

УДК 539.374

© 1990 г.

Э. А. ГАРРЫЕВ, Г. Б. МУРАВСКИЙ, А. Х. СОБОЛЕВСКИЙ

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ ИСТОЧНИКОВ
В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОНАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕДЕ

Строятся решения динамических плоских задач о действии различного вида источников возмущения в неограниченной упругонаследственной (вязкоупругой) однородной изотропной среде на круглое жесткое включение. Задачи данного типа важны для оценки сейсмических воздействий на тоннели, трубопроводы и другие подземные сооружения.

1. Основные уравнения. Постановка рассматриваемых задач соответствует динамической теории упругости, за исключением соотношений между тензорами напряжений и деформаций, которые принимаются в виде (используются декартовы оси x_1, x_2, x_3):

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda_0 \left[\varepsilon_{hh} + \eta_\lambda \int_0^t G_\lambda(t-t_1) \frac{\partial \varepsilon_{hh}}{\partial t_1} dt_1 \right] + 2\mu_0 \left[\varepsilon_{ij} + \eta_\mu \int_0^t G_\mu(t-t_1) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t_1} dt_1 \right] \quad (1.1)$$

Считается, что время отсчитывается от начала процесса деформирования, λ_0 и μ_0 — статические (долговременные) коэффициенты Ламе, η_λ, η_μ — положительные постоянные, ядра $G_\lambda(z), G_\mu(z)$ — положительны при $z \geq 0$ и монотонно убывают до нуля с ростом аргумента z . При изменении деформаций по гармоническому закону $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\circ \exp(i\omega t)$ напряжения σ_{ij} при $t \rightarrow \infty$ также будут изменяться по гармоническому закону $\sigma_{ij}^\circ \exp(i\omega t)$; при этом

$$\sigma_{ij}^\circ = \lambda^* \varepsilon_{hh}^\circ \delta_{ij} + 2\mu^* \varepsilon_{ij}^\circ \quad (1.2)$$

где введены комплексные коэффициенты Ламе

$$\lambda^* = \lambda_0 [a_\lambda(\omega) + ib_\lambda(\omega)], \quad \mu^* = \mu_0 [a_\mu(\omega) + ib_\mu(\omega)] \quad (1.3)$$

$$a_j = 1 + \eta_j \omega \int_0^\infty G_j(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau, \quad b_j = \eta_j \omega \int_0^\infty G_j(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (j = \lambda, \mu)$$

Далее всюду зависимость от времени берется в виде $\exp(i\omega t)$ ($\omega > 0$) и рассматриваются амплитуды соответствующих величин.

Поскольку соотношения (1.2) для амплитуд не отличаются по структуре от закона Гука, можно в случае отсутствия объемных сил применить традиционное представление вектора амплитуд перемещений u в виде суммы градиента скалярного и ротора векторного потенциалов. При использовании цилиндрических координат r, φ, z приходим к следующему набору частных решений [1] ($n=0, 1, \dots$):

$$\begin{aligned} u_r &= \Gamma_1 [A_n \beta_1 H_n'(z_1) + \alpha \beta_2 B_n H_n'(z_2) + C_n n r^{-1} H_n(z_2)] \\ u_\varphi &= \Gamma_2 [n r^{-1} A_n H_n(z_1) + \alpha B_n n r^{-1} H_n(z_2) + \beta_2 C_n H_n'(z_2)] \\ u_z &= \Gamma_1 [i\alpha A_n H_n(z_1) - i\beta_2^2 B_n H_n(z_2)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\Gamma_1 = e^{iaz} \begin{pmatrix} \sin n\varphi \\ -\cos n\varphi \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = e^{iaz} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}, \quad \beta_j = \left(\frac{\omega^2}{c_j^2} - \alpha^2 \right)^{1/2}$$

$$c_1^2 = (\lambda^* + 2\mu^*)/\rho_0, \quad c_2^2 = \mu^*/\rho_0, \quad z_j = \beta_j r \quad (j=1, 2)$$

