзя отнести к мягким или жестким по классификации, принятой в теории многослойных оболочек [1]. Лицевые поверхности многослойных элементов обычно соединены с достаточно жесткими фланцами, через которые передается внешняя нагрузка. На этих поверхностях задаются кинематические или смешанные условия. Боковые поверхности слоев не закреплены, в отличие от оболочек.

Раньше рассматривались многослойные элементы с металлическими армирующими слоями, причем исследовалась деформация только резиновых слоев, а металлические считались абсолютно жесткими. Приближенный способ определения напряжений в армирующих слоях при сжатии плоских элементов, использующий раздельное решение задач для слоев резины и металла, был предложен в [2, 3]. Погрешность метода оценена в [4, 5], она имеет порядок KH/Eh (обозначения ниже). В работах [6, 7] учитывалась совместная деформация слоев многослойных элементов, там применялся вариационный метод и метод конечных элементов к трехмерным задачам теории упругости. Сейчас трудно оценить эффективность решения задач этими методами. Известно, что большие вычислительные трудности возникают из-за необходимости учета сжимаемости резины.

Автору не известны экспериментальные данные по напряжениям в армирующих слоях тонкослойных элементов. Существуют технические сложности их определения.

Предлагаемая теория предназначена для исследования резиноармированных элементов со следующими типичными характеристиками. Модули сдвига и объемного сжатия слоев резины: $G=1\div20\cdot10^5$ Н/м², $K=2{,}0\div3\cdot10^9$ Н/м². Модули упругости армирующих слоев E могут меняться от существенно больших K (металл) до значений порядка K (пластик). Отношение толщины к характерному размеру срединной поверхности слоя $4\div50\cdot10^{-3}$.

2. Теория деформации тонкого слоя резиноподобного материала создавалась рядом авторов. Отметим два наиболее важных из полученных результатов. Установлено, что сжимаемость материала имеет определяющее значение для деформации тонкого слоя. Было показано, что задача расчета сводится к решению уравнения Гельмгольца для функции относительного приращения объема материала [8, 9]. В предшествующих работах рассматривался слой резины постоянной толщины с жесткими лицевыми поверхностями. Дальнейшее развитие теории было дано в [4, 5], где исследовались кинематические или смешанные граничные условия общего вида на лицевых поверхностях. Что позволяет решать задачи сопряжения слоев резины со слоями из другого материала. Одна такая задача решена в [5].

Приведем основные соотношения теории деформации слоя резины, следующие из [4, 5].

Используем безразмерные ортогональные координаты (ξ, η, ζ) с векторным базисом $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$, где $\zeta_1\leqslant\zeta\leqslant\zeta_2$ — координата по толщине слоя, координатной поверхности S соответствует $\zeta=0$, $(\xi, \eta)\in S$. Толщина слоя переменна $h=H(\zeta_2-\zeta_1)$, ζ_1 и ζ_2 — уравнения нижней и верхней лицевых поверхностей.

С погрешностью H/R (отношение характерных размеров слоя) вектор перемещений точки слоя $\mathbf{U}=U\mathbf{e}_1+V\mathbf{e}_2+W\mathbf{n}$ равен

$$\mathbf{U}=0{,}5(\mathbf{U}^++\mathbf{U}^-)+\frac{2\zeta-\zeta_2-\zeta_1}{2(\zeta_2-\zeta_1)}(\mathbf{U}^+-\mathbf{U}^-)-(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta_1)\frac{HR^2}{12c}\times$$
$$\times\left\{\frac{6\nabla e}{H}-\left[(2\zeta-\zeta_2-\zeta_1)\Delta e-3\nabla e\cdot\nabla(\zeta_2+\zeta_1)-\frac{6c}{R^2}\operatorname{div}\frac{\mathbf{U}^++\mathbf{U}^-}{\zeta_2-\zeta_1}\right]\mathbf{n}\right\} \tag{2.1}$$

Относительное приращение объема является решением уравнения

$$R^2\operatorname{div}(h^3\nabla e)-12\operatorname{ch}H^2e=-12cH^2(W^+-W^-)-6\operatorname{ch}H^2\operatorname{div}(\mathbf{U}^++\mathbf{U}^-)+$$
$$+6cH^3(\mathbf{U}^+-\mathbf{U}^-)\cdot\nabla(\zeta_2-\zeta_1),\quad Ke|_\Gamma=p \tag{2.2}$$

В формулах (2.1), (2.2) $\mathbf{U}^+$ и $\mathbf{U}^-$ — векторы перемещений лицевых поверхностей слоя, $c=GR^2/KH^2$. Операторы ∇, Δ и div вычисляются на поверхности S. Боковая поверхность слоя Γ свободна или нагружена нормальным давлением.

