

УДК 539.3  
© 1990 г.

Я. Г. САВУЛА, М. В. ЩЕРБАТЫЙ

## АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Разработке различных схем анализа чувствительности при проектировании конструкций посвящено ряд исследований [1–6]. Однако исследования по применению методов анализа чувствительности к оптимальному проектированию составных оболочек практически отсутствуют.

В данной работе для оболочек сложной формы, срединные поверхности которых представляются пересекающимися резными (монжевыми) поверхностями [7], с применением сопряженных переменных получены соотношения для определения коэффициентов чувствительности весовых, жесткостных и прочностных характеристик относительно управляющих узловых значений толщин. Построен алгоритм оптимизации составных оболочек, использующий суперэлементный подход для сокращения вычислительных затрат при повторных прямых расчетах и анализе чувствительности. На примере решения задач оптимизации для баллона кинескопа показана эффективность разработанной методики.

**1. Определение напряженно-деформированного состояния оболочки методом суперэлементов.** Рассматривается составная оболочка, срединная поверхность которой представляется в виде объединения  $n$  пересекающихся резных (монжевых) поверхностей [7]. Каждая составляющая поверхность параметризуется криволинейными координатами  $\alpha_i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i)$ ,  $\alpha_i \in \Omega_i$ , ( $i=1, \dots, n$ ). Толщина оболочки в каждой из подобластей  $\Omega_i$  аппроксимируется полиномиальными функциями  $h_{si}$  и определяется набором параметров  $\mathbf{H}_i = (h_{i1}, \dots, h_{iN_i})^T$ :  $h_{si} = h_{si}(\mathbf{H}_i, \alpha_i)$ .

Решение задачи статики в рамках математической модели типа Тимошенко осуществляется с помощью схемы метода конечных элементов (МКЭ), основные соотношения которых получены из условий минимума функционала Лагранжа [8].

В связи с этим предположим, что каждая из подобластей покрыта криволинейной четырехугольной сеткой, состоящей из элементов  $\Omega_i^e$  ( $e=1, \dots, n_i$ ). Поля перемещений аппроксимируются биквадратичными функциями по значениям в восьми узловых точках. Толщина оболочки на каждом элементе  $\Omega_i^e$  принимается постоянной и равной значению  $h_{si}$  в центре элемента. Для решения задач статики применяется многоуровневый метод суперэлементов. В роли суперэлементов нулевого уровня  $S_p$  ( $p=1, \dots, M$ ) выбираются группы элементов (или один элемент), образующие связное множество, на которых оболочка имеет постоянную толщину  $h_p$  [9]. Суперэлементы первого и высших уровней образуются путем объединения суперэлементов нулевого уровня.

Представляя функционал энергии в виде суммы его вкладов по суперэлементам  $S_p$  и используя известную процедуру МКЭ приходим к разрешающей системе уравнений относительно узловых перемещений

$$\mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{q} = \mathbf{F}(\mathbf{h}) \quad (1.1)$$
$$\mathbf{K}(\mathbf{h}) = \sum_{p=1}^M \mathbf{K}_p(h_p), \quad \mathbf{F}(\mathbf{h}) = \sum_{p=1}^M \mathbf{F}_p(h_p), \quad \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_M)^T$$

Здесь  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}_p$  — матрицы жесткости и векторы правых частей для всей конструкции и суперэлементов нулевого уровня соответственно.

При формировании матриц  $K, F$  сопряжение оболочек в суперузлах, лежащих на пересечении подобластей  $\Omega_i, \Omega_j$ , происходит путем перехода в них к общей, связанной с линией пересечения оболочек, системе координат [10].

