МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1990

УДК 539.3:534.1

Ю. Д. КАПЛУНОВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНСЛОЯ

К исследованию высокочастотных колебаний оболочек вращения применяется метод меридиональных полос. Производится упрощение описывающих колебания меридиональной полосы уравнений плоского и антиплоского динамического погранслоя путем разделения определяемого напряженно-деформированного состояния на симметричную и антисимметричную составляющие. Строятся частные решения упрощенных таким образом уравнений, удовлетворяющие однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки.

1. Симметризация уравнений динамического погранслоя при $q \geqslant 1$. Для анализа вынужденных высокочастотных колебаний оболочек вращения в [1] был предложен метод меридиональных полос. В рамках этого метода исходная задача сводится к изучению напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкой искривленной полосы, являющейся сечением оболочки меридиональными плоскостями. Движение меридиональной полосы описывается уравнениями плоского и антиплоского динамического погранслоя. Асимптотически главные части этих уравнений по виду совпадают с уравнениями плоской и антиплоской задачи теории упругости в декартовой прямоугольной системе координат, по одной оси которой откладывается длина дуги меридиана срединной поверхности оболочки, а по другой — расстояние от рассматриваемой точки до срединной поверхности.

Последнее обстоятельство приводит к мысли о распространении подходов, применявшихся в плоских и антиплоских динамических задачах теории упругости для слоя с прямолинейными границами (см., например, [2]), на высокочастотную динамику тонких оболочек. При исследовании колебаний слоя искомое НДС естественным образом разбивается на симметричную и антисимметричную относительно продольной оси симметрии слоя части. Это позволяет получить эффективные дисперсионные соотношения, а при решении граничных задач использовать систему частных решений достаточно простого вида.

В случае искривленной меридиональной полосы вопрос о возможности разделения НДС на симметричную и антисимметричную относительно срединной поверхности оболочки части нетривиален и, как оказывается, не всегда решается положительно. Это связано с тем, что при симметризации уравнений динамического погранслоя важную роль начинают играть определяемые геометрией оболочки асимптотически второстепенные члены, необходимость учета которых при построении интегралов с большой изменяемостью обоснована в [1]. Выпишем уравнения динамического погранслоя в символической форме [1]:

$$D_0^{(n)}+\eta^q(D_q^{(n)}+D_{q,R}^{(n)})+\eta^{2q-2p}D_{2q-2p}^{(n)}+\sum_{l=1}^{\infty}\eta^l\left(\frac{\alpha_3}{h}\right)^l(D_l^{(n)}+\eta^{2q-2p}D_{2q-2p+l}^{(n)})+$$
$$+O(\eta^{1+q})=0$$
$$(n=1,\ldots,9) \qquad (1.1)$$

Здесь $\eta=h/R$ — малый параметр тонкостенности оболочки (h — полутолщина оболочки, R — характерный радиус кривизны ее срединной поверхности); q и p — показатели изменяемости НДС в направлении меридианов и параллелей соответственно. Заметим, что в [1] остаточный член уравнений (1.1) имел вид $O(\eta^{2q-p}+\eta^{1+q})$. Это связано с тем, что там для общности учитывалась погрешность, вызванная отбрасыванием членов с множителем $\eta^{2q-p}(H_1H_2)^{-1}\partial H_1/\partial\alpha_2$, который в случае оболочек вращения тождественно равен нулю.

Операторы $D_i^{(n)}$ определены в системе координат ξ_j, γ ($j=1, 2$), получающейся из традиционной для теории оболочек триортогональной системы координат α_j ($j=1, \ldots, 3$) [3] растяжением масштабов по формулам:

$$\alpha_1=R\eta^q\xi_1,\ \alpha_2=R\eta^p\xi_2,\ \alpha_3=R\eta^q\gamma$$

Остановимся на случае плоского динамического погранслоя (вопрос об интегрировании (1.1) в случае антиплоского динамического погранслоя будет рассмотрен в п. 5). Тогда совокупность величин S, характеризующая НДС оболочки, представляется в виде суммы

$$S=Q+\eta^{q-p}P,\ Q=(s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{13};\ u_1, u_3),\ P=(s_{12}, s_{23};\ u_2)$$

где все напряжения s_{ij} и перемещения u_k имеют одинаковый асимптотический порядок.

Операторы $D_0^{(s)}$ ($s=1, 3, 4, 5, 6, 8$) в переменных $\left(\xi_1^*=\int A_1\,d\xi_1, \gamma\right)$ соответствуют однородным уравнениям плоской задачи теории упругости относительно совокупности асимптотически главных величин Q, а операторы $D_0^{(t)}$ ($t=2, 7, 9$) — неоднородным уравнениям антиплоской задачи теории упругости относительно совокупности второстепенных величин P при известном Q. Операторы $D_i^{(n)}$, входящие в (1.1) с малыми множителями, отражают влияние геометрических свойств оболочки и изменяемости нагрузки в направлении параллелей; их полная расшифровка дается в [1].

Уравнения (1.1) интегрируются в области $\xi_{j1}\leqslant\xi_j\leqslant\xi_{j2}$ ($j=1, 2$), $-\eta^{1-q}\leqslant\gamma\leqslant\eta^{1-q}$. Как и в плоской задаче теории упругости, их решения должны удовлетворять двум граничным условиям относительно величин из совокупности Q на каждом из торцов оболочки $\xi_1=\xi_{1m}$ ($m=1, 2$), а при $\gamma=\pm\eta^{1-q}$ — условиям свободной поверхности $s_{31}=s_{33}=0$.

Невязка, которая образуется при этом в третьем граничном условии на торцах и лицевых поверхностях, накладываемом на величины из совокупности P, может быть снята антиплоским динамическим погранслоем. Соответствующее ему НДС характеризуется совокупностью величин

$$S'=\eta^{q-p}(P'+\eta^{q-p}Q'),\ P'=(s_{12}', s_{23}';\ u_2'),\ Q'=(s_{11}', s_{22}', s_{33}', s_{13}';\ u_1', u_3')$$

Таким образом, замена исходной трехмерной динамической задачи теории упругости в области, занимаемой оболочкой, с тремя условиями на ее границе системой уравнений (1.1) с граничными условиями, соответствующими плоской задаче теории упругости, заведомо приводит к погрешности $O(\eta^{2q-2p})$ при определении величин из совокупности Q. Величины из совокупности P, являющиеся для плоского погранслоя асимптотически второстепенными, вообще не удается правильно определить без введения в рассмотрение антиплоского погранслоя. Сделав эти замечания, не будем больше касаться вопроса о погрешностях, связанных с постановкой граничных условий к (1.1). Ниже рассматриваются только погрешности, совершаемые при построении частных интегралов уравнений динамического погранслоя. Введем необходимые для последующего изложения определения.