Приближенные формулы для напряжений в слое резины

$$\sigma_{ii}=Ke,\ \sigma_{12}=0,\ \sigma_{13}=GH^{-1}U_\zeta',\ \sigma_{23}=GH^{-1}V_\zeta' \tag{2.3}$$

Запишем соотношения (2.1), (2.2) для криволинейного слоя постоянной толщины H с лицевыми поверхностями $\zeta=\pm0{,}5$:

$$\mathbf{U}={}^1/_2(\mathbf{U}^++\mathbf{U}^-)+\zeta(\mathbf{U}^+-\mathbf{U}^-)+{}^1/_8(1-4\zeta^2)\{c^{-1}R^2\nabla e+[4\zeta(W^+-W^--He)+$$
$$+(1+2\zeta)H\operatorname{div}\mathbf{U}^+-(1-2\zeta)H\operatorname{div}\mathbf{U}^-]\mathbf{n}\} \tag{2.4}$$

$$R^2\Delta e-12ce=-12cH^{-1}(W^+-W^-)-6c\operatorname{div}(\mathbf{U}^++\mathbf{U}^-),\ Ke|_\Gamma=p \tag{2.5}$$

Выражениями (2.1)—(2.5) описывается основное медленно меняющееся напряженно-деформированное состояние слоя. При этом граничные условия на лицевых поверхностях (кинематические или смешанные) удовлетворяются полностью. На боковой поверхности задается только одно асимптотически главное условие (нормальное напряжение), соответствующее уравнению Гельмгольца (2.2) или (2.5). Это единственное уравнение, которое нужно решать для слоя резины.

3. Для деформации армирующих слоев гипотезы классической теории оболочек не выполняются. Так напряжение обжатия σ_{33} одного порядка с тангенциальными напряжениями. Вывод двумерных уравнений сделаем асимптотическим методом из уравнений теории упругости без принятия гипотез относительно характера деформации слоя.

Ограничимся анализом армирующих слоев из ортотропного материала.

Соотношения закона Гука [10] запишем в виде ($i, j=1, 2, 3$):

$$\sigma_{ii}=E_i(\lambda_{i1}e_{11}+\lambda_{i2}e_{22}+\lambda_{i3}e_{33}), \quad \sigma_{ij}=G_{ij}e_{ij} \tag{3.1}$$

где $E_i\lambda_{ij}=E_j\lambda_{ji}$, $G_{ij}=G_{ji}$. Параметры λ_{ij} вычисляются через коэффициенты Пуассона материала. В изотропном случае: $E_i=E$, $G_{ii}=G$, $\lambda_{ii}=(1-\nu)/((1+\nu)(1-2\nu))$, $\lambda_{ij}=\nu/((1+\nu)(1-2\nu))$.

Используя уравнения равновесия теории упругости [10] и формулы (3.1), построим вектор перемещений в виде рядов по параметру $\varepsilon=h/R$. Система координат аналогична принятой для слоя резины. Формулы, выражающие компоненты деформации e_{ij} через перемещения в криволинейных координатах, имеются в [10].

