

УДК 539.374

© 1990 г.

Я. А. ЛЕЛЛЕЦ, Ю. П. МАЯК

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В исследованиях по оптимальному проектированию жесткопластических пластин и оболочек внимание уделено, главным образом, моделям материала с кусочно-линейной поверхностью текучести [1-3]. В [4, 5] решены задачи минимизации веса жесткопластических оболочек вращения в геометрически линейной постановке в случае материала подчиняющимся условию пластичности Губера - Мизеса. Полученные проекты являются оптимальными для предельных нагрузок. В [6, 7] выведены необходимые условия оптимальности для параметрических задач оптимизации цилиндрических оболочек, подверженных действию поперечного давления и осевого растяжения. Предполагалось, что материал оболочек подчиняется некоторому кусочно-линейному условию пластичности. Обобщение этих результатов для материалов, подчиняющихся условию пластичности Губера - Мизеса, требует разработки эффективных методов решения нелинейных краевых задач. В [8, 9] были применены различные методы расчета для исследования больших перемещений цилиндрических оболочек при условии пластичности Губера - Мизеса (толщина оболочек считалась постоянной). Ниже предлагается метод определения проекта минимального веса для оболочек с нелинейной поверхностью текучести.

1. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиуса R и длины $2l$, которая нагружена внутренним давлением интенсивности P и осевой силой N_1 на единицу длины окружности (фиг. 1). Допускается, что внутреннее давление распределено равномерно по поверхности цилиндра, а осевое растяжение - по окружности, составленной пересечением торцевого поперечного сечения со срединной поверхностью оболочки. Торцевые сечения оболочки шарнирно закреплены. Вследствие симметрии относительно срединного поперечного сечения рассматривается половина оболочки ($0 \leq x \leq l$). Учитываются умеренные (примерно превышающие толщины) прогибы, а материал оболочки считается идеально жесткопластическим, подчиняющимся условию пластичности Губера - Мизеса.

Требуется найти такое распределение толщины несущих слоев $h=h(x)$, при котором объем

$$J = \int_0^l h dx \quad (1.1)$$

достигает минимального значения. Здесь предполагается, что стенка оболочки идеально трехслойная, общая толщина H постоянна, но толщина несущих слоев переменна. При минимизации функционала (1.1) следует учитывать основные уравнения геометрически нелинейной теории пластических оболочек.

Чтобы ограничить класс оптимальных проектов необходимо ввести некоторые ограничения относительно перемещений U , W (U - осевое смещение, W - прогиб). Расчеты показывают, что при данном виде нагружения и закрепления оболочки прогиб W достигает максимума в центре оболочки. Поэтому естественно потребовать, чтобы прогиб в центре оболочки с оптимальной толщиной совпадал с соответствующим прогибом сравниваемой оболочки постоянной толщины h_* .

2. Введем безразмерные величины

$$\xi = x/l, \quad m = M/M_*, \quad n_{1,2} = N_{1,2}/N_*, \quad v = h/h_*$$

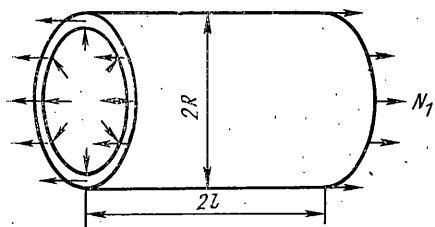
$$p = PR/N_*, \quad w = N_1 W/M_*, \quad u = U l N_*^2 / M_*^2, \quad \alpha = N_* l^2 / R M_*$$

где $N_* = 2\sigma_0 h_*$, $M_* = \sigma_0 H h_*$, σ_0 - предел текучести материала. Уравнения равновесия и ассоциированный закон деформирования запишем в виде [9-11]:

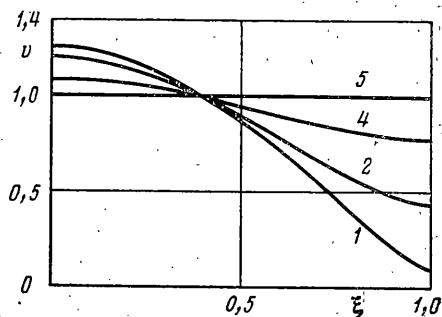
$$d^2 m / d\xi^2 - n_1 d^2 w / d\xi^2 + \alpha (n_2 - p) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{du}{d\xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 - \frac{\alpha w (2n_1 - n_2)}{2n_2 - n_1} = 0$$