Определение 1. НДС, характеризующееся совокупностью величин

$$S_0=\{(s_{11}^\circ, s_{22}^\circ, s_{33}^\circ, s_{13}^\circ;\ u_1^\circ, u_3^\circ)+\eta^{q-p}(s_{12}^\circ, s_{23}^\circ;\ u_2^\circ)\}$$

симметрично (антисимметрично) по переменной γ, если величины (s_{11}°, s_{22}°, s_{33}°, s_{12}°; u_1°, u_2°) четны (нечетны) по γ, а величины (s_{13}°, s_{23}°; u_3°) нечетны (четны) по γ.

Определение 2. Оператор $D_i^{(j)}$ имеет определенную четность по переменной γ, если результатом его действия на совокупность величин S_0 является четная или нечетная функция по γ.

Определение 3. Операторы $D_i^{(j)}$ и $D_m^{(l)}$ имеют одинаковую (различную) четность по переменной γ, если результатом действия этих операторов на совокупность величин S_0 являются функции, имеющие одинаковую (различную) четность по γ.

Ввиду того, что четность всех входящих в (1.1) операторов $D_i^{(n)}$ определена, попытаемся, разделяя НДС оболочки на симметричную и антисимметричную относительно переменной γ части, упростить уравнения динамического погранслоя. Принимая во внимание структуру операторов $D_0^{(n)}$, заключаем, что в случае приложения к торцу оболочки симметричной (антисимметричной) по γ нагрузки S_0 — асимптотически главная часть искомого НДС будет симметрична (антисимметрична) по γ. Поправка к S_0 определяется наличием в (1.1) членов, имеющих различную четность по γ с $D_0^{(n)}$. Объединим эти члены в каждом из уравнений (1.1) в операторы

$$E^{(n)}=\eta^q D_{q,R}^{(n)}+\sum_{l=1}^{\infty}\eta^{2l-1}\left(\frac{\alpha_3}{h}\right)^{2l-1}\left(D_{2l-1}^{(n)}+\eta^{2q-2p}D_{2q-2p+2l-1}^{(n)}\right) \qquad (1.2)$$

и введем в рассмотрение совокупность величин S_1 такую, что входящие в S_1 величины s_{ij}^1, u_k^1 противоположны по четности величинам s_{ij}°, u_k° из S_0. Асимптотический порядок поправки S_1 в искомое НДС зависит от показателя изменяемости q, значение которого определяет ширину области интегрирования по переменной γ.

Наиболее просто вопрос решается, когда $q=1$ и ширина области интегрирования по γ соизмерима с η^0. В этом случае справедливо представление

$$S=S_0+\eta S_1 \qquad (1.3)$$

При этом считается, что все величины s_{ij}°, u_k°, s_{ij}^1, u_k^1, входящие в S_0 и S_1, имеют одинаковый асимптотический порядок. Для определения S_0 может быть использована более простая система уравнений

$$D_0^{(n)}(S_0)+\eta D_q^{(n)}(S_0)+\eta^{2-2p}D_{2q-2p}^{(n)}(S_0)+O(\eta^2)=0 \qquad (1.4)$$

Величины из совокупности S_1 находятся из неоднородной системы уравнений

$$D_0^{(n)}(S_1)+\eta D_q^{(n)}(S_1)+\eta^{2-2p}D_{2q-2p}^{(n)}(S_1)+O(\eta)=-\eta^{-1}E^{(n)}(S_0) \qquad (1.5)$$

с однородными условиями на торцах оболочки.

При определении НДС, показатель изменяемости которого $q>1$ интегрирование системы уравнений (1.1) ведется в области, ширина которой безгранично растет ($\eta\to 0$). Применяя такой же асимптотический подход, как и при $q=1$, приходим к формуле

$$S=S_0+\eta^{2-q}S_1 \qquad (1.6)$$

которая при $q=1$ переходит в (1.3). Остановимся кратко на выводе (1.6) и выясним ограничения, накладываемые на значения показателя изменяемости q, при которых можно раздельно определять (как это было сделано при $q=1$) асимптотически главную симметричную (антисимметричную) составляющую S_0. Принимая пока без доказательства, что при асимптотическом интегрировании системы (1.1) с использованием символического метода Лурье [4, 5], с ней можно оперировать как с системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно γ (технике такого интегрирования посвящен п. 4), рассмотрим аналогичную (1.5) систему неоднородных уравнений для определения S_1 по известной совокупности S_0:

$$D_0^{(n)}(S_1)+\eta^q D_q^{(n)}(S_1)+\eta^{2q-2p}D_{2q-2p}^{(n)}(S_1)+\sum_{l=1}^{\infty}\eta^{2l+2}\left(\frac{\alpha_3}{h}\right)^{2l+2}\times$$

$$\times[D_{2l+2}^{(n)}(S_1)+\eta^{2q-2p}D_{2q-2p+2l+2}^{(n)}(S_1)]+O(\eta^{2q-1})=-\eta^{q-2}E^{(n)}(S_0) \quad (1.7)$$

Как нетрудно убедиться, асимптотически главные члены под знаком суммы в операторах $\eta^{q-2}E^{(n)}-\eta^{q-1}(\alpha_3/h)D_1^{(n)}(S_0)$ приводят к появлению в S_1 при интегрировании (1.7) слагаемых с множителем $\gamma^2\eta^{2q-2}=(\alpha_3/h)^2$. Подстановка последних слагаемых в $E^{(n)}$ показывает, что в $E^{(n)}(\eta^{2-q}S_1)$ будут входить слагаемые с множителем $\eta^{2q}\gamma^3=\eta^{3-q}(\alpha_3/h)^3$, совпадающие по четности с величинами из совокупности S_0.

На основании этих рассуждений выпишем теперь систему уравнений для определения S_0 при $q>1$:

$$D_0^{(n)}(S_0)+\eta^q D_q^{(n)}(S_0)+\eta^{2q-2p}D_{2q-2p}^{(n)}(S_0)+O(\eta^{3-q})=0 \quad (1.8)$$

Решения этой системы могут быть построены с локальной погрешностью $O(\eta^{3-2q})$. Такой вид O-члена объясняется тем, что при нахождении быстро изменяющихся интегралов с показателем изменяемости q системы уравнений типа (1.8), записываемой с точностью до членов порядка $O(\eta^\rho)$ $(\rho>0)$, допускается локальная погрешность $O(\eta^{\rho-q})$ [1] (в публикуемой статье речь идет о локальной погрешности решений уравнений динамического погранслоя; ниже слово «локальная» опускается). Последнее обстоятельство будет использоваться и в дальнейшем. Требуя, чтобы погрешность $O(\eta^{3-2q})$ была исчезающе малой при $\eta\to 0$, приходим к выводу, что независимое определение симметричной (антисимметричной) асимптотически главной части искомого НДС возможно лишь при $q<3/2$. При $q=1$ уравнения (1.8) переходят в (1.4). Будем называть определяемый из этих уравнений погранслой симметричным (антисимметричным), если НДС, задаваемое совокупностью величин S_0 симметрично (антисимметрично) по γ.