Ввиду предположения о постоянстве толщины оболочки на каждом суперэлементе  $S_p$  матрицы жесткости  $K_p$  и векторы правых частей  $F_p$  представим в виде ( $K_{p1}, K_{p3}, F_{p0}, F_{p1}$  от толщины не зависят):

$$K_p(h_p) = h_p K_{p1} + h_p^3 K_{p3}, \quad F_p(h_p) = F_{p0} + h_p F_{p1} \quad (1.2)$$

Пусть  $k_{1p}, k_{2p}$  — количество точек суперэлемента  $S_p$ , в которых определяются перемещения и напряжения соответственно. Значения перемещений в указанных точках вычисляются с использованием формул аппроксимации. Обозначим через  $m_p$  — вектор, образованный из усилий и моментов в точках  $1, \dots, k_{2p}$  суперэлемента  $S_p$ . С учетом физических и геометрических соотношений теории оболочек запишем представление вектора  $m_p$  через вектор узловых перемещений суперэлемента

$$m_p = Q_p q_p, \quad Q_p = h_p Q_{p1} + h_p^3 Q_{p3}$$

$$Q_{pi} = (Q_{pi}^{(1)} \dots Q_{pi}^{(k_{2p})})^T \quad (i = 1, 3)$$

где  $Q_{pi}^{(k)}$  ( $k=1, \dots, k_{2p}$ ) — не зависящие от толщины матрицы размерности  $8 \times 5n_p$  ( $n_p$  — размерность вектора  $q_p$ ). В матрицах  $Q_{p1}^{(k)}$  ненулевыми являются только первые пять строк, определяющие усилия в соответствующей точке  $k$ . Матрицы  $Q_{p3}^{(k)}$  имеют ненулевые только три последние строки, определяющие моменты. Учитывая структуру матриц  $Q_{pi}^{(k)}$ , образуем на суперэлементах  $S_p$  не зависящие от толщины базовые матрицы для определения напряжений

$$R_p = (R_p^{(1)}, \dots, R_p^{(k_{2p})})^T = Q_{p1} + Q_{p3}$$

Имея матрицы  $R_p$ , несложно вычислить напряжения  $\sigma_p^{(k)} = (\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)})^T$  на лицевых поверхностях  $\alpha_{3p} = \pm h_p/2$  в  $k$ -ой точке суперэлемента

$$\sigma_p^{(k)} = a_p^{(k)} q_p \quad (1.3)$$

$$a_p^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{p1}^{(k)} \\ a_{p2}^{(k)} \\ a_{p3}^{(k)} \\ a_{p4}^{(k)} \\ a_{p5}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p1}^{(k)} + 12\alpha_{3p} R_{p6}^{(k)} \\ R_{p2}^{(k)} + 12\alpha_{3p} R_{p7}^{(k)} \\ R_{p3}^{(k)} + 12\alpha_{3p} R_{p8}^{(k)} \\ R_{p4}^{(k)} \\ R_{p5}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

где  $R_{pj}^{(k)}, j=1, \dots, 8$  — соответствующие строки матрицы  $R_p^{(k)}$ .

Не зависящие от толщины матрицы  $K_{p1}, K_{p3}, R_p$  и векторы  $F_{p0}, F_{p1}$  формируются один раз при первичном расчете конструкции.

**2. Постановка задач оптимизации.** Введем в рассмотрение  $N$ -мерный вектор управляющих параметров  $z = (z_1, \dots, z_N)^T$ , образованный из компонент векторов  $H_i$  и принадлежащий области поиска

$$D = \{z | z_i^- \leq z_i \leq z_i^+, i=1, \dots, N\}$$

Обозначим через  $M_1, M_2, M_3$  множества номеров суперэлементов нулевого уровня  $S_p$ , в которых учитываются соответственно весовые, жесткостные и прочностные характеристики оболочки.

Критерием качества служат вес (объем материала) оболочки

$$J_1(z) = \sum_{p \in M_1} J_{1p}(z) \quad (2.1)$$

ее жесткостные

$$J_2(\mathbf{z}) = \max_{p \in M_2} \max_{\alpha \in S_p} f_p(\mathbf{u}(\mathbf{z}, \alpha)) \quad (2.2)$$

или прочностные

$$J_3(\mathbf{z}) = \max_{p \in M_3} \max_{\alpha \in S_p} g_p(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}, \alpha)) \quad (2.3)$$

характеристики. Здесь и в дальнейшем индекс при  $\alpha_i$  ( $i$  — номер подобласти  $\Omega_i$ , к которой принадлежит  $S_p$ ) будем опускать;  $f_p, g_p$  — некоторые скалярные функции от перемещений и напряжений.