где α — произвольный действительный параметр, радикалам β_j соответствуют точки в четвертой четверти комплексной плоскости; A_n, B_n, C_n — произвольные постоянные, $H_n(z_j) \equiv H_n^{(2)}(z_j)$ — вторые функции Ханкеля, ρ_0 — плотность среды. Выбор вторых функций Ханкеля соответствует рассмотрению колебаний неограниченной среды (обеспечивается при учете диссипации экспоненциальное убывание решения на бесконечности). Вид частных решений (1.4) ориентирован на применение преобразования Фурье по координате z и рядов Фурье по переменной φ . Отметим сходство решений (1.4) с известными решениями [3, 4], относящимися к колебаниям упругого полупространства.

Переходя к плоской задаче, полагаем $\alpha=0, B_n=0$. Получаем

$$\begin{aligned} u_r &= \begin{pmatrix} \sin n\varphi \\ -\cos n\varphi \end{pmatrix} \frac{1}{r} [A_n z_1 H_n'(z_1) + C_n n H_n(z_2)] \\ u_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \frac{1}{r} [n A_n H_n(z_1) + z_2 C_n H_n'(z_2)] \\ u_z &= 0, \quad \beta_j = \omega/c_j \end{aligned} \quad (1.5)$$

Выражениям (1.5) соответствуют следующие выражения для амплитуд напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \begin{pmatrix} \sin n\varphi \\ -\cos n\varphi \end{pmatrix} \frac{2\mu^*}{r^2} [A_n \gamma_{1,n}(r) + C_n \eta_{2,n}(r)] \\ \sigma_{r\varphi} &= \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \frac{2\mu^*}{r^2} [A_n \eta_{1,n}(r) + C_n \gamma_{2,n}(r)] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= - \begin{pmatrix} \sin n\varphi \\ -\cos n\varphi \end{pmatrix} \frac{2\mu^*}{r^2} \{ A_n [\gamma_{1,n}(r) + (z_2^2 - z_1^2) H_n(z_1)] + C_n \eta_{2,n}(r) \} \\ \gamma_{j,n}(r) &= H_n(z_j) (n^2 + n^{-1}/2z_j^2) - z_j H_{n-1}(z_j) \\ \eta_{j,n}(r) &= n [z_j H_{n-1}(z_j) - (n+1) H_n(z_j)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

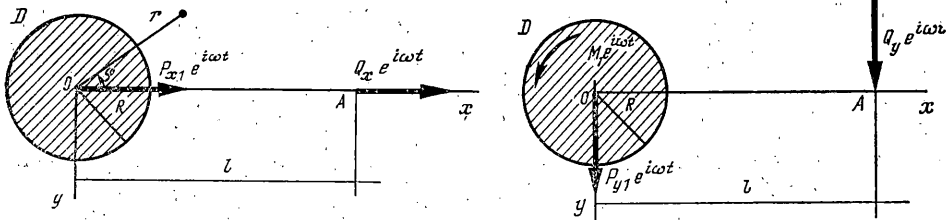
2. Колебания жесткого включения в среде. Построенные решения будем далее использовать для изучения колебаний жесткого круглого включения в упругонаследственной среде, вызванных действием возмущающих источников, причем ограничимся рассмотрением плоских задач. При применении функций (1.5), удовлетворяющих уравнениям движения упругонаследственной среды и требуемым условиям на бесконечности, остается обеспечить удовлетворение граничным условиям на контуре включения (равенство перемещений) и эквивалентность напряжений на поверхности, стягивающейся к точке приложенного возмущающего воздействия, и самого этого воздействия. Эти требования можно выполнить, суммируя решения вида (1.5) и подбирая соответствующим образом постоянные A_n, C_n . Эффективным способом решения рассматриваемых задач является применение принципа взаимности Рэлея, который позволяет разделить задачу на несколько более простых задач. Особенно просто определяется движение включения.