Случай $q<1$, когда интегрирование ведется в асимптотически узкой по γ области рассматривается в следующих двух пунктах статьи.

2. Плоский симметричный динамический погранслой при $q<1$. Остановимся на случае возбуждения колебаний нагрузкой, распределенной по торцу симметрично относительно срединной поверхности оболочки $\gamma=0$, показатель динамичности которой изменяется в интервале $p<a<1$. Асимптотический анализ уравнений плоского динамического погранслоя при $a<1$ показывает, что такие значения показателя динамичности соответствуют распространяющимся по оболочке продольным колебаниям с показателем изменяемости $q=a$. При этом совокупность величин S, определяющих НДС оболочки может быть представлена суммой двух слагаемых

$$S=S_0+\eta^q S_1 \quad (2.1)$$

Совокупности величин S_0 и S_1 соответствуют симметричному и антисимметричному относительно γ НДС и имеют вид

$$\begin{gathered}S_0=\{(s_{11}^\circ, s_{22}^\circ; \eta^{2-2q}s_{33}^\circ, \eta^{3-3q}s_{13}^\circ; u_1^\circ, \eta^{1-q}u_3^\circ)+\\ +\eta^{q-p}(s_{12}^\circ, \eta^{3-3q}s_{23}^\circ; u_2^\circ)\}\\ S_1=\{(\eta^{1-q}s_{11}^1, \eta^{1-q}s_{22}^1, \eta^{3-3q}s_{33}^1; \eta^{2-2q}s_{13}^1; \eta^{1-q}u_1^1, u_3^1)+\\ +\eta^{q-p}(\eta^{1-q}s_{12}^1, \eta^{2-2q}s_{23}^1; \eta^{1-q}u_2^1)\}\end{gathered} \quad (2.2)$$

В развернутой записи (2.2) полагается, что величины s_{ij}°, u_k°, s_{ij}^1, u_k^1 имеют одинаковый асимптотический порядок, который определяется порядком торцевой нагрузки. Так как при $q<1$ уравнения (1.1) интегрируются в асимптотически узкой по γ области, то, как указывается в [1], асимптотика НДС S совпадает с оболочечной. Так в предельном случае $q=p=a=0$ из формул (2.1), (2.2) следует, что симметричная и антисимметричная части НДС соотносятся также, как в статической безмоментной теории оболочек при отсутствии нагрузок на лицевых поверхностях [3]. При $q=a=1$ соотношения (2.1), (2.2) переходят в формулу (1.3).

Подставляя представление (2.1), (2.2) в уравнения (1.1), убеждаемся, что, как и при $q\geqslant 1$, симметричная часть НДС S_0 может быть найдена из уравнений (1.8), остаточный член которых имеет вид $O(\eta^{2q})$. Таким образом, при определении интегралов (1.8) допускается погрешность $O(\eta^q)$. Величины S_1 находятся по S_0 аналогично изложенному в п. 1. Так, например, перемещение u_3^1 с погрешностью $O(\eta^q+\eta^{2-2q})$ определяется по получаемой из (1.1) при $n=3$ формуле

$$u_3^1=1/\Lambda(s_{11}^\circ/R_1+s_{22}^\circ/R_2) \tag{2.3}$$

где R_i — отнесенные к R главные радиусы кривизны.

Выявленная здесь возможность использовать для нахождения симметричной составляющей НДС S_0 уравнения плоского динамического погранслоя в форме (1.8) позволяет конкретизировать обсуждавшийся в [1] вопрос об интервалах согласования частот между теорией оболочек и теорией динамического погранслоя. Применим к уравнениям (1.8) итерационный процесс асимптотического интегрирования уравнений теории упругости [3]. Дополнительно пренебрегая членами порядка $O(\eta^{2-2q})$, приходим к уравнениям вида

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}+\Lambda w_1+\eta^q k_2(T_1-T_2)+\frac{\eta^{2q-2p}}{A_2}\frac{\partial S}{\partial \xi_2}=0\\
\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_2}{\partial \xi_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}+\Lambda w_2+2\eta^q k_2 S=0
\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}
T_1=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}+\nu\eta^q k_2 w_1+\frac{\nu\eta^{2q-2p}}{A_2}\frac{\partial w_2}{\partial \xi_2}\right)\\
S=\frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_2}{\partial \xi_1}-\eta^q k_2 w_2\right)\\
T_2=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{\nu}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}+\eta^q k_2 w_2+\frac{\eta^{2q-2p}}{A_2}\frac{\partial w_2}{\partial \xi_2}\right)
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь T_i $(i=1, 2)$, S — отнесенные к $2Eh$ тангенциальные усилия в оболочке; $w_j=u_j^\circ|_{\gamma=0}$ $(j=1, 2)$; $k_2=(A_1A_2)^{-1}\partial A_2/\partial\alpha_1$; Λ — введенный в [1] частотный параметр $(\Lambda\sim\eta^\circ)$. НДС оболочки задается совокупностью величин $S_{\text{sh}}=\{(T_1, T_2; w_1)+\eta^{q-p}(S; w_2)\}$.

Уравнения (2.4), (2.5) при $q>p$ могут быть также получены из уравнений плоской теории оболочек [6], в которые внесена совокупность неизвестных S_{sh}.

Так как уравнения (2.4), (2.5) получены в результате отбрасывания в уравнениях трехмерной теории упругости величин порядка $O(\eta^{2q}+\eta^{2-2q})$ $(q=a)$, то искомые перемещения и усилия могут быть определены с погрешностью $O(\eta^q+\eta^{2-3q})$. Отсюда и из основного неравенства теории погранслоя $q>p$ следует, что плоский симметричный динамический погранслой согласуется с плоской теорией оболочек при изменении показателя динамичности в интервале $p<a<2/3$.

При $q<2/3$ для определения $w_3=u_3^1|_{\gamma=0}$ можно использовать известную формулу плоской теории оболочек

$$w_3=1/\Lambda(T_1/R_1+T_2/R_2) \tag{2.6}$$

являющуюся аналогом формулы (2.3), (2.6) позволяет определить w_3 исходя из известных на основании решения (2.4), (2.5) усилий T_1, T_2.

Общее решение системы (2.4), (2.5) легко может быть построено с помощью метода экспоненциальных представлений. Для этого предварительно выразим в (2.4) усилия через перемещения и разложим торцевую нагрузку в ряды Фурье по функциям $\cos(2\pi m\alpha_2/l)$, $\sin(2\pi m\alpha_2/l)$, где m — число волн по α_2, l — изменение параметра α_2 при обходе вдоль α_2 — линии. Переходя в аргументах тригонометрических функций к переменной ξ_2, будем искать решение в рядах Фурье по $\cos m_1\xi_2$, $\sin m_1\xi_2$, где $m_1=\eta^p 2\pi mR/l$. При фиксированном m_1 система (2.4), (2.5) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.