Дополнительные требования, предъявляемые к оболочкам, приводят к весовым, жесткостным и прочностным ограничениям

$$\psi_{11}(\mathbf{z}, \alpha) = \psi_{11}(\mathbf{z}) = J_1(\mathbf{z})/J_1^0 - 1 \leq 0, \quad \mathbf{z} \in D \quad (2.4)$$

$$\psi_{2p}(\mathbf{z}, \alpha) = f_p(\mathbf{u}(\mathbf{z}, \alpha))/J_2^0(\alpha) - 1 \leq 0, \quad \mathbf{z} \in D, \quad \alpha \in S_p, \quad p \in M_2 \quad (2.5)$$

$$\psi_{3p}(\mathbf{z}, \alpha) = g_p(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}, \alpha))/J_3^0(\alpha) - 1 \leq 0, \quad \mathbf{z} \in D, \quad \alpha \in S_p, \quad p \in M_3, \quad (2.6)$$

где  $J_i^0$  ( $i=1, 2, 3$ ) — допустимые значения соответствующих характеристик.

Задача оптимального проектирования заключается в решении одной из следующих задач: найти  $\mathbf{z}_* \in D$  такой, что

$$J_k(\mathbf{z}_*) = \min_{\mathbf{z} \in D} J_k(\mathbf{z}) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \psi_{jp}(\mathbf{z}, \alpha) &\leq 0, \quad j \neq k, \quad j, k=1, 2, 3 \\ \alpha &\in S_p, \quad p=1, j=1, p \in M_j, \quad j=2, 3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Удовлетворение ограничениям-неравенствам (2.8) представляет основную трудность при поиске минимума задачи (2.7) — (2.8) методами математического программирования. В связи с этим задача (2.7) — (2.8) преобразуется к канонической форме, в которой ограничения-неравенства заменены ограничениями-равенствами [3]. Она состоит в определении вектора управляющих параметров  $\mathbf{z}_* \in D$  из условий

$$\varphi_0(\mathbf{z}_*) = \min_{\mathbf{z} \in D} \varphi_0(\mathbf{z}), \quad \varphi_i(\mathbf{z}) = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

В роли целевой функции  $\varphi_0$  выбирается безразмерная функция

$$\varphi_0(\mathbf{z}) = J_k(\mathbf{z})/J_{0k}$$

где  $J_{0k}$  — некоторое (начальное) значение  $J_k(\mathbf{z})$  ( $k=1, 2, 3$ ). Функция  $\varphi_i$ , задающая ограничение (интегрального типа) на вес оболочки (2.4) представляется соотношением

$$\varphi_i(\mathbf{z}) = [1/2(\psi_{11}(\mathbf{z}) + |\psi_{11}(\mathbf{z})|)]^2$$

Каждое из ограничений (2.5), (2.6) (локального характера), которые необходимо проверять на суперэлементах  $S_p$ , заменяются одним эквивалентным ограничением

$$\varphi_i(\mathbf{z}) = \sum_{p \in M_e} [1/2(\chi_{ep} + |\chi_{ep}|)]^2 \quad (2.9)$$

$$\chi_{ep}(\mathbf{z}) = \max_{\alpha \in S_p} \psi_{ep}(\mathbf{z}, \alpha) \quad (e=2, 3)$$

Отметим, что взятие максимума по суперэлементам  $S_p$  в функционалах (2.2), (2.3), (2.9) осуществляется по дискретным наборам точек, в которых определяются соответственно перемещения и напряжения.

