

УДК 629.7.023 : 539.3

© 1990 г.

Л. П. ЖЕЛЕЗНОВ, В. В. КАБАНОВ

ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ КАК ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Интегрированием уравнений, полученных приравниванием нулю компонентов линейной деформации, выведены явные выражения для перемещений элементов оболочки вращения как твердых тел. Полученные выражения были использованы при построении функций формы эффективного конечного элемента сферической оболочки. На основе этого элемента разработан алгоритм исследования методом конечных элементов напряженно-деформированного состояния сферических оболочек. Приведено сравнение эффективности разработанного элемента с элементом, не учитывающим смещение его как твердого тела.

1. Перемещения конечных элементов оболочек вращения как твердых тел. Выпишем соотношения для деформаций и изменений кривизн оболочки вращения [1]:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \psi u + k_2 w \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \psi v$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha}, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta} + \psi \vartheta_1$$

$$\chi_3 = 2 \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \alpha} + 2k_1 \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \psi v \right)$$

$$\vartheta_1 = - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 u$$

$$\vartheta_2 = - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + k_2 v, \quad \psi = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

где A, B — параметры Ляме; u, v, w — перемещения точек поверхности оболочки в направлении α, β, z — соответственно; k_1, k_2 — главные кривизны срединной поверхности.

Рассмотрим оболочку вращения, для которых кривизны k_1, k_2 и параметр ψ имеют вид [1]:

$$k_1 = 1/A, \quad k_2 = \sin \alpha / B, \quad \psi = \cos \alpha / B. \quad (1.2)$$

С учетом (1.2) перепишем выражения (1.1):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} (u_\alpha + w), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} v_\beta + \psi u + k_2 w$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{A} v_\alpha + \frac{1}{B} u_\beta - \psi v, \quad \chi_1 = \frac{1}{A} \vartheta_{1\alpha}$$

$$\chi_2 = \frac{1}{B} \left(k_2 v_\beta - \frac{1}{B} w_{\beta\beta} \right) + \frac{\psi}{A} (u - w_\alpha) \quad (1.3)$$

$$\chi_3 = \frac{2}{B} \left(k_1 u_\beta - \frac{1}{A} w_{\alpha\beta} \right) - 2\psi \left(k_2 v - \frac{1}{B} w_\beta \right) - \frac{2k_2}{A} v_\alpha$$

где α, β в индексах здесь и далее означают дифференцирование по α и β . При перемещении оболочки как твердого тела деформации и изменения кривизн равны нулю, т. е.

$$\varepsilon_1=0, \quad \varepsilon_2=0, \quad \varepsilon_3=0, \quad \chi_1=0, \quad \chi_2=0, \quad \chi_3=0 \quad (1.4)$$

Проинтегрируем эту систему. Из уравнения $\chi_1 = \vartheta_{1\alpha} = 0$ находим

$$\vartheta_1 = f_1(\beta) \quad (1.5)$$

Из уравнения $\varepsilon_1 = 0$ следует

$$w = -u_\alpha \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.5), находим

$$u_{\alpha\alpha} + u = A f_1(\beta) \quad (1.7)$$

Решение однородного уравнения (1.7) имеет вид

$$u_0 = f_2(\beta)c + f_3(\beta)s, \quad c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha$$

Методом вариации постоянных получаем решение уравнения (1.7):

$$u = f_1(\beta)(\psi_1 c + \psi_2 s) + f_3(\beta)c + f_2(\beta)s \quad (1.8)$$

$$\psi_1 = - \int A s d\alpha, \quad \psi_2 = \int A c d\alpha$$

Из (1.6) следует

$$w = -f_1(\beta)(\psi_2 c - \psi_1 s) + f_3(\beta)s - f_2(\beta)c \quad (1.9)$$

Из уравнения $\varepsilon_2 = 0$ находим

$$v_\beta = -B\psi u - Bk_2 w = -f_1(\beta)\psi_1 - f_3(\beta) \quad (1.10)$$

Подставляя (1.8), (1.9) в уравнение $\varepsilon_3 = 0$, с учетом $\varepsilon_3 = 0$ получаем (аргумент у функции $f_i(\beta)$ в дальнейшем опускаем) $(B - \psi_2)f_{1\beta} - f_{2\beta} = 0$, откуда

$$f_2 = f f_1 + c_5, \quad f = B - \psi_2 \quad (1.11)$$

Подставляя (1.8), (1.9), (1.10) в уравнения $\chi_2 = 0$, находим

$$-A s (f_{3\beta\beta} + f_3) + (A c B - A \psi_1 s) (f_{1\beta\beta} + f_1) = 0$$