Запишем в качестве примера общий интеграл (2.4), (2.5) в исходных координатах (α_1, α_2) для продольного перемещения

$$w_1(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{bmatrix}\cos(\eta^{-p}m_1\alpha_2/R)\\ -\sin(\eta^{-p}m_1\alpha_2/R)\end{bmatrix}w_1$$

$$w_1=\sum_{j=1}^{2}C_j\left[\frac{1}{A_2^{1/2}}+O(\eta^q+\eta^{2-3q})\right]\exp\left[(-1)^j i\eta^{-q}R^{-1}\int_0^{\alpha_1}A_1\left((1-\nu^2)\Lambda-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\eta^{2q-2p}\frac{m_1^2}{A_2^2}\right)^{1/2}d\alpha_1'\right] \tag{2.7}$$

При $q>2p$ слагаемым с множителем η^{2q-2p} под знаком радикала можно пренебречь, допуская при этом дополнительную погрешность $O(\eta^{q-2p})$.

3. Плоский смешанный динамический погранслой. Обратимся теперь к случаю, когда колебания оболочки вызываются антисимметричной относительно срединной поверхности торцевой нагрузкой. Пусть показатель динамичности нагрузки неотрицателен и изменяется в пределах $2p-1<a<1$. Производя для этого случая асимптотический анализ уравнений плоского динамического погранслоя, заключаем, что по оболочке будут распространяться колебания изгибного характера с показателем изменяемости $q=0{,}5(a+1)$, а совокупность величин S может быть, как и в предыдущем пункте представлена в виде суммы двух слагаемых в соответствии с (2.1), где теперь S_0 соответствует антисимметричному, а S_1 — симметричному относительно срединной поверхности НДС. Указанные совокупности представляются в виде

$$S_0=\{(\eta^{1-q}s_{11}{}^\circ,\ \eta^{1-q}s_{22}{}^\circ,\ \eta^{3-3q}s_{33}{}^\circ,\ \eta^{2-2q}s_{13}{}^\circ,\ \eta^{1-q}u_1{}^\circ,\ u_3{}^\circ)+$$
$$+\eta^{q-p}(\eta^{1-q}s_{12}{}^\circ,\ \eta^{2-2q}s_{23}{}^\circ;\ \eta^{1-q}u_2{}^\circ)\}$$
$$S_1=\{(s_{11}{}^1,\ s_{22}{}^1,\ \eta^{2-2q}s_{33}{}^1,\ \eta^{3-3q}s_{13}{}^1;\ u_1{}^1,\ \eta^{1-q}u_3{}^1)+\eta^{q-p}(s_{12}{}^1,\ \eta^{3-3q}s_{23}{}^1;\ u_2{}^1)\} \tag{3.1}$$

Здесь все величины $s_{ij}{}^\circ$, $u_k{}^\circ$, $s_{ij}{}^1$, $u_k{}^1$ имеют одинаковый асимптотический порядок. Важно отметить, что в предельном случае $q=p=1/2$, $a=0$ асимптотическое соотношение между симметричной и антисимметричной частью НДС S будет таким же, как в статической теории оболочек [3]. При $q=a=1$ соотношения (2.1), (3.1) переходят в формулу (1.3).

Подставим (3.1) в (1.1) и, разделив каждое из уравнений на η^{χ_n} (χ_n — наименьшая степень малого параметра в n-ом уравнении), получим

$$D_0^{(n)}(S_0)+\eta^q D_q^{(n)}(S_0)+\eta^{4q-2}\delta_{3n}L(S_1)+\eta^{2q-2p}D_{2q-2p}^{(n)}(S_0)+O(\eta^{2q})=0$$
$$D_0^{(n)}(S_1)+\eta^q D_q^{(n)}(S_1)+\eta^{2q-2p}D_{2q-2p}^{(n)}(S_1)+O(\eta^{2-q})=-D_{q,R}^{(n)}(S_0)-$$
$$-\eta^{1-q}\left(\frac{\alpha_3}{h}\right)D_1^{(n)}(S_0) \tag{3.2}$$

Здесь $L(S_1)=-(s_{11}{}^1/R_1+s_{22}{}^1/R_2)$, δ_{3n} — символ Кронекера.

Уравнения (3.2) показывают, что в рассматриваемом случае, вообще говоря, не удается отдельно определить антисимметричную составляющую НДС S_0. Это связано с тем, что отбрасывание оператора L в первой серии этих уравнений приводит к погрешности $O(\eta^{3q-2})$ в их решениях, которая будет исчезающе малой лишь при $q>2/3$. Будем называть (3.2) уравнениями смешанного плоского динамического погранслоя.

Применим к (3.2) итерационный процесс интегрирования уравнений теории упругости [3]. Пренебрегая членами порядка $O(\eta^{2-2q})$, приходим к уравнениям вида

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial G_1}{\partial \xi_1}-N_1-\eta^q k_2(G_2-G_1)-\frac{\eta^{2q-2p}}{A_2}\frac{\partial H}{\partial \xi_2}=0$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial H}{\partial \xi_1}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial G_2}{\partial \xi_2}+2\eta^q k_2 H+N_2=0$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial \xi_1}+\eta^q k_2 N_1+\eta^{4q-2}\left(\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}\right)+\frac{\eta^{2q-2p}}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial \xi_2}+\Lambda w_3=0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}+\eta^q k_2(T_1-T_2)+\frac{\eta^{2q-2p}}{A_2}\frac{\partial S}{\partial \xi_2}=0$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial S}{\partial \xi_1}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_2}{\partial \xi_2}+2\eta^q k_2 S=0$$

$$G_1=-\frac{1}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_3}{\partial \xi_1}\right)+\frac{\nu\eta^q k_2}{A_1}\frac{\partial w_3}{\partial \xi_1}+\frac{\nu\eta^{2q-2p}}{A_2^2}\frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi_2^2}\right]$$

$$G_2=-\frac{1}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\nu}{A_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_3}{\partial \xi_1}\right)+\frac{\eta^q k_2}{A_1}\frac{\partial w_3}{\partial \xi_1}+\frac{\eta^{2q-2p}}{A_2^2}\frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi_2^2}\right]$$

$$H=\frac{1}{3(1+\nu)}\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi_1\partial \xi_2}-\frac{\eta^q k_2}{A_2}\frac{\partial w_3}{\partial \xi_2}\right] \qquad (3.4)$$

$$T_1=\frac{1}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)w_3+\nu\eta^q k_2 w_1+\frac{\nu\eta^{2q-2p}}{A_2}\frac{\partial w_2}{\partial \xi_2}\right]$$

$$T_2=\frac{1}{1-\nu^2}\left[\frac{\nu}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}-\left(\frac{\nu}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w_3+\eta^q k_2 w_1+\frac{\eta^{2q-2p}}{A_2}\frac{\partial w_2}{\partial \xi_2}\right]$$

$$S=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_2}{\partial \xi_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}-\eta^q k_2 w_2\right]$$

Здесь T_i $(i=1, 2)$, S — отнесенные к $2Eh\eta^q$ тангенциальные усилия; N_i $(i=1, 2)$ — отнесенные к $2Eh\eta^{2-2q}$ перерезывающие усилия; G_i $(i=1, 2)$, H — отнесенные к $2Eh^2\eta^{1-q}$ моменты; $w_j=u_j^1|_{\gamma=0}$, $w_3=u_3^\circ|_{\gamma=0}$; НДС оболочки задается совокупностью величин $S_{sh}=\{(T_1, T_2, G_1, G_2, N_1;\ w_1, w_3)+\eta^{q-p}(S, N_2, H;\ w_2)\}$.