1. Действие сосредоточенной силы (фиг. 1). Сначала рассмотрим действие силы $Q_x \exp(i\omega t)$, приложенной в точке A и направленной вдоль линии OA ; пусть на включение D действует также сила $P_{x1} \exp(i\omega t)$. Применим принцип взаимности Рэлея. Пусть состояние 1 соответствует условиям данной задачи; в качестве состояния 2 принимаем колебания включения вдоль оси x с амплитудой $x_2=1$ при отсутствующем источнике. Запишем

$$x_1 P_{x2} = P_{x1} x_2 + Q_x x_{A2} \quad (2.1)$$

где x_1 — искомая амплитуда включения в данной задаче (в состоянии 1), P_{x2} — амплитуда приложенной к включению силы, обеспечивающей его колебания с амплитудой $x_2=1$. Из (2.1) получаем

$$x_1 = (P_{x1} + \delta_x Q_x) / P_{x2}, \quad \delta_x = x_{A2} \quad (2.2)$$



Фиг. 1

Формула (2.2) показывает, что безразмерная величина δ_x играет роль передачи на включение силы Q_x (сила $\delta_x Q_x$, непосредственно приложенная к включению, создает такое же его движение, что и сила Q_x в точке A). Величину δ_x найдем, применяя (1.5) при $n=1$ (нижняя строка в первом множителе). Запишем граничное условие при $r=R$:

$$\begin{aligned} -R^{-1}[A_1 Z_1 H_1'(Z_1) + C_1 H_1(Z_2)] &= x_2 \\ -R^{-1}[A_1 H_1(Z_1) + Z_2 C_1 H_1'(Z_2)] &= x_2, \quad Z_j = \beta_j R \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x_2 R}{H_0(Z_1)} \frac{\alpha_2}{\Delta}, \quad C_1 = \frac{x_2 R}{H_0(Z_2)} \frac{\alpha_1}{\Delta} \\ \alpha_j &= 2S_j - Z_j, \quad \Delta = Z_1 Z_2 - Z_1 S_2 - Z_2 S_1, \quad S_j = H_1(Z_j) / H_0(Z_j) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Коэффициент δ_x равен u_r при $\varphi=0, r=l$:

$$\delta_x = -\frac{R}{l\Delta} \left[\frac{z_1 \alpha_2 H_1'(z_1)}{H_0(Z_1)} + \frac{\alpha_1 H_1(z_2)}{H_0(Z_2)} \right]$$

Величина P_{x2} в (2.2) играет роль динамической жесткости включения в среде. Для ее определения найдем реакцию R_{x2} окружающей среды, действующую на включение во втором состоянии. По напряжениям σ_{rr} и $\sigma_{r\varphi}$ при $r=R$ находим

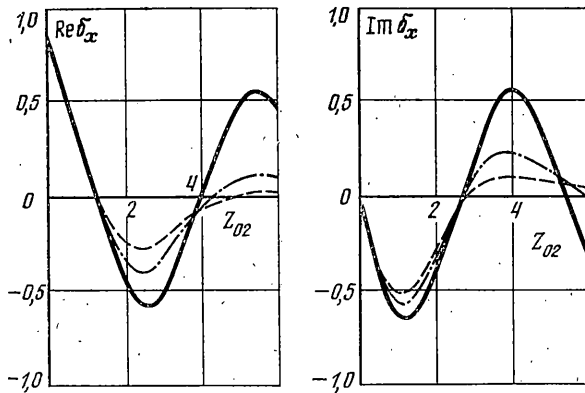
$$\begin{aligned} R_{x2} &= 2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \varphi - \sigma_{r\varphi} \sin \varphi) R d\varphi = \mu^* \pi Z_2^2 R^{-1} [A_1 H_1(Z_1) + C_1 H_1(Z_2)] = \\ &= \mu^* \pi Z_2^2 \Delta^{-1} (S_1 \alpha_2 + S_2 \alpha_1) \end{aligned}$$