Откуда получаем

$$f_{3\beta\beta} + f_3 = 0, \quad f_{1\beta\beta} + f_1 = 0$$

Решая эти уравнения, находим

$$f_3 = C_1 c_1 + C_2 s_1, \quad f_1 = C_3 c_1 + C_4 s_1, \quad s_1 = \sin \beta, \quad c_1 = \cos \beta \quad (1.12)$$

Из (1.11), (1.10) с учетом (1.12) находим

$$f_2 = f C_3 c_1 + f C_4 s_1 + C_5 \quad (1.13)$$

$$v = -C_3 \psi_1 s_1 + C_4 \psi_1 c_1 - C_1 s_1 + C_2 c_1 + f_4(\alpha) \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в уравнение $\varepsilon_3 = 0$, находим

$$B f_{4\alpha} - A c f_4 = 0$$

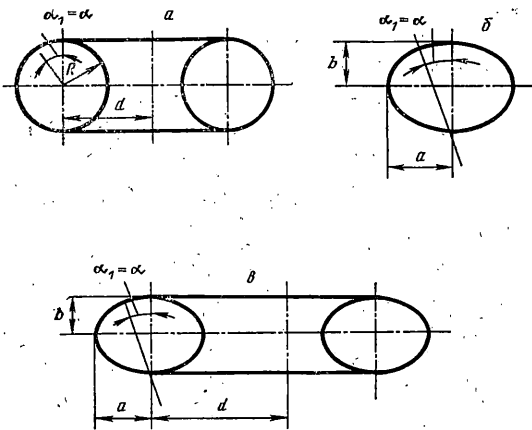
или с учетом (1.1):

$$f_{4\alpha} - B\alpha/B f_4 = 0$$

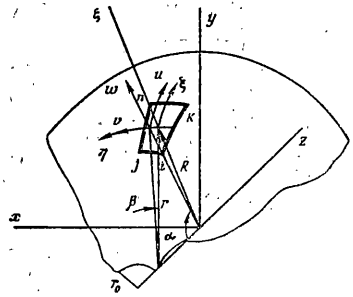
Отсюда получаем

$$f_4 = B C_6 \quad (1.15)$$

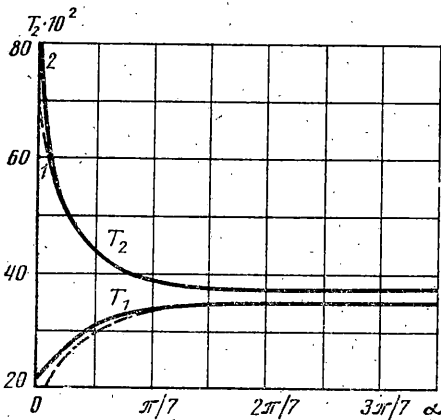
Подставляя (1.12), (1.13), (1.15) в (1.8), (1.9), (1.14), получаем выражения для перемещений точек срединной поверхности оболочки как



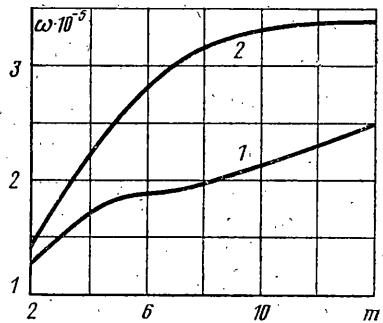
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

твёрдого тела

$$\begin{aligned}
 u &= C_3(\psi_1 c + Bs)c_1 + C_4(\psi_1 c + Bs)s_1 + C_1 c_1 c + C_2 s_1 c + C_5 s \\
 v &= -C_3 \psi_1 s_1 + C_4 \psi_1 c_1 - C_1 s_1 + C_2 c_1 + BC_6 \\
 w &= C_3(\psi_1 s_1 - Bc)c_1 + C_4(\psi_1 s_1 - Bc)s_1 + C_1 c_1 s + C_2 s_1 s - C_5 c
 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Эти выражения удовлетворяют уравнениям (1.4) и, следовательно, представляют собой перемещения элемента как твёрдого тела.