Нетрудно убедиться, что соотношения (3.3), (3.4) могут быть при $q>p$ получены из уравнений изгибно-плоскостной теории оболочек [6] путем внесения в них совокупности неизвестных S_{sh}.

Уравнения (3.3), (3.4) получены с точностью до членов $O(\eta^{2-2q})$. Поэтому их решение строится с погрешностью $O(\eta^{2-3q})$. Требуя асимптотической малости этой погрешности и учитывая, что $q=0{,}5(a+1)$ $(a\geqslant 0)$, приходим к выводу, что интервал согласования частот между изгибноплоскостной теорией и теорией смешанного плоского погранслоя определяется неравенством $2p-1<a<1/3$ $(p<q<2/3)$. Отсюда следует, что при решении динамических задач в рамках теории оболочек нельзя пренебрегать членом $\eta^{4q-2}(T_1/R_1+T_2/R_2)$ в третьем уравнении (3.3).

Построим общее решение системы (3.3), (3.4). Для упрощения выкладок рассмотрим случай $q>\max(1/2, 2p)$. Возможности упрощений, связанных с этим неравенством выявятся ниже.

Исходя из четвертого уравнения (3.3) можно заключить, что $T_1=O(\eta^q)$. Учитывая это в тангенциальных уравнениях состояния в (3.4), получим

$$T_2=-w_3/R_2+O(\eta^q) \qquad (3.5)$$

Если теперь пренебречь в третьем уравнении (3.3) членами порядка $O(\eta^{5q-2}+\eta^{2q-2p})$, что ведет к асимптотически малой погрешности в решениях при $q>\max(1/2, 2p)$, то все входящие в (3.3) усилия и моменты будут определяться только через нормальный прогиб w_3. На основании этого приходим к уравнению

$$\frac{1}{A_1^4}\frac{\partial^4 w_3}{\partial \xi_1^4}-3(1-\nu^2)\Lambda' w_3+\frac{2\eta^q}{A_1^4}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}-\frac{3}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}\right)\frac{\partial^3 w_3}{\partial \xi_1^3}+$$
$$+O(\eta^{2-2q}+\eta^{5q-2}+\eta^{2q-2p})=0 \qquad (3.6)$$

где $\Lambda'=\Lambda-\eta^{4q-2}R_2^{-2}$. С помощью метода экспоненциальных представлений запишем теперь общий интеграл для нормального прогиба

$$w_3(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{bmatrix}\cos(\eta^{-p}m_1\alpha_2/R)\\ -\sin(\eta^{-p}m_1\alpha_2/R)\end{bmatrix}w_3,\quad w_3=\sum_{j=1}^{4}C_j\left[\frac{1}{A_2^{1/2}}+O(\eta^{2-3q}+\right.$$

$$\left.+\eta^{q-2p}+\eta^{4q-2})\right]\exp\left[\eta^{-q}R^{-1}\int_0^{\alpha_1}\mu_j(\alpha_1')d\alpha_1'\right]\tag{3.7}$$

$$\mu_j=A_1[3(1-\nu^2)\Lambda']^{1/4}$$

4. Частные решения уравнений плоского динамического погранслоя. Перейдем непосредственно к построению частных решений уравнений (1.8), удовлетворяющих однородным граничным условиям $s_{3i}^\circ=0$ $(i=1,3)$ на лицевых поверхностях оболочки $\gamma=\pm\eta^{1-q}$. Как следует из результатов пп. 1—3, уравнения динамического погранслоя можно брать в форме (1.8), при $p<q<3/2$, если колебания вызываются симметричной относительно срединной поверхности оболочки торцевой нагрузкой, и при $\max(p,2/3)<q<3/2$, если колебания вызываются антисимметричной относительно срединной поверхности оболочки торцевой нагрузкой.

Представим перемещения в виде

$$u_{ij}^\circ=U_{ij}(\alpha_1)\begin{bmatrix}\cos(\eta^{-p}m_1\alpha_2/R)\\ -\sin(\eta^{-p}m_1\alpha_2/R)\end{bmatrix},\quad u_{2j}^\circ=U_{2j}(\alpha_1)\begin{bmatrix}\sin(\eta^{-p}m_1\alpha_2/R)\\ \cos(\eta^{-p}m_1\alpha_2/R)\end{bmatrix}\tag{4.1}$$

Здесь $i=1,3$; j — номер частного решения. Выпишем систему (1.8) в перемещениях с учетом (4.1):

$$\frac{\beta^{-2}}{A_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_{1j}}{\partial\xi_1}\right)+\frac{1}{(1-2\nu)A_1}\frac{\partial^2U_{3j}}{\partial\xi_1\partial\gamma}+\frac{\partial^2U_{1j}}{\partial\gamma^2}+\eta^{2q-2a}\Lambda_1U_{1j}+$$
$$+\beta^{-2}\eta^q\frac{k_2}{A_1}\frac{\partial U_{1j}}{\partial\xi_1}+\eta^{2q-2p}\left(\frac{m_1}{(1-2\nu)A_1A_2}\frac{\partial U_{2j}}{\partial\xi_1}-\frac{m_1^2}{A_2^2}U_{1j}\right)=0,$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_{3j}}{\partial\xi_1}\right)+\beta^{-2}\frac{\partial^2U_{3j}}{\partial\gamma^2}+\frac{1}{(1-2\nu)A_1}\frac{\partial^2U_{1j}}{\partial\xi_1\partial\gamma}+\eta^{2q-2a}\Lambda_1U_{3j}+$$
$$+\eta^qk_2\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_{3j}}{\partial\xi_1}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial U_{1j}}{\partial\gamma}\right)-\eta^{2q-2p}\left(\frac{m_1^2}{A_2^2}U_{3j}-\frac{m_1}{(1-2\nu)A_2}\frac{\partial U_{2j}}{\partial\gamma}\right)=0,\tag{4.2}$$
$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_{2j}}{\partial\xi_1}\right)+\frac{\partial^2U_{2j}}{\partial\gamma^2}-\frac{m_1}{(1-2\nu)A_2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_{1j}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial U_{3j}}{\partial\gamma}\right)+$$
$$+\eta^{2q-2a}\Lambda_1U_{2j}+\eta^qk_2\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_{2j}}{\partial\xi_1}-\frac{m_1(3-4\nu)}{(1-2\nu)A_2}U_{1j}\right)-\beta^{-2}\eta^{2q-2p}\frac{m_1^2}{A_2^2}U_{2j}=0$$

Здесь $\beta=[(1-2\nu)/(2-2\nu)]^{1/2}$ — отношение скоростей распространения волн в упругой среде, занимающей пространство оболочки; $\Lambda_1=2(1+\nu)\Lambda$ — введенный для удобства изложения частотный параметр.