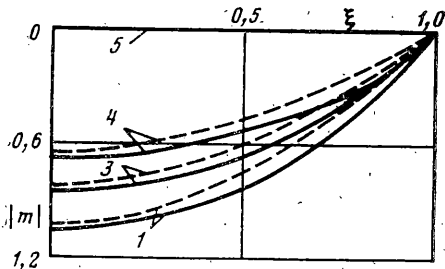
$$d^2 w / d\xi^2 - \alpha w m / (2n_2 - n_1) = 0$$



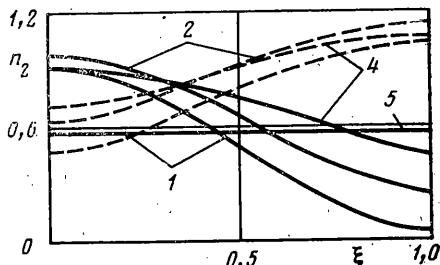
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Применяется нелинейная аппроксимация точной поверхности текучести, которая соответствует удовлетворению условию Губера – Мизеса в среднем [12–14]:

$$n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + 3m^2/4 - v^2 = 0 \quad (2.2)$$

Несмотря на простоту, условие (2.2) приводит к достаточно точным оценкам несущей способности [8, 13]. Введя новые переменные $q = m'$ и $z = w'$ (штрих обозначает дифференцирование по ξ), можно дифференциальные ограничения (2.1) записать в нормальной форме

$$\begin{aligned} q' &= \frac{3\alpha w t n_1}{2(2n_2 - n_1)} + \alpha(p - n_2), & z' &= \frac{3\alpha w t}{2(2n_2 - n_1)} \\ u' &= -1/2 z^2 + \frac{\alpha w (2n_1 - n_2)}{2n_2 - n_1}, & m' &= q, \quad w' = z \end{aligned} \quad (2.3)$$

Сформулированная задача рассматривается как вариационная задача теории оптимального управления. Переменные q, z, u, m, w интерпретируются как фазовые координаты, n_2 и v считаются управлениями, а n_1, p и α – заданные величины. Фазовые переменные удовлетворяют ограничениям (2.2), (2.3), а также крайевым условиям

$$q(0) = z(0) = u(0) = 0, \quad w(0) = w_0, \quad m(1) = w(1) = 0 \quad (2.4)$$

3. Для выведения необходимых условий оптимальности введем соответствующие уравнениям (2.2) и (2.3) множители Лагранжа $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_5$ и составим расширенный функционал [11]. Новый функционал варьируем среди функций класса $C^1[0, 1]$. Это приводит к соотношениям

$$v = \frac{1}{2\varphi}, \quad \varphi = -\frac{\alpha}{(2n_2 - n_1)^3} [3m w \psi_2 + \psi_1 (2n_2 - n_1)^2] \quad (3.4)$$

которые можно рассматривать как уравнения для определения неизвестной функции $v = v(\xi)$.

Множители Лагранжа ψ_1, \dots, ψ_5 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \psi_1' &= -\psi_4, & \psi_2' &= -\psi_5 - n_1 \psi_4, & \psi_3' &= 0 \\ \psi_4' &= -\frac{3\alpha w \psi_2}{2(2n_2 - n_1)} + \frac{3m}{4w}, & \psi_5' &= -\frac{3\alpha t \psi_2}{2(2n_2 - n_1)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

и согласно (2.4) условиям трансверсальности

$$\psi_4(0) = 0, \quad \psi_1(1) = \psi_2(1) = \psi_3(1) = 0 \quad (3.3)$$

Вследствие механического содержания фазовые переменные являются непрерывными. Поскольку в изолированных точках оптимальной траектории ограничений на фазовые координаты не наложено, то можно считать непрерывными и переменные ψ_1, \dots, ψ_5 . Однако в точках, где $n_2 = n_1/2$ могут появляться пластические шарниры и тогда величина z претерпевает конечный разрыв. В этих точках $\psi_2 = n_1\psi_1$.