Величину P_{x2} можно определить из рассмотрения движения включения вдоль оси x ($x_2=1, m$ — масса включения) $-m\omega^2 x_2 = P_{x2} + R_{x2}$. Имеем

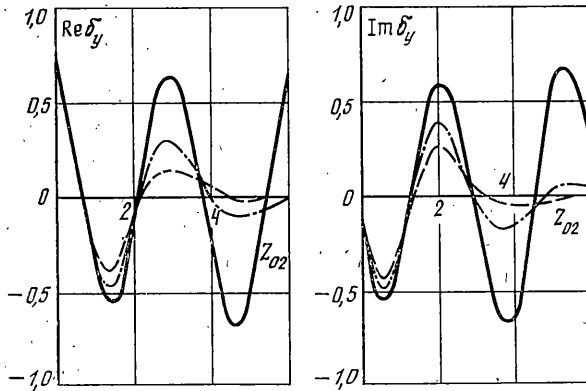
$$\begin{aligned} P_{x2} &= -m\omega^2 x_2 - R_{x2} = -\pi \mu^* m_1 Z_2^2 x_2 - R_{x2} \\ (m_1 &= m / (\pi \rho_0 R^2)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

По формуле (2.2) можно теперь вычислить амплитуду x_1 колебаний включения. В числовых расчетах удобно использовать безразмерный частотный параметр $Z_{02} = \omega R (\rho_0 / \mu_0)^{1/2}$. Принимаем $a_\mu(\omega) = 1, b_\mu(\omega) = \gamma \omega = \gamma_1 Z_{02}$ (Фойхтовский механизм диссипации), $\tau = c_2 / c_1$ — действительная константа (в расчетах $\tau = 3^{-1/2}$). На фиг. 2 показаны зависимости $\text{Re } \delta_x$ и $\text{Im } \delta_x$ от Z_{02} при трех значениях коэффициента $\gamma_1 = 0; 0,1; 0,2$ (сплошная, штрих-пунктирная и штриховая кривые соответственно) и при $l = 3R$.

Найдем напряжения в контакте включения и окружающей среды. Решение данной задачи можно представить как сумму решений двух задач: задачи A о колебаниях включения вдоль оси x с амплитудой x_1 при отсутствии каких-либо внешних воздействий в среде и задачи B о закрепленном включении в среде при действии силы $Q_x \exp(i\omega t)$ в точке A . Напряжения, соответствующие задаче A , определяются по (1,6) при $n=1$ (нижняя строка в первом множителе) при A_1, C_1 по (2.4) с заменой x_2 на x_1 ; контактные напряжения σ_{rr} и $\sigma_{r\varphi}$ определяются при $r=R$. Контактные напря-



Фиг. 2



Фиг. 3

жения в задаче B представим в случае действия силы $Q_x e^{i\omega t}$ в виде разложений

$$\sigma_{rr}^B = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma n} \cos n\varphi, \quad \sigma_{\tau n}^B = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\tau n} \sin n\varphi \quad (2.6)$$

Для определения коэффициентов $a_{\sigma n}$ и $b_{\tau n}$ многократно применим принцип взаимности, считая, что первое состояние соответствует условиям задачи B , а вторые состояния отвечают решению (1.5) при $n=0, 1, 2, \dots$ (нижняя строка). Получаем для каждого n :

$$K[A_n Z_1 H_n'(Z_1) + C_n n H_n(Z_2)] \pi a_{\sigma n} - [n A_n H_n(Z_1) + Z_2 C_n H_n'(Z_2)] \pi b_{\tau n} + Q_x u_{r2} = 0$$

где u_{r2} определяется по (1.5) при $r=l, \varphi=0, n=0, 1, 2, \dots$; $K=2$ при $n=0$ и $K=1$ при $n>0$. Полагая $A_n = Z_2 H_n'(Z_2)$, $C_n = -n H_n'(Z_1)$, определяем $a_{\sigma n}$:

$$a_{\sigma n} = Q_x (K \pi l D_n)^{-1} [z_1 Z_2 H_n'(z_1) H_n'(Z_2) - n^2 H_n(Z_1) H_n(z_2)]$$

$$D_n = Z_1 Z_2 H_{n-1}(Z_1) H_{n-1}(Z_2) - n Z_1 H_n(Z_2) H_{n-1}(Z_1) - n Z_2 H_n(Z_1) H_{n-1}(Z_2)$$

