

УДК 539.3 : 534.1
© 1990 г.

Ю. Л. БОНДАРЕНКО

ОСОБЕННОСТИ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ
ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Решена задача о квазистатической неустойчивости на конечном интервале времени и закритическом движении цилиндрической панели под действием комбинированной нагрузки, зависящей от времени. Известно [1-3], что для вязкоупругих тел с помощью квазистатического подхода можно определить критические параметры, построить закритические режимы деформирования. Этот подход представляет собой распространение идеи метода Эйлера в устойчивости упругих тел, а также элементов классической теории бифуркаций и катастроф на безынерционные нестационарные системы [4-6]. Сформулированы соответствующие краевые задачи, а также математические соотношения для вязкоупругой цилиндрической панели. Анализ этих условий и задач позволяет прогнозировать характер движения оболочки при комбинированной нагрузке. Приводятся результаты расчетов.

1. Пусть на цилиндрическую прямоугольную в плане панель $\{0 \leq \xi_1 \leq \pi, 0 \leq \xi_2 \leq \pi\}$ действует осевая сила $P^0(t)$, и нормальная распределенная нагрузка $Q^0(t)$ (фиг. 1). Основное решение (движение) $\{W^0(t), F^0(t)\}$, особенности поведения которого во времени исследуем в дальнейшем, определяется из нелинейной нестационарной краевой задачи, представляющей собой известный вариант технической теории оболочек [7]:

$$DE \nabla^2 \nabla^2 (W^0 - W_0) - \alpha_2 \pi^{-2} F_{,11}^0 - \alpha_1^2 [W^0, F^0] - Q^0(t) = 0$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F^0 - E (-\alpha_2 \pi^{-2} (W^0 - W_0)_{,11} + 1/2 \alpha_1^2 ([W_0, W_0] - [W^0, W^0])) = 0 \quad (1.1)$$

Краевые условия в случае шарнирного опирания имеют вид

$$W^0 = W_{,22}^0 = 0, \quad F_{,12}^0 = 0, \quad F_{,22}^0 = -P^0(t), \quad (\xi_2 = 0; \pi) \quad (1.2)$$

В этих формулах W^0, W_0 — безразмерное полное и начальное перемещение соответственно; $\alpha_1 = a/b, \alpha_2 = a^2/(hR)$ — безразмерные геометрические параметры; $D = 1/12(1 - \nu^2)^{-1}, a, b, h, R$ — длина, ширина, толщина и радиус кривизны панели, $F^0(t)$ — функция напряжений; $(\cdot)_{, \xi_1} \equiv (\cdot)_{,1}, (\cdot)_{, \xi_2} \equiv (\cdot)_{,2}, [f, g] \equiv f_{,11}g_{,22} - 2f_{,12}g_{,12} + f_{,22}g_{,11}$.

Определяющие соотношения между тензором напряжений σ и деформаций ϵ берем линейные

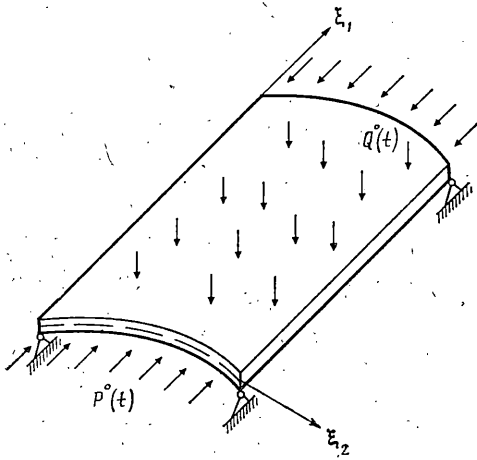
$$\sigma = E \epsilon, \quad E(\cdot) \equiv I(\cdot) - \eta \int_0^t \theta(t, \tau)(\cdot) d\tau$$

Предполагается, что ядро релаксации обладает следующими свойствами:

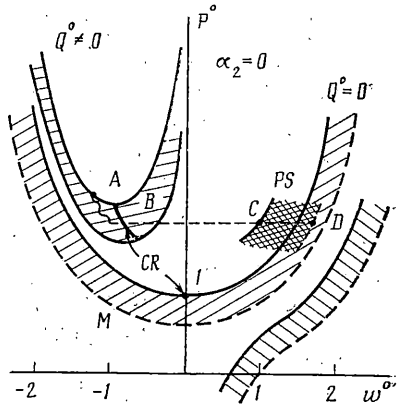
$$\int_0^t |\theta(t', \tau) - \theta(t, \tau)| dt \rightarrow 0, \quad \int_t^{t'} |\theta(t', \tau)| d\tau \rightarrow 0$$

$$t' \rightarrow t, t \in [0, t_1], t_1 \rightarrow 0$$

Известны различные подходы к определению степени опасности поведения конструкций из реологических материалов [7-10]. Значительный интерес представляет идея качественного анализа поведения систем, входящая к работам Пуанкаре [4].



Фиг. 1



Фиг. 2

Исследуем квазистатическую неустойчивость основного движения $\{W^0(t), F^0(t)\}$ на конечном интервале времени $[0, T]$. Для этого из основной задачи (1.1), (1.2) заменой $W^0 \rightarrow W^0 + W, F^0 \rightarrow F^0 + F$ получим нелинейную систему уравнений для малых квазистатических возмущений $\{W, F\}$ с однородными краевыми условиями $(m_1(t), m_2(t))$ — возмущения внешних нагрузок):

$$L_1 \tilde{\cdot}(W, F) = \alpha_1^2 [W, F] + m_1(t), L_2 \tilde{\cdot}(W, F) = \frac{1}{2} \alpha_1^2 E \tilde{\cdot}[W, W] + m_2(t) \quad (1.3)$$

$$W = W,_{22} = 0, F,_{12} = F,_{22} = 0, (\xi_2 = 0; \pi) \quad (1.4)$$

Линейные операторы Вольтерра в левой части системы (1.3) имеют вид

$$L_1 \tilde{\cdot}(W, F) = DE \nabla^2 \nabla^2 W - \alpha_2 \pi^{-2} F,_{11} - \alpha_1^2 ([W, F^0] + [W^0, F]) \quad (1.5)$$

$$L_2 \tilde{\cdot}(W, F) = \nabla^2 \nabla^2 F + E \tilde{\cdot}(\alpha_2 \pi^{-2} W,_{11} + \alpha_1^2 [W, W^0]) \quad (1.6)$$

Полагая $\eta = 0$ в операторах $L_1 \tilde{\cdot}, L_2 \tilde{\cdot}$, получаем следующую линейную «упругую» задачу, соответствующую задаче (1.3), (1.4):

$$L(W, F) = 0, L(W, R) = \{L_1(W, F), L_2(W, F)\} \quad (1.7)$$

Известно [1], что спектральная задача (1.7), (1.4) позволяет определить критическое состояние основного движения $W_*^0 = W^0(t_*)$, $F_*^0 = F^0(t_*)$.

Критичность означает, что при $t = t_*$ (критическое время) происходит потеря устойчивости основного движения при постоянно действующих возмущениях внешних сил $m_1(t), m_2(t)$. Левая часть системы (1.3) — производная Фреше от оператора основной задачи (1.1), (1.2), а вырождение «упругого» оператора $L(W, F)$ означает, что указанный выше оператор Фреше теряет свойство непрерывной обратимости при $t = t_*$.

Для исследования задачи (1.7), (1.4) можно использовать результаты по упругой устойчивости оболочек. В дальнейшем будем использовать следующее обозначение для множества критических состояний CR , которое в силу сказанного выше определяется как множество состояний основного движения $\{W_*^0, F_*^0\}$, на котором вырождается упругий оператор $L(W, F)$.

Определение этого множества, а также критического времени t_* , как минимального времени достижения основным движением критических состояний, представляет собой главную задачу квазистатической неустойчивости вязкоупругих оболочек.