Из (1.16) следуют различные случаи:

1. Тор (фиг. 1, а):

$$\begin{aligned}
 A &= R, \quad B = d + Rs, \quad k_1 = 1/A, \quad k_2 = s/B \\
 \psi &= c/B, \quad \psi_1 = Rc, \quad \psi_2 = Rs \\
 u &= C_3(R + ds)c_1 + C_4(R + ds)s_1 + C_5 s + C_1 c_1 c + C_2 s_1 c \\
 v &= -C_3 R c s_1 + C_4 R c c_1 - C_1 s_1 + C_2 c_1 + C_6(d + Rs) \\
 w &= -C_3 d c_1 c - C_4 d s_1 c - C_5 c + C_1 c_1 s + C_2 s_1 s
 \end{aligned} \quad (1.17)$$

2. Эллипсоид вращения (фиг. 1, б):

$$\begin{aligned}
 A &= a^2 b^2 / d^3, \quad B = a^2 s / d, \quad d^2 = a^2 s^2 + b^2 c^2 \\
 k_1 &= d^3 / a^2 b^2, \quad k_2 = s / B, \quad \psi = c / B, \quad \psi_1 = b^2 c / d, \quad \psi_2 = a^2 s / d \\
 u &= C_3 d c_1 + C_4 d s_1 + C_5 s + C_1 c_1 c + C_2 s_1 c \\
 v &= -C_3 b^2 (c/d) s_1 + C_4 b^2 (c/d) c_1 - C_1 s_1 + C_2 c_1 + a^2 (s/d) C_6 \\
 w &= -C_3 [(a^2 - b^2) / d] s c c_1 - C_4 [(a^2 - b^2) / d] s c s_1 - C_5 c + C_1 c_1 s + C_2 s_1 s
 \end{aligned} \quad (1.18)$$

3. Эллиптический тор (фиг. 1, е).

$$\begin{aligned}
 A &= a^2 b^2 / d^3, \quad B = r + (a^2 / d) s, \quad k_1 = 1 / A = d^3 / (a^2 b^2), \quad k_2 = s / B \\
 \psi &= c / B, \quad \psi_1 = b^2 c / d, \quad \psi_2 = a^2 s / d \\
 u &= C_3 (d + r s) c_1 + C_4 (d + r s) s_1 + C_1 c_1 c + C_2 s_1 c + C_5 s \\
 v &= -C_3 b^2 (c / d) s_1 + C_4 b^2 (c / d) c_1 - C_1 s_1 + C_2 c_1 + (r + a^2 s / d) C_6 \\
 w &= -C_3 [(a^2 - b^2) / d] s c + r c c_1 - C_4 [(a^2 - b^2) / d] s c + r c s_1 + C_1 c_1 s + C_2 s_1 s - C_5 c
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

4. Сфера

$$\begin{aligned}
 A &= R, \quad B = R s, \quad k_1 = k_2 = 1 / R, \quad \psi = c / B \\
 \psi_1 &= R c, \quad \psi_2 = R s \\
 u &= C_3 R c_1 + C_4 R s_1 + C_1 c c_1 + C_2 c s_1 + C_5 s \\
 v &= -C_3 R c s_1 + C_4 R c c_1 - C_1 s_1 + C_2 c_1 + C_6 R s \\
 w &= C_1 c_1 s + C_2 s_1 s - C_5 c
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

5. Конус (γ — угол конусности оболочки):

$$\begin{aligned}
 A &= 1, \quad B = r + x c, \quad \alpha = (\pi / 2) \gamma, \quad \psi = -s x \\
 \psi_2 &= c x, \quad \psi = c / B, \quad k_2 = s / B, \quad k_1 = 0 \\
 u &= (C_4 r s + C_2 c) s_1 + (C_3 r s + C_1 c) c_1 + C_5 s \\
 v &= (C_3 x s - C_1) s_1 + (C_2 - C_4 x s) c_1 + (r + x c) C_6 \\
 w &= -C_3 (x + r c) c_1 - C_4 (x + r c) s_1 - C_5 c + C_1 c_1 s + C_2 s_1 s
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