Выраженные в перемещениях условия на лицевых поверхностях оболочки $\gamma=\pm\eta^{1-q}$ выглядят так

$$\frac{\partial U_{1j}}{\partial\gamma}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_{3j}}{\partial\xi_1}=0,\quad \frac{\beta_1}{A_1}\frac{\partial U_{1j}}{\partial\xi_1}+\beta_2\frac{\partial U_{3j}}{\partial\gamma}+\beta_1\eta^qk_2U_{1j}+\beta_1\eta^{2q-2p}\frac{m_1}{A_2}U_{2j}=0\tag{4.3}$$

$$\beta_1=\nu/(1-2\nu),\quad \beta_2=(1-\nu)/(1-2\nu)$$

Применим к интегрированию (4.2), (4.3) символический метод Лурье [4, 5]. Следуя этому методу, заменим дифференцирование $A_1^{-1}\partial/\partial\xi_1$ действием оператора ∂_ξ и будем оперировать с символом ∂_ξ как с алгебраическим выражением. Возможность применения символического метода в рассматриваемой задаче с переменными коэффициентами обусловлена тем, что геометрические параметры оболочки имеют нулевую изменяемость по переменной α_1, и все зависящие от α_1 члены будут входить в символические соотношения с асимптотически малыми множителями η^q. Эти обстоятельства указывают на то, что при действии оператора ∂_ξ на члены с переменными коэффициентами в рамках допускаемой при записи (4.2), (4.3) погрешности эти коэффициенты можно считать постоянными. Прежде чем записать уравнения задачи в символической форме перейдем от (4.2) к асимптотически эквивалентной системе двух уравнений относительно U_{1j}, U_{3j} в плоскости меридиональной полосы, а также избавимся от вхождения U_{2j} во второе граничное условие (4.3). Для этого потребуем, чтобы компоненты вектора перемещений удовлетворяли следующей связи

$$\partial_\xi U_{2j}+m_1/A_2U_{1j}=0 \tag{4.4}$$

Условие (4.4) является требованием равенства нулю в пределах допускаемой погрешности угла поворота Ψ_3, т. е. требованием отсутствия ортогональных плоскости меридиональной полосы сдвиговых колебаний. Выразив в (4.2) U_{2j} через U_{1j} в соответствии с (4.4), можно непосредственно убедиться, что с точностью до $O(\eta^q)$ третье уравнение (4.2) совпадает с первым.

Выпишем теперь в символической форме асимптотически эквивалентную (4.2), (4.3) систему двух уравнений с двумя граничными условиями на лицевых поверхностях относительно U_{1j}, U_{3j}:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2U_{1j}}{\partial\gamma^2}+(\beta^{-2}\partial_{\xi\eta}{}^2+\eta^{2q-2a}\Lambda_1)U_{1j}+\frac{\partial_\xi}{1-2\nu}\frac{\partial U_{3j}}{\partial\gamma}=0\\ \beta^{-2}\frac{\partial^2U_{3j}}{\partial\gamma^2}+(\partial_{\xi\eta}{}^2+\eta^{2q-2a}\Lambda_1)U_{3j}+\frac{\partial_{\xi\eta}{}^2}{(1-2\nu)\partial_\xi}\frac{\partial U_{1j}}{\partial\gamma}=0\end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial U_{1j}}{\partial\gamma}+\partial_\xi U_{3j}=0,\qquad \beta_1\frac{\partial_{\xi\eta}{}^2}{\partial_\xi}U_{1j}+\beta_2\frac{\partial U_{3j}}{\partial\gamma}=0 \tag{4.6}$$

$$\partial_{\xi\eta}{}^2=\partial_\xi{}^2+\eta^qk_2\partial_\xi-\eta^{2q-2p}m_1{}^2A_2{}^{-2}$$

Рассмотрим случай симметричного погранслоя и будем разыскивать частные решения (4.5), (4.6) в виде

$$\begin{bmatrix}U_{1j}\\U_{3j}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{2}F_{ij}(\xi_1)\begin{bmatrix}B_{ij}(\xi_1,\partial_\xi)\operatorname{ch}r_{ij}(\xi_1,\partial_\xi)\gamma\\ \operatorname{sh}r_{ij}(\xi_1,\partial_\xi)\gamma\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Подставляя представление (4.7) в систему уравнений (4.5), находим

$$\begin{gathered}r_{1j}{}^2=-\partial_{\xi\eta}{}^2-\beta^2\eta^{2q-2a}\Lambda_1,\qquad r_{2j}{}^2=-\partial_{\xi\eta}{}^2-\eta^{2q-2a}\Lambda_1\\ B_{1j}=\partial_\xi/r_{1j},\qquad B_{2j}=-\partial_\xi r_{2j}/\partial_{\xi\eta}{}^2\end{gathered} \tag{4.8}$$

Внося теперь (4.7) с учетом (4.8) в граничные условия (4.6) и решая затем систему линейных уравнений относительно F_{ij} ($i=1,2$), приходим к следующим результатам

$$F_{1j}=\frac{r_{3j}{}^2\operatorname{sh}r_{2j}\eta^{1-q}}{\partial_{\xi\eta}{}^2\operatorname{sh}r_{1j}\eta^{1-q}}F_{2j},\qquad r_{3j}{}^2=-\partial_{\xi\eta}{}^2-\frac{1}{2}\eta^{2q-2a}\Lambda_1 \tag{4.9}$$

$$L_{RL}(F_{2j})=0,\quad L_{RL}=r_{3j}{}^4\operatorname{ch}r_{1j}\eta^{1-q}\frac{\operatorname{sh}r_{2j}\eta^{1-q}}{r_{2j}}+\partial_{\xi\eta}{}^2r_{1j}{}^2\frac{\operatorname{sh}r_{1j}\eta^{1-q}}{r_{1j}}\operatorname{ch}r_{2j}\eta^{1-q} \tag{4.10}$$

Будем искать решение операторного уравнения (4.10) в экспоненциальной форме. Возвращаясь к исходным координатам, запишем

$$F_{2j}(\alpha_1)=f_j(\alpha_1)\exp\left[\eta^{-q}R^{-1}\int_0^{\alpha_1}\varphi_j(\alpha_1{}')\,d\alpha_1{}'\right] \tag{4.11}$$

где $f_j(\alpha_1)$; $\varphi_j(\alpha_1)$ — функции нулевой изменяемости; причем функция $\varphi_j(\alpha_1)$ может содержать слагаемые с множителем η^{2q-2p}.