2. Чтобы понять характер особенности основного движения при $t \geq t_*$, сформулируем задачу об особой точке. Так называется точка $t = t_0$ на временной шкале, в которой нарушено свойство однозначной непрерывной продолжимости основного движения. Дифференцируя (1.1), (1.2) по t ,

получаем задачу для определения скоростей основного движения:

$$\begin{aligned} L_1(W^{0*}, F^{0*}) &= f_1(W^0), \quad L_2(W^{0*}, F^{0*}) = f_2(W^0) \\ f_1(W^0) &= DE \sim \nabla^2 \nabla^2 (W^0 - W_0) + Q^0 \\ f_2(W^0) &= E \sim (\alpha_2 \pi^{-2} (W^0 - W_0)_{,11} - 1/2 \alpha_1^2 ([W_0, W_0] - [W^0, W^0])) \\ E \sim (\cdot) &= \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \theta(t, \tau) (\cdot) d\tau \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Краевые условия для $\{W^{0*}, F^{0*}\}$ получаются дифференцированием краевых условий (1.2).

Однородная задача для $\{W^{0*}, F^{0*}\}$ совпадает с задачей о критических состояниях (1.7), (1.4). Следовательно, именно при $t_0 = t_*$ скорости основного движения не имеют однозначных конечных значений [1].

Если $\{W^{0*}, F^{0*}\}$ имеют неоднозначные конечные значения, то это означает, что основное движение продолжимо за отрезок $[0, t_*]$ неоднозначно. Условие такой продолжимости следует из возможности нормальной разрешимости неоднородной задачи (2.1) при $t = t_*$:

$$H = \int_0^\pi \int_0^\pi (f_1(W^0) V_1 - f_2(W^0) V_2) d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad (2.2)$$

где V_1, V_2 — собственные элементы задачи, сопряженной к (1.7), (1.4). В случае выполнения условия $H=0$ время t_* называется точкой разветвлений. В противном случае, т. е. при $H \neq 0$, $t = t_*$ есть точка непродолжимости основного движения. В соответствии с этими типами обеих точек проведем исследование за критического движения оболочки.

Пусть $H=0$, т. е. t_* — точка разветвлений основного движения. Решение основной задачи при $t \geq t_*$ разыскиваем в виде

$$\begin{aligned} t \geq t_*: W^0(t) &= W^0(t) + W^+(t), \quad F^0(t) = F^0(t) + F^+(t) \\ P^0(t) &= P^0(t), \quad Q^0(t) = Q^0(t) \end{aligned}$$

Для продолжений основного движения $\{W^+(t), F^+(t)\}$ получаем нелинейную однородную задачу, аналогичную задаче (1.3), (1.4) для возмущений, но при $m_1(t) = m_2(t) = 0$, т. е. при невозмущенных внешних нагрузках

$$\begin{aligned} t \geq t_*: L_{1*} \sim (W^+, F^+) &= \alpha_1^2 [W^+, F^+] \\ L_{2*} \sim (W^+, F^+) &= -1/2 \alpha_1^2 E_{t_*} \sim [W^+, W^+] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Краевые условия имеют вид (1.4). Звездочка у операторов в левой части означает, что эти операторы расположены на спектре, т. е. совпадают с операторами L_1, L_2 спектральной задачи ($\eta=0$). Обозначение $E_{t_*} \sim (\cdot)$ указывает, что интеграл в этом операторе вычисляется от t_* до t .

Рассмотрим также линеаризованную задачу для продолжений

$$t \geq t_*: L_{1*} \sim (W^+, F^+) = 0, \quad L_{2*} \sim (W^+, F^+) = 0 \quad (2.4)$$

Системы уравнений (2.3), (2.4) при $t \geq t_*$ в зависимости от свойств ядра $\theta(t, \tau)$ и нагрузки $P^0(t), Q^0(t)$ могут иметь или не иметь нетривиальные решения, несмотря на то обстоятельство, что система (2.4), например, при $t = t_*$ всегда имеет нетривиальное решение [1].