**3. Анализ чувствительности.** Следуя [2, 3, 5], рассмотрим методику определения коэффициентов чувствительности от функций  $\varphi_j$  ( $j=0, \dots, m$ ) для составных оболочечных конструкций. Отметим, что  $\varphi_j$  ( $j=0, \dots, m$ ) зависят от вектора управления  $\mathbf{z}$  посредством векторов толщин  $\mathbf{h}$  суперэлементов  $S_p$  и узловых перемещений  $\mathbf{q}$ , т. е.  $\varphi_j(\mathbf{z}) = \varphi_j(\mathbf{h}(\mathbf{z}), \mathbf{q}(\mathbf{z}))$ .

Исследуем влияние вариации переменных проектирования на характеристики конструкций. В силу предположения о непрерывности функции  $\mathbf{h}(\mathbf{z})$  и неособенности матрицы  $\mathbf{K}$  системы (1.1) малые вариации  $\delta \mathbf{z}$  приводят к малым вариациям  $\delta \mathbf{h}$ ,  $\delta \mathbf{q}$ . Первые вариации функций  $\varphi_j$  запишутся

в виде

$$\delta\varphi_j = \frac{\delta\varphi_j^T}{\delta\mathbf{q}} \delta\mathbf{q} + \frac{\delta\varphi_j}{\delta\mathbf{h}} \frac{d\mathbf{h}}{dz} \delta z \quad (j=0, \dots, m) \quad (3.1)$$

Линеаризованные уравнения, соответствующие (1.1) принимают вид

$$\mathbf{K} \delta\mathbf{q} = - \left( \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{h}} \mathbf{q} - \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{h}} \right) \frac{d\mathbf{h}}{dz} \delta z \quad (3.2)$$

Уравнения (3.2) можно рассматривать как условие для определения  $\delta\mathbf{q}$  через  $\delta z$ . Их необходимо решать столько раз какова размерность  $N$  вектора управления  $\mathbf{z}$ . Однако в случае  $N > m$  более рациональным является подход, основанный на введении сопряженных переменных [5]. Определим для каждой функции  $\varphi_j$  вектор-столбец  $\lambda_j$  как решение сопряженной системы уравнений

$$\mathbf{K}(\mathbf{h}) \lambda_j = \partial\varphi_j^T / \partial\mathbf{q} \quad (j=0, \dots, m) \quad (3.3)$$

Транспонировав, скалярно умножив на  $\delta\mathbf{q}$  обе части уравнения (3.3) и учитывая симметрию матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  и уравнения (3.2) получим соотношения для  $(\partial\varphi_j / \partial\mathbf{q}) \delta\mathbf{q}$ , выраженные через  $\delta z$ :

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial\mathbf{q}} \delta\mathbf{q} = -\lambda_j^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{h}} \mathbf{q} - \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{h}} \right) \frac{d\mathbf{h}}{dz} \delta z \quad (j=0, \dots, m)$$

После подстановки в (3.1) последнего соотношения имеем

$$\begin{aligned} \delta\varphi_j &= \mathbf{I}_j^T \delta z \\ \mathbf{I}_j &= \left[ \left( \frac{\partial\varphi_j}{\partial\mathbf{h}} - \lambda_j^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{h}} \mathbf{q} - \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{h}} \right) \right) \frac{d\mathbf{h}}{dz} \right]^T \end{aligned} \quad (3.4)$$

Компоненты векторов  $\mathbf{I}_j$  называются коэффициентами чувствительности функций  $\varphi_j$  по отношению к изменениям соответствующих переменных проектирования.

Использование многоуровневого метода суперэлементов для расчета оболочки значительно усиливает вычислительную эффективность при анализе чувствительности. Остановимся на вычислительных аспектах определения векторов чувствительности  $\mathbf{I}_j$  для прочностных характеристик. Тогда  $\varphi_j = \varphi_j(\mathbf{h}(\mathbf{z}), \mathbf{q}(\mathbf{z}))$ . Правая часть сопряженной системы уравнений (3.3) в этом случае определяется в виде (суммирование проводится как при формировании вектора нагрузки  $\mathbf{F}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_j^T}{d\mathbf{q}} &= \sum_{p=1}^M \mathbf{d}_p \\ \mathbf{d}_p &= \begin{cases} 0, & p \notin M_3 V (p \in M_3 \wedge \chi_{3p} \leq 0) \\ 2\chi_{3p} \partial\chi_{3p} / \partial\mathbf{q}_p, & p \in M_3 \wedge \chi_{3p} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть  $k$  — номер точки суперэлемента  $S_p$ ,  $k \in \{1, \dots, k_{2p}\}$  в которой  $\psi_{3p}$  принимает максимальное значение. Принимая во внимание (1.3), (1.4) получим