Полагая $A_n = -n H_n(Z_2)$, $C_n = Z_1 H_n'(Z_1)$, определяем $b_{\tau n}$:

$$b_{\tau n} = n Q_x (\pi l D_n)^{-1} [z_1 H_n(Z_2) H_n'(z_1) - Z_1 H_n(z_2) H_n'(Z_1)]$$

Величины $a_{\sigma n}$, $b_{\tau n}$ можно представить в следующем виде:

$$a_{\sigma n} = Q_x (K \pi l \Delta_n)^{-1} [(z_1 P_{n-1,1} - n P_{n,1} S_{n,1})(Z_2 - n S_{n,2}) - n^2 S_{n,1} S_{n,2} P_{n,2}]$$

$$b_{\tau n} = n Q_x (\pi l \Delta_n)^{-1} S_{n,2} [z_1 P_{n-1,1} - n P_{n,1} S_{n,1} - P_{n,2} (Z_1 - n S_{n,1})]$$

$$\Delta_n = Z_1 Z_2 - n Z_1 S_{n,2} - n Z_2 S_{n,1}, \quad S_{n,i} = \frac{H_n(Z_i)}{H_{n-1}(Z_i)}, \quad P_{n,i} = \frac{H_n(z_i)}{H_n(Z_i)}$$

Перейдем к изучению колебаний жесткого включения при действии сосредоточенной силы $Q_y \exp(i\omega t)$, направленной перпендикулярно пря-

мой OA (на фиг. 1 справа). Пусть к включению приложены сила $P_{y1} \exp(i\omega t)$ и пара сил с моментом $M_1 \exp(i\omega t)$. Для определения движения включения применим принцип взаимности дважды. Пусть состояние 1 соответствует условиям данной задачи, а в состоянии 2 включение колеблется поступательно вдоль оси y с единичной амплитудой y_2 . По аналогии с (2.1) запишем

$$y_1 P_{y2} = P_{y1} y_2 + Q_y y_{A2} \quad (2.7)$$

где y_1 — искомая амплитуда колебаний, P_{y2} определяется по (2.5) с заменой x_2 на $y_2=1$. Амплитуда колебаний включения будет $y_1 = (P_{y1} + \delta_y Q_y) / P_{y2}$, $\delta_y = y_{A2}$. Коэффициент передачи δ_y равен $-u_\varphi$ при $r=l$, $\varphi=\pi/2$, $n=1$ (см. (1.5)). Получаем

$$\delta_y = -\frac{R}{l\Delta} \left[\frac{\alpha_2 H_1(z_1)}{H_0(z_1)} + \frac{\alpha_1 z_2 H_1'(z_2)}{H_0(z_2)} \right]$$

На фиг. 3 представлены зависимости $\text{Re } \delta_y$ и $\text{Im } \delta_y$ от параметра Z_{02} при $l/R=3$, $\tau=3^{-1/2}$, $\gamma_1=0; 0,1; 0,2$ (сплошная, штрих-пунктирная и штриховая кривые соответственно).