Существование нетривиального решения линейной системы (2.4) означает, что в этом случае $t = t_*$ есть точка квазистатической бифуркации. Однако закритические режимы деформирования можно найти только из нелинейной системы (2.3), например, в виде рядов [1, 3]:

$$W^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} W_{ij}^+(\xi_1, \xi_2) (t - t_*)^{i+\alpha(j+1)}$$

$$F^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} F_{ij}^+(\xi_1, \xi_2) (t-t_*)^{i+a(j+1)}$$

Коэффициенты W_{ij}^+ , F_{ij}^+ определяются из следующей последовательности линейных вырожденных задач:

$$L_1(W_{ij}^+, F_{ij}^+) = n_{ij}^{(1)} (W_{00}^+, \dots, W_{i-1 j-1}^+, F_{00}^+, \dots, F_{i-1 j-1}^+)$$

$$L_2(W_{ij}^+, F_{ij}^+) = n_{ij}^{(2)} (W_{00}^+, \dots, W_{i-1 j-1}^+, F_{00}^+, \dots, F_{i-1 j-1}^+)$$

где $n_{ij}^{(1)}$, $n_{ij}^{(2)}$ — известные выражения, например $n_{00}^{(1)} = n_{00}^{(2)} = 0$.

Значение α определяется в следующем виде из условия разрешимости этой системы при $i=1, j=0$:

$$\alpha = -1 - \eta \{ \langle DV^2 \nabla^2 W_{00}^+, V_1 \rangle - \langle \alpha_2 \pi^{-2} W_{00,11}^+ + 1/2 \alpha_1^2 [W_{00}^+, W_0^0], V_2 \rangle \} \times \\ \times \theta_{00} \alpha_1^{-2} \{ \langle [W_{00}^+, F_1^0] + [W_1^0, F_{00}^+], V_1 \rangle + 1/2 \langle [W_{00}^+, W_1^0], V_2 \rangle \}^{-1} \quad (2.5)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi \int_0^\pi fg d\xi_1 d\xi_2$$

где V_1, V_2 — те же, что в (2.2); использованы также разложения $F^0(t) = \sum F_i^0(t-t_*)^i$, $W^0(t) = \sum W_i^0(t-t_*)^i$ ($i=0, 1, \dots, \infty$).

В зависимости от знака α получаем три типа бифуркаций: непрерывные ($\alpha > 0$), разрывные ($\alpha = 0$) и сингулярные ($\alpha < 0$). Можно показать, что бифуркационные режимы деформирования возникают, когда внешние нагрузки только касаются критических областей, оставаясь при $t \geq t_*$ вне последних [3].

Однако более распространенным на практике является случай, когда при $t > t_*$ внешние нагрузки возрастают, т.е. располагаются внутри областей критических значений. При этом линейная задача разветвлений (2.4) имеет только тривиальное решение. Решение нелинейной задачи (2.3) разыскиваем методом скачка [4]. Полагаем

$$W^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} W_i^+(\xi_1, \xi_2) (t-t_*)^i, \quad F^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i^+(\xi_1, \xi_2) (t-t_*)^i \quad (2.6)$$

причем характеристики основного движения представляем в виде скачка малой амплитуды ε из критического состояния:

$$F^0(t) = F_*^0 + \varepsilon^2 F_\varepsilon + \sum_{i=0}^{\infty} F_{i+1}^0 (t-t_*)^{i+1} \quad (2.7)$$

$$W^0(t) = W_*^0 + \sum_{i=0}^{\infty} W_{i+1}^0 (t-t_*)^{i+1}$$

Подставляя (2.6), (2.7) в (2.3), получаем для $\{W_0^+, F_0^+\}$ нелинейную задачу с малым параметром ε :

$$L_1(W_0^+, F_0^+) = \alpha_1^2 ([W_0^+, \varepsilon^2 F_\varepsilon] + [W_0^+, F_0^+]) \\ L_2(W_0^+, F_0^+) = -1/2 \alpha_1^2 [W_0^+, W_0^+]$$

Для $\{W_i^+, F_i^+\}$ ($i \geq 1$) имеем последовательность линейных задач.

Если эта последовательность задач разрешима, то $t=t_*$ — точка квазистатических разветвлений. В противном случае $t=t_*$ — точка динамического разветвления и для ее исследования необходимо развивать динамический анализ.