Выпишем перемещения нулевого, первого и второго приближений

$$U_0=u+\zeta\bar{u}, \quad V_0=v+\zeta\bar{v}, \quad W_0=w+\zeta\bar{w}$$

$$U_1=Rt\left[k\bar{u}+\left(1+\frac{E_3\lambda_{31}}{G_{13}}\right)\frac{\bar{w}_\xi'}{A}+(\lambda_{31}-\lambda_{32})\frac{E_3B_\xi'}{G_{13}AB}\bar{w}\right]$$

$$V_1=Rt\left[k\bar{v}+\left(1+\frac{E_3\lambda_{32}}{G_{23}}\right)\frac{w_\eta'}{B}+(\lambda_{32}-\lambda_{31})\frac{E_3A_\eta'}{G_{23}AB}\bar{w}\right]$$

$$W_1=Rt\left\{k\bar{w}+\lambda_{33}^{-1}\left[\left(\lambda_{31}+\frac{G_{13}}{E_3}\right)\frac{\bar{u}_\xi'}{A}+\left(\lambda_{32}+\frac{G_{23}}{E_3}\right)\frac{\bar{v}_\eta'}{B}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\lambda_{32}+\frac{G_{13}}{E_3}\right)\frac{B_\xi'}{AB}\bar{u}+\left(\lambda_{31}+\frac{G_{23}}{E_3}\right)\frac{A_\eta'}{AB}\bar{v}\right]\right\}$$

$$U_2=R^2t\left\{-k\vartheta_1+\frac{E_1}{G_{13}AB}[B(\lambda_{11}\varepsilon_1+\lambda_{12}\varepsilon_2)]_\xi'-\right.$$

$$\left.-\frac{E_2B_\xi'}{G_{13}AB}(\lambda_{21}\varepsilon_1+\lambda_{22}\varepsilon_2)+\frac{G_{12}}{G_{13}A^2B}(A^2\omega)_\eta'\right\} \tag{3.2}$$

$$V_2=R^2t\left\{-k\vartheta_2+\frac{E_2}{G_{23}AB}[A(\lambda_{21}\varepsilon_1+\lambda_{22}\varepsilon_2)]_\eta'-\right.$$

$$\left.-\frac{E_1A_\eta'}{G_{23}AB}(\lambda_{11}\varepsilon_1+\lambda_{12}\varepsilon_2)+\frac{G_{12}}{G_{23}AB^2}(B^2\omega)_\xi'\right\}$$

$$W_2=-R^2tE_3^{-1}\lambda_{33}^{-1}\left[\frac{G_{13}}{AB}(B\vartheta_1)_\xi'+\frac{G_{23}}{AB}(A\vartheta_2)_\eta'+\right.$$

$$\left.+E_1(\lambda_{11}k_1+\lambda_{12}k_2-\lambda_{13}k_2)\varepsilon_1+E_2(\lambda_{21}k_1+\lambda_{22}k_2-\lambda_{23}k_1)\varepsilon_2\right]$$

Второе приближение приведено не полностью, в нем опущены малые слагаемые, зависящие от функций $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. В формулах (3.2) использованы обозначения

$$U^\pm=l\pm0{,}5\bar{u}, \quad V^\pm=v\pm0{,}5\bar{v}, \quad W^\pm=w\pm0{,}5\bar{w} \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}u_\xi'+\frac{A_\eta'}{AB}v+k_1w, \quad \varepsilon_2=\frac{1}{B}v_\eta'+\frac{B_\xi'}{AB}u+k_2w$$

$$\omega_1=\frac{1}{A}v_\xi'-\frac{A_\eta'}{AB}u, \quad \omega_2=\frac{1}{B}u_\eta'-\frac{B_\xi'}{AB}v, \quad \omega=\omega_1+\omega_2 \tag{3.4}$$

$$\vartheta_1=-\frac{1}{A}w_\xi'+k_1u, \quad \vartheta_2=-\frac{1}{B}w_\eta'+k_2v$$

где A и B — параметры Ляме, k_1 и k_2 — кривизны срединной поверхности, $k=k_1+k_2$, $t=(1-4\zeta^2)/8$. Из формул (3.1) получим

$$e_{33}=-(\lambda_{31}e_{11}+\lambda_{32}e_{22})/\lambda_{33}+\sigma_{33}/E_3\lambda_{33} \tag{3.5}$$

$$\sigma_{ii}=B_{i1}e_{11}+B_{i2}e_{22}+\sigma_{33}\lambda_{3i}\lambda_{33}^{-1} \tag{3.6}$$

$$B_{i1}=E_i(\lambda_{i1}-\lambda_{i3}\lambda_{31}\lambda_{33}^{-1}), \quad B_{i2}=E_i(\lambda_{i2}-\lambda_{i3}\lambda_{32}\lambda_{33}^{-1})$$