Для определения амплитуды θ_1 вращательных колебаний включения примем в качестве состояния 2 вращательные колебания включения с амплитудой $\theta_2=1$, соответствующее значение момента пары обозначим M_2 . На основе принципа взаимности получаем

$$\theta_1 M_2 = M_1 \theta_2 + Q_y R \delta_0, \quad \theta_1 = (M_1 + Q_y R \delta_0) / M_2, \quad \delta_0 = y_{A2} / R \quad (2.8)$$

Для определения величин M_2 и δ_0 нужно решить соответствующую вспомогательную задачу. Применяя (1.5) при $n=0$ (верхняя строка), запишем граничное условие при $r=R$:

$$R^{-1} Z_2 C_0 H_0'(Z_2) = \theta_2 R, \quad C_0 = -\theta_2 R^2 [Z_2 H_1(Z_2)]^{-1} \quad (2.9)$$

Коэффициент δ_0 равен $-u_\varphi/R$ при $r=l$:

$$\delta_0 = -\theta_2 H_1(z_2) / H_1(Z_2)$$

Зависимость δ_0 от параметра Z_{02} показана на фиг. 4 для значений $l/R=3$, $\tau=3^{-1/2}$, $\gamma_1=0; 0,1; 0,2$ (сплошная, штрих-пунктирная и штриховая кривые соответственно).

Для определения величины M_2 найдем предварительно реактивный момент, действующий на включение со стороны окружающей среды во втором состоянии

$$\mu_2 = \int_0^{2\pi} \sigma_{r\varphi} R^2 d\varphi = 2\pi R^2 \sigma_{r\varphi}$$

где $\sigma_{r\varphi}$ определяется по (1.6) при $n=0$, $r=R$, C_0 по (2.9). Получаем

$$\mu_2 = -4\mu^* \pi R^2 \theta_2 (1/2 Z_2 / S_2 - 1)$$

Теперь из рассмотрения вращательных колебаний включения можно найти величину M_2 :

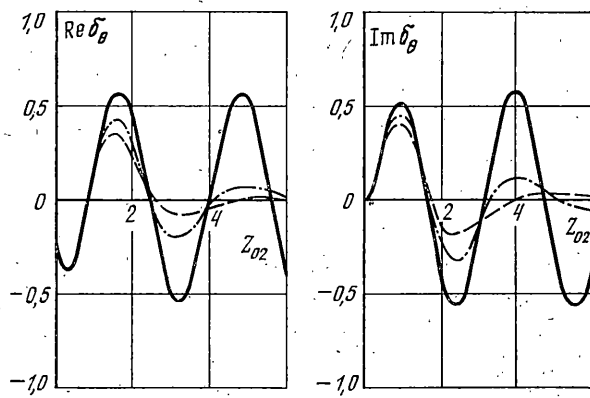
$$\begin{aligned} -\theta_2 \omega^2 I = M_2 + \mu_2, \quad M_2 = +\mu_2 - \theta_2 \omega^2 I = \\ = -\mu_2 - \pi \mu^* I_1 Z_2^2 \theta_2 R^2, \quad I_1 = I / (\pi \rho_0 R^4) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где I — момент инерции включения относительно его центральной оси, перпендикулярной плоскости движения. Зная M_2 и δ_0 , можно по (2.8) определить амплитуду вращательных колебаний.

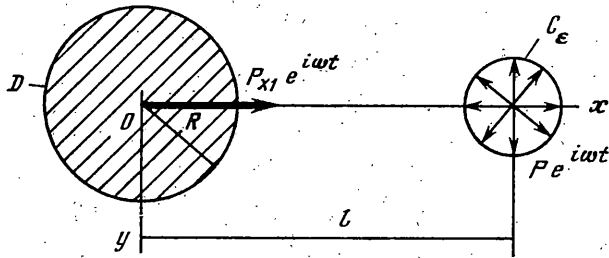
Для определения напряжений в контакте включения и окружающей среды вновь представим решение задачи как сумму решений задач A и B . В условиях задачи A включение двигается при известных амплитудах y_1 и θ_1 . Напряжения будут

$$\sigma_{rr}^A = 2\mu^* R^{-2} [A_1 \gamma_{1,1}(R) + C_1 \eta_{2,1}(R)] \sin \varphi \quad (2.11)$$