6. Цилиндр (x — продольная координата):

$$\begin{aligned}
 A &= 1, \quad B = R, \quad \alpha = \pi / 2, \quad \psi_1 = x, \quad \psi_2 = 0 \\
 \psi &= 0, \quad k_2 = 1 / R, \quad k_1 = 0 \\
 u &= R C_3 c_1 + R C_4 s_1 + C_5 \\
 v &= -C_3 x s_1 + C_2 x c_1 - C_5 s_1 + C_4 c_1 + R C_6 \\
 w &= C_3 x c_1 + C_4 x s_1 + C_1 c_1 + C_2 s_1
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Если положить $C_3 = -C_3$, $C_1 = -C_1$, $C_4 = -C_4$ то получим решение [2], [3].

2. Конечный элемент. Определив функции для перемещений элемента как твердого тела, получим функции перемещений четырехугольного криволинейного конечного элемента естественной кривизны оболочки вращения. Используя билинейную аппроксимацию для мембранных перемещений и бикубическую аппроксимацию для прогиба, с учетом (1.16) запишем выражения для полных перемещений точек конечного элемента с учетом смещения его как твердого тела

$$\begin{aligned}
 u &= a_1 \alpha \beta + a_2 \alpha + a_3 \beta + a_4 (\psi_1 c + B s) c_1 + a_6 (\psi_1 c + B s) s_1 + a_{20} s + a_{23} c s_1 + a_{24} c c_1 \\
 v &= a_5 \alpha \beta + a_6 \psi_1 c_1 + a_7 \beta + a_8 B - a_4 \psi_1 s_1 + a_{23} c_1 - a_{24} s_1 \\
 w &= a_9 \alpha^3 \beta^3 + a_{10} \alpha^3 \beta^2 + a_{11} \alpha^3 \beta + a_{12} \alpha^3 + a_{13} \alpha^2 \beta^3 + a_{14} \alpha^2 \beta^2 + a_{15} \alpha^2 \beta + a_{16} \alpha^2 + a_{17} \alpha \beta^3 + \\
 &+ a_{18} \alpha \beta^2 + a_{19} \alpha \beta - a_{20} c + a_{21} \beta^3 + a_{22} \beta^2 + a_{23} s s_1 + a_{24} s c_1 + a_4 (\psi_1 s - B c) c_1 + a_6 (\psi_1 s - B c) s_1
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

В качестве примера рассмотрим сферическую оболочку радиуса R , толщины h . На основе полученных функций (2.1) разработан конечный элемент и алгоритм исследования моментного напряженно-деформированного состояния оболочки при произвольном неосесимметричном нагружении. Оболочка в районе полюсов имеет малые вырезы радиуса r_0 , нагружена системой поверхностных нагрузок $q_i(\alpha, \beta)$, локальных сил P_i и моментов M_i ($i=1, 2, 3$ — соответствуют направлениям осей α, β, ζ соответственно).

Разобьем оболочку в меридиональном направлении на m , а в широтном на n частей, так чтобы стороны элементов совпадали с линиями главных кривизн. Таким образом оболочку представим набором $m \times n$ криволинейных четырехугольных конечных элементов (фиг. 2).

Для элемента сферической оболочки функции (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned}
 u' &= a_1 \alpha \beta + a_2 \alpha + a_3 \beta + a_4 c_1 + a_6 s_1 + a_{20} s + a_{23} c s_1 + a_{24} c c_1 \\
 v' &= a_5 \alpha \beta + a_6 c c_1 + a_7 \beta + a_8 s - a_4 c s_1 + a_{23} c_1 - a_{24} s_1
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$w' = a_9 \alpha^3 \beta^3 + a_{10} \alpha^3 \beta^2 + a_{11} \alpha^3 \beta + a_{12} \alpha^3 + a_{13} \alpha^2 \beta^3 + a_{14} \alpha^2 \beta^2 + a_{15} \alpha^2 \beta + a_{16} \alpha^2 + a_{17} \alpha \beta^3 + a_{18} \alpha \beta^2 + a_{19} \alpha \beta - a_{20} c + a_{21} \beta^3 + a_{22} \beta^2 + a_{23} s s_1 + a_{24} s c_1, \quad u' = k u, \quad v' = k v$$

$$w' = k w, \quad k = 1/R$$

В матричной форме (2.2) имеют вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{P} \mathbf{a} \quad (2.3)$$

где \mathbf{P} — матрица (3×24), $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$ — вектор перемещений точек конечного элемента, $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_{24}\}^T$ — вектор неизвестных коэффициентов полиномов.