По перемещениям (3.2) вычисляются компоненты деформации e_{ij} и напряжения σ_{ij}. С погрешностью ε^2 тангенциальные напряжения и напряжение σ_{33} имеют линейную зависимость по толщине слоя. Ограничиваясь данной точностью, получим выражения для компонентов тангенциальной деформации и напряжений

$$e_{ii}=\varepsilon_i+\zeta(\bar{\varepsilon}_i-hk_i\varepsilon_i),\ e_{12}=\omega+\zeta(\bar{\omega}-hk_1\omega_1-hk_2\omega_2) \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{ii}=B_{i1}\varepsilon_1+B_{i2}\varepsilon_2+0{,}5(\sigma_{33}^{+}+\sigma_{33}^{-})\lambda_{3i}\lambda_{33}^{-1}+\\ +\zeta[B_{i1}(\bar{\varepsilon}_1-hk_1\varepsilon_1]+B_{i2}(\bar{\varepsilon}_2-hk_2\varepsilon_2)+(\sigma_{33}^{+}-\sigma_{33}^{-})\lambda_{3i}\lambda_{33}^{-1}]\\ \sigma_{12}=G_{12}[\omega+\zeta(\bar{\omega}-hk_1\omega_1-hk_2\omega_2)]\end{gathered} \tag{3.8}$$

где $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\omega}$ вычисляются по функциям $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ с помощью формул (3.4). Из формул (3.5) и (3.7) следует

$$\bar{w}/h=-(\lambda_{31}\varepsilon_1+\lambda_{32}\varepsilon_2)\lambda_{33}^{-1}+0{,}5(\sigma_{33}^{+}+\sigma_{33}^{-})/E_3\lambda_{33} \tag{3.9}$$

В нулевом приближении теории основными неизвестными функциями являются u, v, w, $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Для их определения используем уравнения равновесия теории оболочек [11]. В векторной записи уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}(B\mathbf{T}_1)_\xi'+(A\mathbf{T}_2)_\eta'+AB\mathbf{q}=0\\ [B(\mathbf{M}_1+\mathbf{R}\times\mathbf{T}_1)]_\xi'+[A(\mathbf{M}_2+\mathbf{R}\times\mathbf{T}_2)]_\eta'+AB(\mathbf{m}+\mathbf{R}\times\mathbf{q})=0\end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{q}=(1+zk_1)(1+zk_2)\boldsymbol{\sigma}_3|_-^+,\quad \mathbf{m}=(1+zk_1)(1+zk_2)z\mathbf{n}\times\boldsymbol{\sigma}_3|_-^+ \tag{3.11}$$

$\boldsymbol{\sigma}_3^+$ и $\boldsymbol{\sigma}_3^-$ — векторы напряжений на лицевых поверхностях слоя, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки.

Усилия и моменты вычисляются по формулам [11] (i, $j=1$, 2):

$$\mathbf{T}_i=\int(1+zk_j)\boldsymbol{\sigma}_i\,dz,\quad \mathbf{M}_i=\int(1+zk_j)z\mathbf{n}\times\boldsymbol{\sigma}_i\,dz \tag{3.12}$$

Интегрирование выполняется по толщине слоя $|z|\leqslant 0{,}5h$. Справедливо тождество $S_1-S_2+k_1H_1-k_2H_2=0$.