Подставляя теперь (4.11) в операторное уравнение (4.10) и приравнивая нулю коэффициент при η^0, приходим к выводу, что функция $\varphi_{1j}^2 = \varphi_j^2/A_1^2 - \eta^{2q-2p} m_1^2/A_2^2$ должна удовлетворять дисперсионному уравнению Рэлея — Лэмба для случая симметричной относительно γ деформации, которое получается из правой части второго соотношения (4.10) при $\partial_{\xi\eta}^2 = \varphi_{1j}^2$.

Для определения функции интенсивности $f_j(\alpha_1)$ приравняем в изучаемом выражении нулю коэффициент при η^q. Так как члены с множителем η^q входят в операторное уравнение (4.10) только через оператор $\partial_{\xi\eta}^2$, то достаточно приравнять нулю коэффициент при η^q в выражении, являющемся результатом действия $\partial_{\xi\eta}^2$ на $F_{2j}(\alpha_1)$. Вспоминая также, что исходная система уравнений (4.2) и граничные условия (4.3) выписаны с точностью до членов $O(\eta^{2q}+\eta^{3-q})$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции интенсивности.

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial f_j}{\partial \alpha_1} + \frac{k_2}{2} f_j + O(\eta^q + \eta^{3-2q}) = 0 \qquad (4.12)$$

Подставим решение (4.12) в (4.11) и выразим там функцию изменяемости φ_j через j-й корень уравнения Рэлея — Лэмба φ_{1j}. Получаем

$$F_{2j}(\alpha_1) = C_j\left[\frac{1}{A_2^{1/2}} + O(\eta^q + \eta^{3-2q})\right]\exp\left[\eta^{-q}R^{-1}\int_0^{\alpha_1} A_1\left(\varphi_{1j}^2 + \eta^{2q-2p}\frac{m_1^2}{A_2^2}\right)^{1/2} d\alpha_1'\right] \qquad (4.13)$$

где C_j — не зависящая от α_1 произвольная постоянная. Формулы (4.7) — (4.9), (4.13) представляют j-е частное решение уравнений плоского симметричного динамического погранслоя. В пределах погрешности решений (4.13) в (4.7) — (4.9) следует положить $\partial_\xi = \varphi_j/A_1$, $\partial_{\xi\eta}^2 = \varphi_{1j}^2$.

Случай плоского антисимметричного динамического погранслоя разбирается полностью аналогично. Формулы для j-го частного решения уравнений антисимметричного погранслоя могут быть получены из (4.7) — (4.9), (4.13) путем замены ch на sh и обратно, а также внесения слагаемого η^{3q-2} в O-члены формулы (4.13). При этом φ_{1j} в (4.13) — j-й корень уравнения Рэлея — Лэмба для антисимметричной по γ деформации.

Предлагаемый подход к анализу вынужденных колебаний оболочек теряет силу в окрестности частот среза ($a \geqslant 1$):

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^{(1)} = {}^1/_4\pi^2 n^2 \beta^{-2}\eta^{2a-2}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_1^{(2)} = {}^1/_4\pi^2 n^2 \eta^{2a-2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (4.14)$$

Действительно, как можно убедиться, в окрестности частот (4.14) дисперсионное уравнение Рэлея — Лэмба имеет малые по модулю корни, и для соответствующей этим корням составляющей НДС перестает быть справедливым предположение о высокой изменяемости решения вдоль α_1 — линии. Не останавливаясь на подробностях, укажем, что в окрестности этих частот оболочка может совершать так называемые высокочастотные длинноволновые колебания [7]. Вопрос об их асимптотическом исследовании требует отдельного рассмотрения.

Следует отметить, что частные решения нестационарных динамических уравнений плоского погранслоя при $q=1$ в случае оболочек вращения были получены в [8] отличным от предлагаемого здесь способом.

5. Частные решения уравнений антиплоского динамического погранслоя. Рассмотрим кратко вопрос о построении частных решений уравнений антиплоского динамического погранслоя, удовлетворяющих условию отсутствия напряжений на лицевых поверхностях. Как нетрудно показать, при $p<q<3/2$ эти уравнения могут быть представлены в форме (1.8) с остаточным членом $O(\eta^{2q}+\eta^{3-q})$ (расшифровка операторов $D_i^{(n)}$ приведена в [1]).

Будем искать перемещения оболочки в виде (4.1). Выразив в (1.8) напряжения через перемещения, приходим в случае антиплоского погранслоя к аналогичной (4.2) системе трех уравнений с граничным условием

$s_{32}^{\circ}=0$ при $\gamma=\pm\eta^{1-q}$. Если в уравнениях этой системы и в граничном условии положить

$$\partial_{\xi}U_{1j}+m_i/A_2U_{2j}=0, \quad U_{3j}=0 \tag{5.1}$$

то исходная задача сведется к асимптотически ей эквивалентному уравнению относительно U_{2j} с граничным условием, не зависящем от U_{ij} $(i=1, 3)$.

Равенства (5.1) являются требованием того, чтобы меридиональные полосы совершали только сдвиговые колебания в ортогональном к своей плоскости направлении.

Запишем уравнение и граничное условие асимптотически эквивалентной задачи в символической форме

$$\frac{\partial^2 U_{2j}}{\partial\gamma^2}+(\partial_{\xi\eta}{}^2+\eta^{2q-2a}\Lambda_1)U_{2j}=0, \qquad \frac{\partial U_{2j}}{\partial\gamma}=0 \tag{5.2}$$

Решая (5.2) в случае симметричной по γ деформации, получим

$$U_{2j}=F_{2j}(\xi_1)\,\mathrm{ch}\, r_{2j}\gamma \tag{5.3}$$

Здесь r_{2j}, F_{2j} имеют такой же вид, как и в п. 4, а r_{2j} взят при $\partial_{\xi\eta}{}^2=\varphi_{1j}{}^2$, φ_{1j} — корень дисперсионного уравнения

$$\mathrm{sh}\, r_{2j}\eta^{1-q}=0 \tag{5.4}$$

Частные решения в случае антисимметричной по γ деформации могут быть получены из (5.3), (5.4) заменой ch на sh и обратно.