Используя решение [3], запишем выражения для перемещений, деформаций, потенциальной энергии элемента оболочки:

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}_1 \mathbf{u}^+, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

$$\Pi = W - A = 1/2 \iint \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varepsilon} ds - \iint \mathbf{q}^T \mathbf{u} ds - \mathbf{P}_1 \mathbf{u}_l^+ = 1/2 (\mathbf{u}^+)^T \mathbf{K} \mathbf{u}^+ - \mathbf{Q} \mathbf{u}^+ - \mathbf{Q}_l \mathbf{u}_l^+$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$, $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3\}^T$ — вектор деформаций и кривизн и вектор внутренних усилий и моментов, $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T$ — вектор внешней поверхностной нагрузки, $\mathbf{Q}_l = \{P_{11}, P_{12}, P_{13}, M_{11}, M_{12}, M_{13}\}^T$ — вектор локальных сил и моментов, $\mathbf{u}^+ = \{u_i, v_i, w_i, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, w_{\alpha\beta i}, u_n, \dots, u_k, \dots, u_n, \dots, w_{\alpha\beta n}\}^T$ — вектор узловых перемещений конечного элемента, \mathbf{D} — матрица упругих постоянных $\mathbf{u}_l^+ = \{u_l, v_l, w_l, \vartheta_{1l}, \vartheta_{2l}, w_{\alpha\beta l}\}^T$, \mathbf{B} — матрица (24×24), элементы которой b_{ij} имеют вид (p_{ij} — элементы матрицы \mathbf{P}):

$$b_{1j} = p_{1j}, \quad b_{2j} = p_{2j}, \quad b_{3j} = p_{3j}, \quad b_{4j} = (p_{3j})_{\alpha} - p_{1j}$$

$$b_{5j} = (p_{3j})_{\beta} - p_{2j}, \quad b_{6j} = (p_{3j})_{\alpha\beta}, \quad \alpha = -\alpha_1, \quad \beta = -\beta_1 \quad (2.5)$$

$$b_{7j} = p_{1j}, \quad b_{8j} = p_{2j}, \quad b_{9j} = p_{3j}, \quad b_{10j} = (p_{3j})_{\alpha} - p_{1j}$$

$$b_{11j} = (p_{3j})_{\beta} - p_{2j}, \quad b_{12j} = (p_{3j})_{\alpha\beta}, \quad \alpha = -\alpha, \quad \beta = \beta_1$$

$$b_{13j} = p_{1j}, \quad b_{14j} = p_{2j}, \quad b_{15j} = p_{3j}, \quad b_{16j} = (p_{3j})_{\alpha} - p_{1j}$$

$$b_{17j} = (p_{3j})_{\beta} - p_{2j}, \quad b_{18j} = (p_{3j})_{\alpha\beta}, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = -\beta_1$$

$$b_{19j} = p_{1j}, \quad b_{20j} = p_{2j}, \quad b_{21j} = p_{3j}, \quad b_{22j} = (p_{3j})_{\alpha} - p_{1j}$$

$$b_{23j} = (p_{3j})_{\beta} - p_{2j}, \quad b_{24j} = (p_{3j})_{\alpha\beta}, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1$$