Подставив в формулы (3.12) значения напряжений (3.8), получим соотношения закона упругости для усилий и моментов

$$\begin{gathered}T_i=h[B_{i1}\varepsilon_1+B_{i2}\varepsilon_2+0{,}5(\sigma_{33}^{+}+\sigma_{33}^{-})\lambda_{3i}\lambda_{33}^{-1}]\\ S_i=G_{12}h[\omega-(k_i-k_j)(\bar{\omega}-hk_i\omega_i)h/12]\\ M_i=h^2[B_{i1}\bar{\varepsilon}_1+B_{i2}\bar{\varepsilon}_2-B_{ii}h(k_i-k_j)\varepsilon_i+(\sigma_{33}^{+}-\sigma_{33}^{-}+0{,}5hk_j(\sigma_{33}^{+}+\sigma_{33}^{-}))\lambda_{3i}\lambda_{33}^{-1}]/12\\ H_i=G_{12}h^2[\bar{\omega}-(k_i-k_j)h\omega_i]/12\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$N_1=G_{13}(\bar{u}+h\vartheta_1),\ N_2=G_{23}(\bar{v}+h\vartheta_2) \tag{3.14}$$

Правые части формул (3.14) иногда умножают на коэффициент близкий к единице (обычно $^5/_6$), определяемый из дополнительных условий.

На границе срединной поверхности слоя для уравнений (3.10) ставятся пять условий, задаваемых в сдвиговых теориях оболочек.

Интегрируя уравнения равновесия (3.10) по площади срединной поверхности j-го слоя (боковая поверхность свободна), получим

$$\int\mathbf{q}\,dS=0,\quad \int(\mathbf{m}+\mathbf{R}\times\mathbf{q})\,dS=0 \tag{3.15}$$

Условиями (3.15) контролируется точность решения задачи.

Выразим тангенциальные напряжения через усилия и моменты

$$\sigma_{ii}=T_ih^{-1}+\zeta(12M_ih^{-2}-k_jT_i),\ \sigma_{12}=S_ih^{-1}+\zeta(12H_ih^{-2}-k_jS_i), \tag{3.16}$$

Напряжения поперечного обжатия и сдвига равны

$$\begin{gathered}\sigma_{33}={}^1/_2(\sigma_{33}^{+}+\sigma_{33}^{-})+\zeta(\sigma_{33}^{+}-\sigma_{33}^{-})\\ \sigma_{i3}={}^1/_2(\sigma_{i3}^{+}+\sigma_{i3}^{-})+\zeta(\sigma_{i3}^{+}-\sigma_{i3}^{-})+{}^3/_2h^{-1}\left[N_i-\frac{h}{2}(\sigma_{i3}^{+}+\sigma_{i3}^{-})\right]\end{gathered} \tag{3.17}$$

Наибольшими по величине являются первый член в выражении для σ_{33} и второй член в выражении для σ_{i3}. В формулах (3.8), (3.11) и других напряжения σ_3^+ и σ_3^- находятся по соответствующим напряжениям в соседних слоях резины (2.3).

Получим уравнения обобщенной классической теории оболочек, учитывающие напряжения обжатия и сдвига. Такие уравнения рассматривались в [12]. Используем приближенные зависимости

$$\bar{u}=h\vartheta_1+{}^1/_2hG_{13}^{-1}(\sigma_{13}^++\sigma_{13}^-),\quad \bar{v}=h\vartheta_2+{}^1/_2hG_{23}^{-1}(\sigma_{23}^++\sigma_{23}^-) \qquad (3.18)$$

Формулы (3.18) позволяют учесть чистый сдвиг слоя, при котором функции ϑ_1 и ϑ_2 могут отсутствовать.

Количество неизвестных функций в уравнениях (3.10) сводится к трем — u, v и w. Соотношения (3.14) не используются, а перерезывающие усилия N_1 и N_2 определяются из уравнений равновесия. Граничные условия ставятся те же, что и в классической теории оболочек [11].

Классическая теория оболочек является частным случаем обобщенной. Чтобы получить ее уравнения, нужно в соответствующих формулах п. 3 приравнять нулю напряжения обжатия и сдвига.