$$\frac{\partial\chi_{3p}}{\partial\mathbf{q}_p} = \frac{\partial\psi_{3p}}{\partial\sigma_p^{(k)}} \mathbf{a}_p^{(k)}$$

где  $\mathbf{a}_p^{(k)}$  определяется при  $\alpha_{3p} = h_p/2$  или  $\alpha_{3p} = -h_p/2$  (в зависимости от того на какой из поверхностей в точке с номером  $k$  —  $\psi_{3p}$  принимает максимальное значение). Уравнение (3.3) для определения  $\lambda_j$  отличается от уравнения МКЭ (1.1) лишь правой частью. Для его решения используется многоуровневый суперэлементный подход. При этом определение  $\lambda_j$  заключается в прямом ходе только над вектором  $\mathbf{d}_p$  (преобразование к треугольному виду матрицы жесткости суперэлементов всех уровней получены при определении для данного  $\mathbf{z}$  перемещений  $\mathbf{q}$ ) и обратном ходе.

Компоненты вектора  $\partial \varphi_j^T / \partial \mathbf{h} = (\partial \varphi_j / \partial h_1, \dots, \partial \varphi_j / \partial h_M)^T$  определяются с помощью соотношений, аналогичных (3.5), где вместо векторов  $\partial \chi_{3p}^T / \partial \mathbf{q}_p$  вычисляются скалярные производные  $\partial \chi_{3p} / \partial h_p$ . На основании (1.3), (1.4) имеем

$$\frac{\partial \chi_{3p}}{\partial h_p} = \frac{\partial \psi_{3p}}{\partial \sigma_p^{(k)}} \mathbf{c}_p^{(k)}, \quad \mathbf{c}_p^{(k)} = \frac{12\alpha_{3p}}{h_p} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{p6}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{p7}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{p8}^{(k)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_p$$

Рассмотрим случай, когда функционал от напряжений выступает в роли критерия качества. Пусть  $p=r$  номер суперэлемента  $S_p$ , а  $k$  номер узла суперэлемента, в котором  $g_p$  принимает максимальное значение, т. е.  $J_0 = g_r^{(k)}$ . Правая часть сопряженной системы уравнений определяется соотношением

$$\frac{\partial \varphi_0^T}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{p=1}^M \mathbf{d}_p, \quad \mathbf{d}_p^T = \begin{cases} 0, & p = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, M \\ \frac{1}{J_{03}} \frac{\partial g_r^{(k)}}{\partial \sigma_p^{(k)}} \mathbf{a}_p^{(k)}, & p = r \end{cases}$$

Производная  $\partial \varphi_0^T / \partial \mathbf{h}$  определяется вектором размерности  $M$  с отличной от нуля  $r$ -ой компонентой

$$\frac{\partial \varphi_0^T}{\partial \mathbf{h}} = \left[ 0, \dots, 0, \frac{1}{J_{03}} \frac{\partial g_r^{(k)}}{\partial \sigma_r^{(k)}} \mathbf{c}_r^{(k)}, 0, \dots, 0 \right]^T$$

Остановимся на вычислении второго слагаемого в (3.4), которое обозначим

$$\mathbf{b}_j = (b_{j1}, \dots, b_{jM}) = -\lambda_j^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{d\mathbf{h}} \mathbf{q} - \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{h}} \right)$$

Учитывая представление (1.2) матриц жесткости и векторов нагрузки на суперэлементах  $S_p$  получим следующие выражения для компонент

$$b_{jp} = -\lambda_{jp}^T [(\mathbf{K}_{p1} + 3h_p^2 \mathbf{K}_{p3}) \mathbf{q}_p - \mathbf{F}_{p1}] \quad (p=1, \dots, M)$$

где векторы  $\lambda_{jp}$  — относящиеся к суперэлементу  $S_p$  компоненты вектора сопряженной переменной  $\lambda_j$ .