Рассмотрим случай $H \neq 0$. Основное движение непродолжимо за интервал $[0, t_*]$, поэтому возможны только разрывные квазистатические движения при $t \geq t_*$. Тогда $t = t_*$ называется точкой катастроф, а сами разрывные движения — катастрофами [4, 6]. Задачу катастроф для $\{W^+, F^+\}$ получаем из основной задачи, полагая в (1.1), (1.2) $W^0(t) = W_*^0 + W^+(t)$, $F^0(t) = F_*^0 + F^+(t)$, получим $t \geq t_*$:

$$L_1(W^+, F^+) = \alpha_1^2 [W^+, F^+] + \Delta_1 \quad (2.8)$$

$$L_2(W^+, F^+) = -1/2 \alpha_1^2 E_{t_*} [W^+, W^+] + \Delta_2$$

$$\Delta_1 = Q^0 - Q_*^0 + \eta D \nabla^2 \nabla^2 (W_*^0 - W_0) \int \theta(t, \tau) d\tau$$

$$\Delta_2 = -\eta \{1/2 \alpha_1^2 ([W_0, W_0] - [W_*^0, W_*^0]) - \alpha_2 \pi^{-2} (W_*^0 - W_0)_{,11}\} \int \theta(t, \tau) d\tau$$

В отличие от задачи (2.3) для разветвлений система (2.8) неоднородна, кроме того в (2.8) входят только критические состояния $\{W_*^0, F_*^0\}$.

Заметим, что при $t = t_*$ $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Поэтому задачу скачков для определения $\{W^+(t_*), F^+(t_*)\}$ получаем из (2.8) при $t = t_*$ в виде

$$L_1(W^+(t_*), F^+(t_*)) = \alpha_1^2 [W^+(t_*), F^+(t_*)] \quad (2.9)$$

$$L_2(W^+(t_*), F^+(t_*)) = -1/2 \alpha_1^2 [W^+(t_*), W^+(t_*)]$$

Система (2.9) всегда имеет тривиальное решение, существование нетривиального решения означает возможность разрывного продолжения основного движения. Это продолжение можно построить так же как в методе скачка.

3. Примеры. Принимаем следующую аппроксимацию

$$W^0(t) = w^0(t) \sin \xi_1 \sin \xi_2; \quad W_0 = w_0 \sin \xi_1 \sin \xi_2$$

1. Из (1.1), (1.2) методом Бубнова — Галеркина получаем нелинейное уравнение для основного движения $w^0(t)$:

$$(1 - a_1 w^0) E \sim (w^0 - w_0) - (a_3 - a_2 w^0) E \sim ((w^0)^2 - (w_0)^2) - P^0 w^0 - Q^0 = 0 \quad (3.1)$$

где a_1, a_2, a_3 — безразмерные геометрические константы. Уравнение (3.1) определяет при $t=0$ и $t=\infty$ множество мгновенных и длительных состояний, которые представим в виде диаграмм, вид которых, а следовательно и характер поведения оболочки зависит от параметров задачи a_1, a_2, a_3 .

Алгебраический вариант множества критических состояний получаем методом Бубнова — Галеркина из (1.7), (1.4), полагая

$$W(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \sum_j W_{ij} \sin i \xi_1 \sin j \xi_2; \quad CR = \{w_*^0: \det(c_{ij}) = 0\}$$

Приведем выражение для одномерного случая ($i=j=1$):

$$c_{11} = 1 - P^0 - (a_1/3 + 2a_3) w_*^0 + 2a_2 (w_*^0)^2 + a_2 E \sim [(w^0)^2 - (w_0)^2] - \\ - 1/9 a_1 E \sim (w^0 - w_0) = 0 \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) определяет множество критических состояний в пространстве P^0, w^0 . Используя уравнение (3.1), можно получить множество критических состояний в пространстве Q^0, w^0 . Эти множества представляют собой некоторые области на плоскости, ограниченные кривыми, получаемыми из (3.2) заменой $E \sim \rightarrow I$ и $E \sim \rightarrow E_\infty$. На фиг. 2 показаны множества основных (M) и критических (CR) состояний.