4. Уравнения (2.5) и (3.10) вместе с условиями контакта слоев дают систему уравнений, описывающую деформацию всего многослойного пакета. Условия упругого сопряжения формулируются в перемещениях (в компонентах деформации) и напряжениях

$$\mathbf{U}_j^+=\mathbf{U}_{j+1}^-,\quad \mathbf{U}_j^-=\mathbf{U}_{j-1}^+,\quad \boldsymbol{\sigma}_{3,j}^++\boldsymbol{\sigma}_{3,j+1}^-=0,\quad \boldsymbol{\sigma}_{3,j}^-+\boldsymbol{\sigma}_{3,j-1}^+=0 \qquad (4.1)$$

$j=1,\ldots,N$ — номера слоев. Перемещения лицевых поверхностей пакета $\mathbf{U}_1^-$ и $\mathbf{U}_N^+$ считаются заданными. Боковые поверхности слоев свободны или нагружены равномерным давлением. На боковых поверхностях армирующих слоев $\xi=\mathrm{const}$ ставятся условия: сдвиговая теория $T_1=ph$, $S_1=N_1=M_1=H_1=0$, обобщенная классическая $T_1=ph$, $Q_{12}=Q_{1n}=M_1=0$, Q_{12} и Q_{1n} — обобщенные усилия Кирхгофа [11].

Уравнения деформации многослойного пакета запишем относительно основных искомых функций. Используя условия сопряжения слоев (4.1) и формулу

$$[(BU)_\xi'+(AV)_\eta']/AB+kW=(1+zk_1)e_{11}+(1+zk_2)e_{22}$$

преобразуем уравнение (2.5):

$$\begin{aligned} R_j^2\Delta e_j-12c_je_j=&-12c_jH_j^{-1}[(w-0{,}5\bar{w})_{j+1}-(w+0{,}5\bar{w})_{j-1}]-\\ &-6c_j[(\varepsilon_1+\varepsilon_2-0{,}5\bar{\varepsilon}_1-0{,}5\bar{\varepsilon}_2)_{j+1}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+0{,}5\bar{\varepsilon}_1+0{,}5\bar{\varepsilon}_2)_{j-1}] \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Напряжения на лицевых поверхностях j-го армирующего слоя, входящие в (3.11), имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma}_3^\pm=[GH^{-1}((U^+-U^-)\mathbf{e}_1+(V^+-V^-)\mathbf{e}_2)\pm0{,}5KH\nabla e+Ke\mathbf{n}]_{j\pm1} \qquad (4.3)$$

Здесь функции U и V с помощью соотношений (3.3) и (4.1) выражаются через функции u, v, $\bar{u}$ и $\bar{v}$ с номерами j, $j\pm2$.

Для многослойного пакета с недеформируемыми лицевыми поверхностями вводятся соотношения жесткости, связывающие главные векторы сил и моментов на лицевых поверхностях с векторами поступательных перемещений и поворотов этих поверхностей

$$[\mathbf{F}^+,\ \mathbf{F}^-,\ \mathbf{M}^+,\ \mathbf{M}^-]=C[\mathbf{a}^+,\ \mathbf{a}^-,\ \boldsymbol{\omega}^+,\ \boldsymbol{\omega}^-] \qquad (4.4)$$

Коэффициенты матрицы жесткости C вычисляются по формулам

$$(\mathbf{F},\mathbf{M})=\int(\boldsymbol{\sigma}_3,\mathbf{R}\times\boldsymbol{\sigma}_3)\,dS,\qquad \boldsymbol{\sigma}_3=\boldsymbol{\sigma}_3(\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})$$

Для напряжений $\boldsymbol{\sigma}_3$ используются формулы (4.3). Ввиду соотношений (4.4), на поверхностях пакета можно задавать силы и моменты вместо перемещений.

Заметим, что уравнения теории резиноармированных элементов позволяют решать также и задачи теории многослойных оболочек с резиновым заполнителем. В этом случае на лицевых поверхностях пакета ставятся статические условия: в формулах (3.11) для крайних несущих слоев задаются векторы напряжений σ_3^+ или σ_3^-. Причем эти векторы будут известны и когда нагрузка передается на несущий слой через слой резины — это следует из формул (2.3). На боковых поверхностях несущих слоев ставится один из вариантов граничных условий теории оболочек (сдвиговой или классической). Граничные условия на боковых поверхностях слоев резины могут варьироваться и влиять на напряжения в несущих слоях: на свободной поверхности $e=0$, на заделанной $e_\xi'=0$.

5. Рассмотрим возможные упрощения соотношений для вычисления напряжений в слоях многослойного пакета.