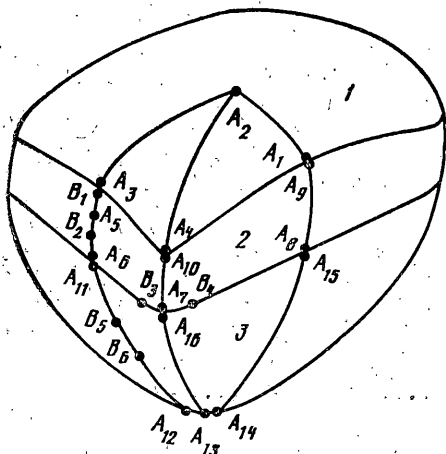
Заметим, что в случае, когда  $\varphi_j$  зависит только от  $\mathbf{h}(\mathbf{z})$  (т. е. для весовых характеристик) при определении  $\lambda_j$  не требуется вычислять сопряженную переменную  $\lambda_j$ . Если функция  $\varphi_j$  зависит только от  $\mathbf{q}(\mathbf{z})$  (для жесткостных характеристик) в (3.4) отсутствует первое слагаемое.

Укажем, что нет необходимости определять компоненты  $\partial \varphi_j / \partial h_p$  и  $b_{jp}$ ,  $j=0, \dots, m$  для тех номеров  $p$  для которых  $dh_p/dz=0$  (т. е. толщина  $h_p$  суперэлемента  $S_p$  не зависит от  $\mathbf{z}$ ).

В отличие от [3, 4] в данной работе для получения выражений коэффициентов чувствительности рассматриваемых характеристик оболочки, расчет которой осуществляется с применением метода суперэлементов, не осуществляется разделение узловых перемещений  $\mathbf{q}_p$  на граничные и внутренние. Такое разделение осуществляется в алгоритме решения системы уравнений (1.1) и, следовательно, сопряженных систем уравнений (3.3). Как показывают исследования авторов такой подход по количеству вычислений не уступает методике [3, 4]; однако выражения для векторов чувствительности (а следовательно программная реализация) более простые.

Вычислительная эффективность алгоритма оптимизации усиливается, когда толщина некоторых подобластей (или ряда суперэлементов  $S_p$ , которые объединяются в суперэлементы более высоких уровней) остается фиксированной в процессе оптимизации. В этом случае при повторных расчетах для указанных суперэлементов обработку матриц жесткости можно начать сразу на более высоких уровнях [9].

4. Численный пример. В качестве примера приведем результаты решения задачи весовой оптимизации при ограничениях на напряжения и оптимизации напряжений при ограничении на вес для составной оболочки баллона кинескопа. Баллон, вид которого показан на фигуре (1 — экран, 2 — борт, 3 — конус), моделируется тонкостенной оболочкой, образованной пересечением трех резных поверхностей. Образующей и направляющей экрана являются дуги  $A_1A_2$ ;  $A_2A_3$  окружностей одинакового радиуса с центром на оси баллона. Образующими для борта и конуса выбираются ветви парабол, проходящих соответственно через точки  $B_1, B_2, A_6$  и  $A_6, B_5, B_6$ . Направляющие борта и конуса представляются в виде плавного сопряжения дуг  $A_6B_3, B_3B_4, B_4A_8$  трех окружностей различных радиусов.



Толщина в каждой из подобластей аппроксимируется полиномиальными функциями, коэффициенты которых определяются значениями толщин  $z_j$  в точках  $A_j$  ( $j=1, \dots, 16$ ). Вдоль дуг  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$  экрана толщина изменяется по квадратичному закону. На борте и конусе толщина изменяется линейно вдоль образующих и квадратично вдоль направляющих между парами точек  $A_6, A_7$ ;  $A_7, A_8$ ;  $A_{11}, A_{16}$ ;  $A_{16}, A_{15}$ .