Анализ этих диаграмм, выделение на кривых устойчивых начальных состояний можно выполнить с помощью классической теории бифурка-

ций [5]. Однако в отличие от упругого случая существенную роль играют реологические свойства материала. На фиг. 2 множество основных состояний при $\alpha_2 = w_0 = Q^0 = 0$ (идеальная сжатая пластинка), называемое множеством суперкритических бифуркаций, пересекается с множеством критических состояний в одной точке $P^0 = 1, w^0 = 0$. Это означает, что при $t = t_*$, когда $P^0(t_*) = 1$ возможно разветвление основного движения $W^0(t) = 0$.

При $Q^0 \neq 0$ множество основных состояний несвязно. Кроме того, пересечение множеств основных и критических состояний представляет собой некоторую область на плоскости. Это означает, что возможны катастрофы при переменной во времени силе $P^0(t)$.

Задача об особой точке в рассматриваемом приближении имеет вид

$$c_{11}w^{0*} = F$$

$$F = P^{0*}w^0 + Q^{0*} + (1 - a_1w^0)E^*(w^0 - w_0) - (a_3 - a_2w^0)E^*[(w^0)^2 - (w_0)^2]$$

2. При $w_0 = Q^0 = 0$ имеем $H = 0$, т. е. условие продолжимости выполняется, и t_* — точка разветвления основного движения. Уравнение для продолжений получаем из (2.3), (2.4):

$$t \geq t_*: (1 - a_1W^+)E_{t_*}^*W^+ - (a_3 - a_2W^+)E_{t_*}^*(W^+)^2 = P^0(t)W^+ \quad (3.3)$$

Линеаризованное уравнение имеет вид

$$t \geq t_*: (1 - P^0(t))W^+ - \eta \int_{t_*}^t \theta(t, \tau)W^+(\tau) d\tau = 0 \quad (3.4)$$

Это уравнение может иметь нетривиальное решение при $P^0(t) < 1, t \geq t_*$. Пусть $P^0(t) = 1 + P_1(t - t_*)$ ($t \geq t_*$). Для вырожденных ядер $\theta(t, \tau) = \theta_1(t)\theta_2(\tau)$ решение уравнения (3.4) строится в явном виде [10]:

$$W^+(t) = c\theta_1(t) [1 - P^0(t)]^{-1} \exp \left(\int_{t_*}^t \theta_1(t)\theta_2(\tau) (1 - P^0(\tau))^{-1} d\tau \right) \quad (3.5)$$

при дополнительном условии

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \exp \left\{ \int_{t_*}^t \theta_1(\tau)\theta_2(\tau) [1 - P^0(\tau)] d\tau \right\} = 0 \quad (t \rightarrow t_*)$$

В случае аналитических ядер

$$\theta(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{ij}(t - t_*)^i (\tau - t_*)^j$$

решение (3.4) разыскивается в виде

$$W^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} W_{ij}^+(t - t_*)^{i + \alpha(j+1)}$$

Коэффициенты W_{ij}^+ определяются из рекуррентных соотношений с точностью до произвольной константы, а для α получаем выражение

$$\alpha = -1 - \eta\theta_{00}/P_1 \quad (3.6)$$

Если $\theta(t, \tau) = \exp[-(t - \tau)/\gamma]$, то из (3.5) получаем

$$W^+(t) = c(t - t_*)^\alpha \exp[-(t - t_*)/\gamma]$$

Эти методы можно распространить для ядер Работнова

$$\theta(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{\gamma_1} \beta^n (1 + \gamma_1) / \Gamma[(n+1)(1 + \gamma_1)]$$

Решение (3.4) разыскиваем в виде $W^+(t) = \sum \sum W_{ij}^+(t-t_*)^{(1+\gamma_1)+\alpha(j+1)}$, $P^0(t) = \sum P_i(t-t_*)^{(1+\gamma_1)^i}$ ($i, j=0, 1, \dots, \infty$). Коэффициенты W_{ij}^+ определяются аналогично случаю аналитических ядер, α получаем следующее уравнение:

$$1 + \eta \Gamma [1 + \alpha] \{P_1 \Gamma [2 + \alpha + \gamma_1]\}^{-1} = 0 \quad (3.7)$$