Приближенные значения векторов нагрузки в (3.11):

$$\mathbf{q}=KH\nabla\bar{e}+K(e_{j+1}-e_{j-1}+hk\bar{e})\mathbf{n},\ \bar{e}={}^1/_2(e_{j+1}+e_{j-1}) \tag{5.1}$$

$$\mathbf{m}={}^1/_2GhH^{-1}[(\overset{+}{U}_{j+1}-\bar{u}_j-\overset{-}{U}_{j-1})\mathbf{e}_2-(\overset{+}{V}_{j+1}-\bar{v}_j-\overset{-}{V}_{j-1})\mathbf{e}_1]$$

Напряжения в слоях резины приближенно равны

$$\sigma_{ii}=Ke,\ \sigma_{12}=0,\ \sigma_{13}=-\zeta KHA^{-1}e_\xi',\ \sigma_{23}=-\zeta KHB^{-1}e_\eta' \tag{5.2}$$

Напряжения обжатия и сдвига в армирующих слоях

$$\sigma_{33}=K\bar{e}+\zeta K(e_{j+1}-e_{j-1}),\ \sigma_{13}=\zeta KHA^{-1}\bar{e}_\xi',\ \sigma_{23}=\zeta KHB^{-1}\bar{e}_\eta' \tag{5.3}$$

Для деформаций близких к чистому сдвигу формулы (5.1)—(5.3) не применимы.

Когда перерезывающие усилия малы по сравнению с тангенциальными, последние можно определять из безмоментных уравнений. При расчете элементов вращения может быть использовано решение уравнений безмоментной теории, приведенное в [11].

Наиболее радикальные упрощения общих уравнений возможны, когда отношение KH/Eh мало. В этом случае краевая задача для многослойного пакета распадается. Деформация армирующих слоев оказывает малое влияние на слои резины и вместо уравнения (4.2) получим $R_j^2\Delta e_j-12c_je_j=-12c_jH_j^{-1}(w_{j+1}-w_{j-1})$, где w_{j+1} и w_{j-1} — жесткие перемещения армирующих слоев, которые определяются путем решения задачи для слоя резины с недеформируемыми лицевыми поверхностями. В уравнениях равновесия армирующих слоев (3.10) вектора нагрузки становятся известными.

6. Рассмотрим две задачи плоской деформации трехслойного цилиндрического элемента, наружные слои которого из резины, а внутренний — армирующий. Помимо практического значения, эти задачи интересны тем, что для них можно получить точное аналитическое решение уравнений теории упругости. Сопоставление с точным решением позволяет оценить погрешность определяющих уравнений теории резиноармированных элементов и ее приближенных вариантов.

Используем цилиндрические координаты (r, φ). Положим $r=R_j+\zeta H_j=R_j(1+\zeta\varepsilon_j)$, $|\zeta|\leqslant 0{,}5$, R_j и H_j — радиус срединной поверхности и толщина слоя $j=1, 2, 3$. Для армирующего слоя $R_2=R$, $H_2=h$, λ_0 и μ_0 — упругие постоянные, $\varepsilon=h/R$.

Симметричная деформация. Заданы радиальные перемещения наружных поверхностей резины W_1^-, W_3^+. Перемещения в слоях определяются формулой $W_j=A_jr+B_jr^{-1}$, где шесть постоянных находятся из граничных условий и условий контакта слоев. Относительное приращение объема постоянно по толщине каждого слоя и равно $e_j=2A_j$.

С точностью до слагаемых порядка G/K и ε^2 для армирующего слоя получим

$$A_2=\frac{1}{\lambda_0+\mu_0}\frac{KR}{4h}(e_3-e_1+2\varepsilon\bar{e}),\qquad B_2=\frac{1}{\mu_0}\frac{KR^3}{4h}(e_3-e_1)$$

$$\sigma_{11}=\nu_0(\sigma_{22}+\sigma_{33})=\nu_0KRh^{-1}(e_3-e_1+2\varepsilon\bar{e})$$

$$\sigma_{22}=KRh^{-1}(e_3-e_1+\varepsilon\bar{e})-\zeta K(e_3-e_1),\ \ \sigma_{33}=K\bar{e}+\zeta K(e_3-e_1)$$

$$w=(1-\nu_0^2)\frac{KR^2}{E_0 h}\left(e_3-e_1+\frac{1-2\nu_0}{1-\nu_0}\varepsilon\bar{e}\right),$$

$$\bar{w}=-(1+\nu_0)\frac{KR}{E_0}[\nu_0(e_3-e_1)-(1-2\nu_0)\varepsilon\bar{e}]$$