$$j = 1, \dots, 24, \quad \alpha = (\pi - \alpha_0)/2m, \quad \beta = \pi/n$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}^{-1})^T \int \int \mathbf{P}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{P} ds \mathbf{B}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \int \int \mathbf{q}^T \mathbf{P} ds \mathbf{B}^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} (\dots)_{\alpha} & 0 & (\dots) \\ \operatorname{ctg} \alpha (\dots) & \frac{1}{\sin \alpha} (\dots)_{\beta} & (\dots) \\ \frac{1}{\sin \alpha} (\dots)_{\beta} & (\dots)_{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha (\dots) & 0 \\ \frac{1}{R} (\dots)_{\alpha} & 0 & -\frac{1}{R} (\dots)_{\alpha\alpha} \\ \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R} (\dots) & \frac{1}{R \sin \alpha} (\dots)_{\beta} & -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} (\dots)_{\beta\beta} - \operatorname{ctg} \alpha (\dots)_{\alpha} \right) \\ \frac{2}{R \sin \alpha} (\dots)_{\beta} & \frac{2}{R} ((\dots)_{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha (\dots)) & -\frac{2}{R \sin \alpha} ((\dots)_{\alpha\beta} - \operatorname{ctg} \alpha (\dots)_{\beta}) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Здесь \mathbf{K} — матрица жесткости конечного элемента, \mathbf{Q} — вектор обобщенных узловых сил, \mathbf{A} — матрица дифференцирования.

Суммируя потенциальные энергии отдельных элементов и применяя принцип возможных перемещений ($\delta \Pi = 0$), получаем, как в [4], следующую систему линейных алгебраических уравнений равновесия оболочки

$$\mathbf{K}^+ \mathbf{u}^+ = \mathbf{Q}^+ \quad (2.7)$$

где матрица жесткости оболочки \mathbf{K}^+ ленточной структуры получается сум-

мированием элементов матрицы K с использованием матрицы индексов; вектор обобщенных узловых сил оболочки Q^+ получается суммированием элементов вектора $Q^+ = Q + Q_i$ с использованием той же матрицы индексов; u' — вектор узловых перемещений оболочки. Система (2.7) решается методом Краута с использованием разложения матрицы $K^+ = L^T D L$. Решив ее, найдем все компоненты нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния.

3. Пример. Для проверки правильности алгоритма и программ решена задача о напряженно-деформированном состоянии сферической оболочки с круглыми отверстиями при однородном внешнем давлении. Оболочка имела $R=100$ см, $h=1$ см, радиус отверстия в полдуге оболочки $r=\pi R/28$. В силу симметрии нагрузки и оболочки из нее вырезался сегмент ограниченный углом $0 \leq \beta \leq \pi/28$, который по широте разбивался на один конечный элемент, а по меридиану на 16 конечных элементов. В силу малости отверстия возмущенное им основное напряженно-деформированное состояние локализовано около этого отверстия. На расстоянии $\alpha > \pi/4$ оболочка находится в невозмущенном основном напряженно-деформированном состоянии, которое с точностью до 0,5% совпадает с решением [1]. На фиг. 3 приведено изменение усилий T_1 (кривые 1) и T_2 (кривые 2) по меридиану оболочки (сплошные кривые получены по предложенному алгоритму, пунктирные по алгоритму, в котором используются функции формы, не учитывающие смещение элемента как твердого тела). Заметно значительное увеличение концентрации усилий у контура отверстия. Решения с учетом и без учета перемещений элемента как твердого тела близки.

Для проверки эффективности предложенного элемента решена задача для этой же оболочки при нагружении ее по контуру отверстия погонной радиальной нагрузкой $P_k=1$ кг/см. На фиг. 4 представлен график сходимости решения по числу конечных элементов по меридиану оболочки. Кривая 1 соответствует решению без учета смещения элемента как твердого тела, кривая 2 — с учетом смещения элемента как твердого тела. Видна высокая эффективность разработанного элемента. Сходимость решения при учете перемещения элемента как твердого тела достигается при использовании 12 элементов. Без этого учета сходимость получается при вдвое большем числе элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
2. Кангин Г., Клауф Р. В. Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки // Ракетн. техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 6. С. 82–88.
3. Кабанов В. В., Железнов Л. П. К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 9. С. 35–40.
4. Кабанов В. В., Железнов Л. П., Астрахарчик С. В. Конечный элемент и алгоритм исследования изгиба конических оболочек // Пространственные конструкции в Красноярском крае. Красноярск: Политехн. ин-т. 1985. С. 68–75.

Новосибирск

Поступила в редакцию
7.12.1988