Закритическое движение находим из нелинейного уравнения (3.3) в виде ряда $W^+(t) = \sum \sum W_{ij}^+(t-t_*)^{(1+\gamma_1)^i + \alpha(j+1)}$, $P^0(t) = \sum P_i(t-t_*)^{(1+\gamma_1)^i}$ ($i, j=0, 1, \dots, \infty$); $P_0=1$ ($t \geq t_*$)

Причем α определяется из соотношения (3.7) или (3.6), если $\gamma_1=0$. Для W_{ij}^+ получаем рекуррентное соотношение $W_{ij}^+ = c_{00}^{j+1} \beta_{ij}(P_1, P_2, \dots, \gamma_1)$, где $\beta_{ij}(\cdot)$ — известные выражения. Из условия разрешимости упругой задачи получаем $c_{00}^{(1)}=0$, $c_{00}^{(2,3)} = \pm (P_e/a_2)^{1/2}$, где P_e — параметр закритичности.

Если $P^0(t) > 1$, $t \geq t_*$, то уравнение (3.4) имеет только тривиальное решение. Возможны, однако, ситуации, когда нелинейная задача (3.3) имеет нетривиальное решение, которое для аналитических ядер будем разыскивать в виде $W^+(t) = \sum W_i^+(t-t_*)^i$, $P^0(t) = 1 + P_e \varepsilon^2 + \sum P_{i+1}(t-t_*)^{i+1}$ ($i=0, 1, \dots, \infty$). Для W_0^+ , W_1^+ получаем

$$\begin{aligned} W_0^{+(1,2)} &= 1/2(a_1+a_3) + \{1/4(a_1+a_3)^2 + P_e \varepsilon^2/a_2\}^{1/2} \\ W_1^+ &= \{W_0^+ P_1 + \eta \theta_{00} [W_0^+ (1 - a_1 W_0^+) - (a_3 - a_2 W_0^+) (W_0^+)^2]\} \times \\ &\times \{a_2 (W_0^+)^2 - 2a_1 W_0^+ - 2W_0^+ (a_3 - a_2 W_0^+) - P_e \varepsilon^2\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

При $R=\infty$ $a_1=a_3=0$ (пластинка) и из (3.8) следует

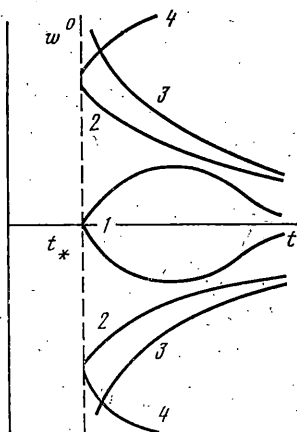
$$\begin{aligned} W_0^{+(1,2)} &= \pm (P_e \varepsilon^2/a_2)^{1/2} \\ W_1^+ &= \{W_0^+ P_1 + \eta \theta_{00} [W_0^+ + a_2 (W_0^+)^2]\} [3a_2 (W_0^+)^2 - P_e \varepsilon^2]^{-1} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $W_0^{+(1,2)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, в отличие от (3.8). Это обстоятельство подчеркивает тот факт, что для оболочки типичной является внезапная скачкообразная форма потери устойчивости. На фиг. 3 показаны кривые закритического движения: 1—3 — непрерывные разрывные и сингулярные бифуркации соответственно, 4 — квазистатические разветвления.

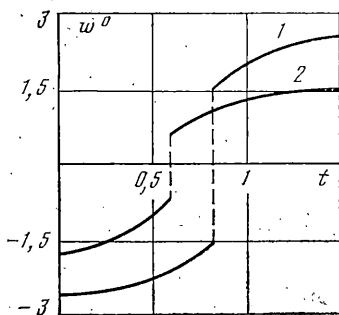
3. Рассмотрим случай $H \neq 0$, т. е. задачу катастроф, которая часто возникает при наличии начальной погиби w_0 или поперечной силы Q^0 , разрушающей бифуркацию. Задача катастроф имеет вид