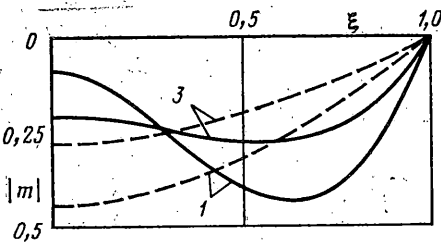
Заметим, что из (3.2) и (3.3) следует, что $\psi_3 = 0$. Поэтому третье уравнение в системе (3.2) в дальнейшем опускается. Системы (3.2) и (2.3) следует интегрировать одновременно с учетом краевых условий (2.4) и (3.3) и требования (2.2). Последнее интерпретируем как уравнение для определения величины n_2 , которую следует подставить в (2.3) и (3.2) перед интегрированием.

Соотношения (3.1) позволяют уравнению (2.2) придать форму

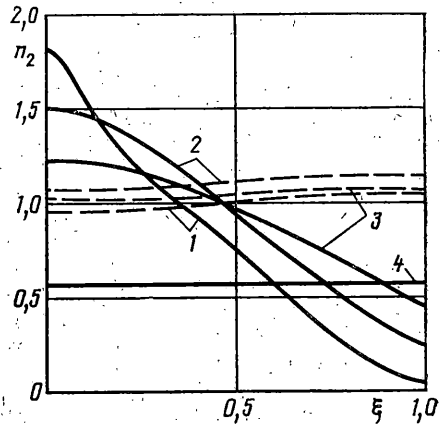
$$n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2 + 3m^2/4 = \quad (3.4)$$

$$= 1/4 (2n_2 - n_1)^2 \alpha^{-2} [3mw\psi_2 + \psi_1 (2n_2 - n_1)^2]^{-2}$$

4. Краевая задача для уравнений (2.3) и (3.2) (всего девять уравнений первого порядка) решалась численно методом сопряженных операторов. Схема вычислений следующая: 1) вычисляется несущая способность оболочки постоянной толщины; 2) определяются распределения напряжений и перемещений в диапазоне умеренно больших прогибов для оболочки постоянной толщины, в частности, определяется величина w_0 ; 3) решается задача оптимизации; 4) оценивается эффективность оптимального проекта.



Фиг. 6



Фиг. 7

Задача определения напряженно-деформированного состояния оболочек в диапазоне больших прогибов имеет смысл лишь при значениях нагрузок превосходящих предельную нагрузку. Поэтому прежде всего следует определить несущую способность оболочки постоянной толщины. С этой целью применяем статический подход, приводящий к решению уравнений

$$m' = q, \quad q' = \alpha(p - n_2) \quad (4.1)$$

с учетом краевых условий (2.4). Уравнения (4.1) являются следствием системы (2.3), если перемещения обращаются в ноль. Несущая способность оболочки вычисляется путем максимизации по параметру p в (4.1) среди статически допустимых решений системы (4.1) при граничных условиях (2.4).

Экономичность найденного проекта оценивается коэффициентом

$$e = \int_0^l h dx / h_* l$$

где h_* — постоянная толщина сравниваемой оболочки, а h — оптимальная толщина.

Результаты вычислений представлены на фиг. 2–7. Все графики соответствуют предельному состоянию оболочек. Однако результаты расчетов показали, что рас-

Таблица 1

N	1	2	3	4	5
n_1	0,1	0,3	0,5	0,9	1,155
p	1,711	1,760	1,756	1,495	0,577
e	0,787	0,845	0,854	0,943	1,000

Таблица 2

N	1	2	3	4
n_1	0,1	0,5	0,9	1,155
p	0,403	0,203	1,115	0,577
e	0,817	0,881	0,956	1,000

Таблица 3

	$\alpha=2$			$\alpha=8$		
p	1,711	1,759	1,809	1,103	1,115	1,122
$w(0)$	0,000	0,499	1,023	0,000	0,522	0,813
e	0,787	0,788	0,786	0,817	0,816	0,814

пределение толщины, а также изгибающего момента, сравнительно мало зависит от изменения интенсивности поперечной нагрузки (в пределах умеренно больших прогибов). Поэтому представленные проекты (практически) являются оптимальными и для умеренно больших прогибов.