Задачи оптимизации решались методом внешних штрафных функций в сочетании с методом сопряженных градиентов Флетчера — Пауэлла [11]. Весовые и прочностные характеристики учитывались для экрана и борта. В качестве параметров оптимизации выбирались толщины  $z_i$  в точках  $A_i$  ( $i=1, \dots, 10$ ). Начальные значения толщин (в мм) выбирались следующими: 9,24; 8,5; 9,76; 10,27; 12,87; 9,5; 9,5; 9,5; 12,81; 12,94.

Ниже приведены результаты решения различных задач оптимизации: значения толщин  $z_i$  (мм) в точках  $A_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ), количество  $k$  прямых расчетов конструкции, улучшение критерия качества  $d$  (%). (Таблица.)

Задачи 1, 2 заключаются в оптимальном подборе толщин  $z_i$  в точках  $A_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) и толщин  $z_i$  в точках  $A_i$  ( $i=1, \dots, 10$ ) из условий минимума веса баллона при ограничениях на напряжения  $[\sigma_-] \leq \sigma_i \leq [\sigma_+]$  ( $i=1, 2$ ). Выбирались следующие

Таблица

	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$k$	$d$
1	8,09	5,44	6,02	6,65	132	16
2	6,89	5,0	5,72	5,0	160	47
3	10,52	9,70	8,26	9,96	37	23

ограничения на параметры управления и напряжения:  $z_i^- = 5$  мм ( $i=1, \dots, 10$ );  $z_i^+ = 15$  мм ( $i=1, 3, 4, \dots, 10$ );  $z_2^+ = 10$  мм;  $[\sigma_-] = -29,42$  МПа;  $[\sigma_+] = 8,83$  МПа. В процессе оптимизации активными становятся растягивающие напряжения  $\sigma_{11}$  (в начальной конструкции максимальное растягивающее напряжение равняется 7,35 МПа). В задаче 2 начальные толщины  $z_5, \dots, z_{10}$  в точках  $A_5, \dots, A_{10}$  равнялись 5,0 мм, что соответствует решению задачи весовой оптимизации при управлении толщиной борта. В результате управления толщиной экрана и борта параметры  $z_i$  ( $i=5, \dots, 10$ ) практически не изменились. В задаче оптимизации растягивающих напряжений (задача 3) управление осуществляется толщинами экрана  $z_i$  в точках  $A_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ). При этом допустимый вес  $J_1^0$  баллона равнялся его весу при начальных значениях толщин.

Результаты расчетов подтверждают эффективность разработанной методики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
2. Баничук Н. В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 302 с.
3. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование/Механические системы и конструкции. М.: Мир, 1983. 478 с.
4. Arora J. S., Govil A. K. An efficient method for optimal structural desing by substructuring // Intern. J. Comp. and Struct. 1977. V. 7, No. 4 P. 505–515.
5. Haug E. J., Arora J. S. Design sensitivity analysis of elastic mechanical systems // Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng. 1978. No. 15. P. 35–62.

6. Шмит Л. А., Миура Х. Новая программа ACCESSI для анализа и синтеза конструкций // Ракетная техника и космонавтика // 1974. Т. 14, № 5. С. 142–155.
7. Савула Я. Г. Представление срединных поверхностей оболочек резными поверхностями // Прикл. механика. 1984. Вып. 20, № 12. С. 70–75.
8. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
9. Муха И. С., Савула Я. Г., Щербатый М. В. Метод суперэлементов в задачах оптимизации оболочек из условий прочности // Мат. методы и физ.-мех. поля. Киев: 1987. Вып. 25. С. 66–71.
10. Григоренко Я. М., Муха И. С., Савула Я. Г., Флейшман Н. П. Упругое равновесие составных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 7. С. 33–36.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 536 с.

Львов

Поступила в редакцию  
16.05.1988