$$\begin{aligned} t \geq t_*: \quad & (1 - a_1 w_*^0) \left[E_{i_*} \sim W^+ - \eta (w_*^0 - w_0) \int_{t_*}^t \theta(t, \tau) d\tau \right] - \\ & - a_1 W^+ \left[E_{i_*} \sim W^+ + E^{i_*} (w^0 - w_0) - \eta (w_*^0 - w_0) \int_{t_*}^t \theta(t, \tau) d\tau \right] - \\ & - (a_3 - a_2 w_*^0 \{E_{i_*} \sim [(W^+)^2 + 2w_*^0 W^+] - \eta [(w_*^0)^2 - (w_0)^2]\} \int_{t_*}^t \theta(t, \tau) d\tau + \\ & + [P^0(t_*) - P^0(t)] w_*^0 - P^0(t) W^+ - Q^0 + Q_*^0 + a_2 W^+ \{E_{i_*} \sim (W^+ + \\ & + 2w_*^0 W^+) + E^{i_*} [(w^0)^2 - (w_0)^2] - \eta [(w^0)^2 - (w_0)^2]\} \int_{t_*}^t \theta(t, \tau) d\tau = 0 \\ & E^{i_*}(\cdot) \equiv I(\cdot) - \eta \int_0^t \theta(t_*, \tau) (\cdot) d\tau, \quad Q_*^0 = Q^0(t_*) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Уравнение скачков для оболочки и пластины соответственно получаем из (3.9) при $t=t_*$: $W^+(t_*) = -3\{w_*^0 - 1/3(a_1+a_3)\}$, $W^+(t_*) = -3w_*^0$. Мно-



Фиг. 3



Фиг. 4

жество начальных закритических движений имеет вид $W(t_*) = W^+(t_*) + w_*^0 = -2\{w_*^0 - 1/2(a_1 + a_3)\}$. Множество предельных закритических состояний получаем из (3.9) при $t \rightarrow \infty$.

На фиг. 2 показаны эти множества, которые, вообще говоря, не совпадают с множеством основных состояний, а также характерный процесс деформирования $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$. Здесь A — точка начальных мгновенных состояний, B — точка критического множества, C, D — точки мгновенных и длительных закритических состояний. Переход от B к C совершается скачкообразно. Отметим также, что густо заштрихованная область между C и D означает множество закритических состояний PS .

Построение множеств основных, критических и закритических состояний позволяет прогнозировать характер движения оболочки при различных значениях параметров. Например, вышеуказанный процесс деформирования $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ возникает при начальных отклонениях пластинки, противоположных w_0 по знаку, а также уменьшающейся сжимающей силе $P^0(t)$.

При численном моделировании движения оболочки на каждом шаге времени проверяются условия критичности (3.2) и продолжимости $H=0$, а затем в соответствии с типом точки t_* строится закритический режим. На фиг. 4 показаны траектории движения в случае катастроф. Обе кривые получены при $\alpha_1=5$, $\alpha_2=10$, причем кривая 1 при $\eta=0,5$, а кривая 2 при $\eta=0,9$. Значение критического времени уменьшается при увеличении вязкости η . Автор благодарит В. Г. Громова за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громов В. Г. Квазистатическая неустойчивость как средство качественного анализа равновесных движений наследственно деформируемых тел на конечном интервале времени // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 124—127.
2. Громов В. Г. Вырожденный случай задачи устойчивости вязкоупругих тел // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 12. С. 21—29.
3. Бондаренко Ю. Л. Неустойчивость и качественный анализ поведения вязкоупругих оболочек // Тез. докл. 2-го Всесоюз. симпоз. «Устойчивость в механике деформируемого твердого тела» Калинин: Калининский ун-т. 1986. С. 91—92.
4. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983. 80 с.
5. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.
6. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
7. Вольмир А. С., Зыкин П. Г. Устойчивость в больших цилиндрических оболочек при ползучести // Сб. Тепловые напряжения в элементах турбомашин. Вып. 2. Киев, 1962. С. 41—44.
8. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
9. Григслюк Э. И., Липовцев Ю. В. Устойчивость пологих оболочек в условиях ползучести // ПМТФ. 1965. № 4. С. 111—116.
10. Громов В. Г. Два качественных примера вырожденного случая задачи устойчивости вязкоупругих тел // Тула: Тульский политехн. ин-т, 1981. С. 8—19.

Тула

Поступила в редакцию
17.02.1987