6. Свойства частных решений уравнений динамического погранслоя при q<1. Рассмотрим частные решения уравнений плоского динамического погранслоя для симметричного относительно γ НДС при $a<1$. В этом случае дисперсионное уравнение может быть получено из (4.10) при $\partial_{\xi\eta}{}^2=\varphi_{1j}{}^2$. Как показывает анализ этого уравнения, при $a<1$ распространяющимся по оболочке колебаниям соответствуют частные решения с показателем изменяемости $q=a<1$. Остальные частные решения имеют показатель изменяемости $q\geqslant 1$, и ими определяется локализованный около торцов оболочки квазистатический погранслой.

Найдем асимптотику корней (4.10) при $q=a<1$, $\partial_{\xi\eta}{}^2=\varphi_{1j}{}^2$. После несложных преобразований имеем

$$\varphi_{1j}{}^2=-0{,}5(1-\nu)\Lambda_1+O(\eta^{2-2q}) \quad (j=1, 2) \tag{6.1}$$

Перейдем в (6.1) к частотному параметру Λ и, подставив полученное выражение в (4.7)—(4.9), (4.13), выпишем для продольного перемещения U_1 общее решение, определяющее распространяющееся по оболочке НДС

$$U_1=\sum_{j=1}^{2}C_j\left[\frac{1}{A_2{}^{1/2}}+O(\eta^q+\eta^{2-2q})\right]\times$$
$$\times\exp\left[(-1)^j i\eta^{-q}R^{-1}\int_0^{\alpha_1}A_1\left((1-\nu^2)\Lambda-\eta^{2q-2p}\frac{m_1{}^2}{A_2{}^2}+O(\eta^{2-2q})\right)^{1/2}d\alpha_1'\right] \tag{6.2}$$

Сопоставив (6.2) с решением (2.7), полученным на основе плоской теории оболочек, можно убедиться, что функции, стоящие в показателях экспоненты у этих решений различаются на асимптотически малую величину, если

$$\eta^{2-3q}A_1(\alpha_1{}^*)\alpha_1/R\to 0 \quad (\alpha_1{}^*\in[0, \alpha_1]) \tag{6.3}$$

Будем полагать в (6.3), что $A_1(\alpha_1{}^*)\alpha_1/R\sim\eta^0$, т. е. потребуем, чтобы согласование решений, полученных по теории оболочек и теории погранслоя происходило на отрезке, длина которого имеет порядок характерного размера оболочки (характерного радиуса ее срединной поверхности). Тогда (6.3) будет выполняться при $q<2/3$. В этом случае в (6.2) можно перенести $O(\eta^{2-3q})$ из показателя экспоненты в выражение, заключенное в квадратные скобки, которое представляет функцию интенсивности.

Проведенные рассуждения подтверждают правильность полученной в [1] на основании общего анализа границы применимости динамической теории оболочек. Отсюда можно сделать и другие интересные выводы, к формулировке которых мы вернемся несколько позже.

Обратимся теперь к уравнениям смешанного плоского динамического погранслоя (3.2) ($q=0{,}5(a+1), a<1$). Как и в п. 3, для простоты рассмотрим случай $q>\max(1/2, 2p)$. Из второй группы уравнений (3.2) при $n=1$ заключаем, что $s_{11}{}^1=O(\eta^q+\eta^{2-2q})$. Учитывая это во второй группе уравнений (3.2) при $n=5$, получим

$$s_{22}{}^1=u_3{}^\circ/R_2+O(\eta^q+\eta^{2-2q}) \tag{6.4}$$

На основании этого в пределах допускаемой погрешности в первой группе уравнений (3.2) можно считать $L(S_1)=-u_3{}^\circ/R_2{}^2$. Разрешая теперь в первой группе уравнений (3.2) напряжения через перемещения, приходим с погрешностью $O(\eta^{2q-2p}+\eta^{5q-2})$ к системе уравнений вида (4.2), в которой Λ_1 заменено на $\Lambda_1'=\Lambda_1-2(1+\nu)\eta^{4q-2}R_2{}^{-2}$. Этой системе соответствует дисперсионное уравнение Рэлея — Лэмба для антисимметричной относительно γ деформации, в котором Λ_1 заменено на Λ_1'. При $q<1$ корни этого уравнения, определяющие распространяющиеся по оболочке колебания, приближенно определяются в виде

$$\varphi_{1j}{}^4={}^3/_2(1-\nu)\Lambda_1'+O(\eta^{2-2q}) \quad (j=1,\ldots,4) \tag{6.5}$$

Переходя в (6.5) от Λ_1' к Λ' и подставляя затем φ_{1j} в формулы (4.7) — (4.9), (4.13), в которых совершен переход от ch к sh и обратно, запишем для U_3 общее решение, соответствующее распространяющимся по оболочке колебаниям

$$U_3=\sum_{j=1}^{4}C_j\left[\frac{1}{\sqrt{A_2}}+O(\eta^{2-2q}+\eta^{q-2p}+\eta^{4q-2})\right]\times$$

$$\times\exp\left[\eta^{-q}R^{-1}\int_0^{\alpha_1}A_1\sqrt[4]{3(1-\nu^2)\Lambda'+O(\eta^{2-2q})}\,d\alpha_1'\right] \tag{6.6}$$

Сравнивая (6.6) с (3.7) и проводя такие же, как и выше рассуждения, приходим к выводу, что динамическая изгибно-плоскостная теория оболочек может применяться при $q<2/3(a<1/3)$.

На основании сопоставления решений (2.7) и (3.7), полученных в рамках плоской и изгибно-плоскостной теории оболочек с решениями (6.2) и (6.6), полученных на базе теории плоского симметричного и плоского смешанного погранслоя заключаем, что при $2/3\leqslant q<1$ они отличаются лишь тем, что предлагаемые теорией оболочек аппроксимации первых корней дисперсионных уравнений типа Рэлея — Лэмба (6.1), (6.5) не дают возможности с достаточной точностью определить функцию изменяемости, т. е. другими словами, при таких q нельзя пренебрегать O — членом в показателе экспоненты в (6.2), (6.6).

Исходя из этих наблюдений, усматривается формальная возможность распространения области действия теории оболочек на полуинтервал $2/3\leqslant q<1$. А именно, для этого следует при решении динамических задач в рамках теории оболочек заменять корни дисперсионных оболочечных уравнений первыми корнями приведенных здесь дисперсионных уравнений типа Рэлея — Лэмба. Предлагаемый подход дает возможность применять теорию оболочек при $2/3\leqslant q<1$, дополнительно не привлекая теорию динамического погранслоя.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д.* Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 152–162.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 2–3. С. 151–168.
5. *Нигул У. К.* О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит // Изв. АН Эст. ССР. Сер физ.-мат. и техн. наук. 1963. № 2. С. 146–155.
6. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1979. 384 с.
7. *Бердичевский В. Л.* Высокочастотные длинноволновые колебания пластин // ДАН СССР. 1977. Т. 36. № 6. С. 1319–1322.
8. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.01.1989