На фиг. 2–4 представлены результаты счета для сравнительно коротких оболочек (здесь $\alpha=2$), а фиг. 5–7 соответствуют более длинной оболочке (здесь $\alpha=8$). Сплошными линиями на фиг. 2–7 изображены графики, соответствующие оптимальным проектам, а штриховыми линиями представлены те же графики для оболочек постоянной толщины. Кривые, представленные на фиг. 2–4 (и на фиг. 5–7 соответственно) имеют единую нумерацию. Соответствующие этим кривым значения интенсивности поперечной нагрузки и осевого растяжения приведены в табл. 1 и 2. Здесь представлены также значения коэффициента экономии. Из табл. 1, 2, в частности, следует, что при увеличении осевого растяжения (в некотором диапазоне) несущая способность оболочки также увеличивается. Однако при дальнейшем увеличении растяжения предельная нагрузка оболочки уменьшается. Такой же эффект обнаружен в [8].

Результаты расчетов показывают, что при увеличении осевого растяжения достигаемая экономия материала уменьшается (табл. 1, 2). Но при увеличении поперечного давления при фиксированном растяжении распределение, толщины изменяется лишь незначительно, поэтому и коэффициент эффективности мало изменяется, а прогибы довольно быстро растут (табл. 3). Табл. 3 соответствует случаю, когда $n_1=0,1$. В табл. 3 приведена зависимость максимального прогиба от давления. Здесь указаны также соответствующие значения коэффициента эффективности. Отсюда видно, что при одинаковых прогибах получим больше экономии материала в случае более коротких оболочек. Если величина n_1 стремится к предельному значению $2/\sqrt{3}$, то оптимальная толщина оболочки стремится к постоянной толщине сравнимой оболочки (фиг. 2, 5), напряженное состояние оболочки стремится к безмоментному состоянию (фиг. 3, 6), а n_2 стремится к значению $n_1/2$ (фиг. 4, 7). Сравнивая графики изгибающего момента (фиг. 3, 6), видим, что в случае коротких оболочек максимум его абсолютной величины всегда достигается в центре оболочки, но при длинных оболочках точка максимума удаляется от центра. Следует подчеркнуть, что это явление более заметно при оптимальном распределении материала в оболочке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оптимальное проектирование конструкций. Библиог. указатель./Под ред. Мазалова В. М., Немировского Ю. В. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1975. Ч. 1. 221 с.; Ч. 2. 250 с.
2. Оптимизация механических систем. Указатель отеч. и зарубеж. литературы за 1970–1982 гг./Под ред. Подстригача Я. С. Львов; Львовск. научн. б-ка 1. 1986. Кн. 332 с., Кн. 2. 470 с.
3. Lellep J., Lepik U. Analytical methods in plastic structural design // Eng. Optimiz. 1984. V. 7. N 3. P. 209–239.

4. Немировский Ю. В., Шульгин А. В. Исследование идеальво-пластического состояния трехслойных оболочек вращения минимального веса // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 12. С. 60–66.
5. Шульгин А. В. Цилиндрические трехслойные пластические оболочки абсолютно-минимального веса // Изв. вузов. Машиностроение. 1984. № 10. С. 7–10.
6. Леллер Я. А. Параметрическая оптимизация пластических цилиндрических оболочек с учетом геометрической нелинейности // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 138–146.
8. Леллер Я. А., Ханнус С. Х. Большие прогибы жесткопластических замкнутых цилиндрических оболочек // Учен. зап. Тартуск. ун-та. 1983. № 659. С. 59–65.
9. Леллер Я. А., Ханнус С. Х. Большие прогибы цилиндрической оболочки из жесткопластического материала // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 5. С. 30–36.
10. Sawczuk A. On plastic shell theories at large strains and displacements // Intern. J. Mech. Sci. 1982. V. 24. No. 4. P. 231–244.
11. Леллер Я. А., Маяк Ю. П. Оптимизация жесткопластических геометрически нелинейных цилиндрических оболочек // Учен. зап. Тартуск. ун-та. 1988. № 799. С. 27–36.
12. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
13. Розенблюм В. И. Об условии пластичности для тонкостенных оболочек // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 364–376.
14. Альперт В. Н. Об условии текучести для жестко-пластических оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6. С. 131–139.

Тарту

Поступила в редакцию
15.05.1987