Тот же результат для напряжений и перемещений дает теория резиноармированных элементов. Напряжения вычисляются по формулам (3.16), (3.17), в которых усилия определяются по безмоментной теории оболочек.

Кососимметричная деформация. Наружные поверхности слоев резины являются жесткими и имеют поступательные перемещения:

$$V_1^-=-a_1\sin\varphi,\ W_1^-=a_1\cos\varphi,\ V_3^+=-a_3\sin\varphi,\ W_3^+=a_3\cos\varphi$$

Уравнения теории упругости дают следующие формулы для перемещений в слоях $j=1, 2, 3$ (приводятся амплитудные значения функций):

$$V_j=-\frac{1}{2}D_j-\frac{1}{4(1-2\nu)}B_j+\frac{5-4\nu}{8(1-2\nu)}A_j\rho^2+\frac{1}{2}C_j\rho^{-2}-\frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)}B_j\ln\rho$$

$$W_j=\frac{1}{2}D_j-\frac{1}{4(1-2\nu)}B_j+\frac{1-4\nu}{8(1-2\nu)}A_j\rho^2+\frac{1}{2}C_j\rho^{-2}+\frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)}B_j\ln\rho$$

Относительное приращение объема $R_je_j=A_j\rho+B_j\rho^{-1}$, $\rho=1+\zeta\varepsilon_j$. Неизвестные постоянные определяются из граничных условий и условий непрерывности перемещений и напряжений σ_{33}, σ_{32}. С точностью до слагаемых порядка ε^2 и G/K относительно приращения объема слоев резины постоянны по толщине. Амплитудные значения напряжений σ_{11}, σ_{22} и σ_{33} вычисляются через функции e_1 и e_3 по формулам первой задачи, напряжение сдвига $\sigma_{32}=-0{,}5\zeta K(\varepsilon_1 e_1+\varepsilon_3 e_3)$. Эти напряжения совпадают с полученными по теории резиноармированных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
2. *Малый В. И.* Краевые задачи расчета на прочность тонкослойных резинометаллических элементов // Научн.-техн. конф. Методы расчета изделий из высокоэластичных материалов. Тез. докл. Рига: Изд-е РПИ: 1983. С. 13–14.
3. *Бидерман В. Л., Мартьянова Г. В.* Напряженное состояние металлической арматуры при сжатии тонкослойных резинометаллических элементов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1985. С. 52–56.
4. *Мальков В. М.* Линейная теория тонкого слоя из малосжимаемого материала // Докл. АН СССР. 1987. Т. 291. № 1. С. 52–54.
5. *Мальков В. М.* Деформация тонкого слоя из малосжимаемого материала // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 87–93.
6. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов/Под ред. Э. Э. Лавендела. Рига: Зинатне, 1980.
7. *Lau Ming G.* Three-dimentional solid finite element models for computing compressive stiffnesses of bonded rubber blocks // Can. J. Civ. Engn., 1985. No 4. P. 767–773.
8. *Малый В. И.* Асимптотическое решение задачи о сжатии слоя из слабосжимаемого материала // Механика эластомеров. Краснодар: Изд-е КПИ, 1983. Вып. 1. С. 38–44.
9. *Милякова Л. В., Черных К. Ф.* Общая линейная теория тонкослойных резинометаллических элементов // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 110–120.
10. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
11. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962. 431 с.
12. *Мальков В. М.* Теория многослойных резиноармированных элементов // Тр. XIV Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси, окт. 1987. Тб.: Изд-е Тбилисского ун-та, 1987. Т. 11. С. 193–198.

Ленинград

Поступила в редакцию 14.XI.1988