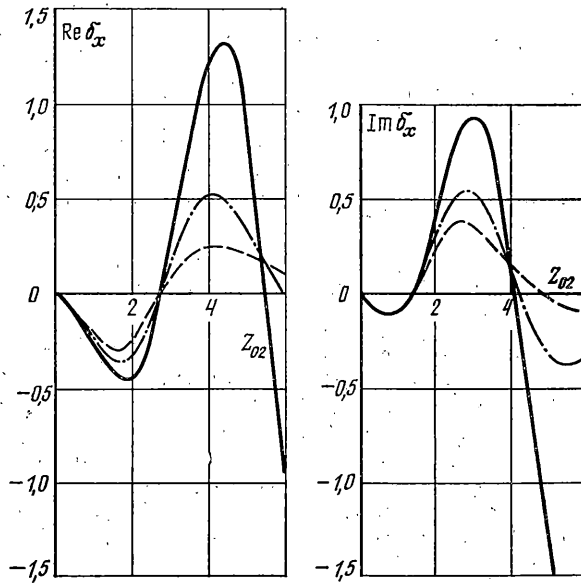
$$\sigma_{r\varphi}^A = 2\mu^* R^{-2} \{C_0 \gamma_{2,0}(R) + [A_1 \eta_{1,1}(R) + C_1 \gamma_{2,1}(R)] \cos \varphi\}$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Здесь C_0 определяется по (2.9) при $\theta_2 = \theta_1$; A_1 и C_1 по (2.4) при $x_2 = y_1$. Контактные напряжения в задаче B представим в виде разложений

$$\sigma_{rr}^B = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\sigma n} \sin n\varphi, \quad \sigma_{r\varphi}^B = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau n} \cos n\varphi \quad (2.12)$$

При помощи принципа взаимности получаем следующие выражения для коэффициентов разложений

$$a_{\tau n} = -Q_y (K\pi\lambda\Delta_n)^{-1} \{ z_2 P_{n-1, 2} - n P_{n, 2} S_{n, 2} \} (Z_1 - n S_{n, 1}) - n^2 S_{n, 1} S_{n, 2} P_{n, 1}]$$

$$b_{\sigma n} = Q_y n S_{n, 1} (\pi\lambda\Delta_n)^{-1} [z_2 P_{n-1, 2} - n P_{n, 2} S_{n, 2} - P_{n, 1} (Z_2 - n S_{n, 2})]$$

2. Действие симметричного источника (фиг. 5). Сначала считаем нагрузку $p=Q/(\pi\epsilon^2)$ приложенной к окружности C_ϵ с центром в точке A , затем радиус окружности устремим к нулю. Пусть к включению приложена возмущающая сила $P_{x1} \exp(i\omega t)$. По аналогии с (2.1):

$$x_1 P_{x2} = P_{x1} x_2 + \int_{C_\epsilon} p u_{n2} ds$$

Состояние 1 соответствует нагрузкам фиг. 5, а состояние 2 такое же, как и при изучении воздействий, показанных на фиг. 1. Поток вектора u_2 через цилиндрическую поверхность C_ϵ можно при $\epsilon \rightarrow 0$ заменить дивергенцией u_2 в точке A , умноженной на площадь круга. Запишем

$$x_1 P_{x2} = P_{x1} + Q \delta_x / R, \quad x_1 = (P_{x1} + Q \delta_x / R) / P_{x2} \quad (r=l, \varphi=0)$$

$$\delta_x = R \operatorname{div} u_2 = R \left[\frac{\partial u_{r2}(l, 0)}{\partial r} + \frac{u_{r2}(l, 0)}{l} + \frac{1}{l} \frac{\partial u_{\varphi 2}(l, 0)}{\partial \varphi} \right]$$

Величину P_{x2} можно определить по (2.5). Коэффициент передачи δ_x найдем при помощи (1.5) при $n=1$ (нижняя строка в первом множителе); коэффициенты A_1 и C_1 определяются по (2.4). Будем иметь

$$\delta_x = \alpha_2 Z_1^2 H_1(z_1) / (H_0(Z_1) \Delta)$$

Несколько другим путем данная формула получена в [2]. Поведение $\operatorname{Re} \delta_x$ и $\operatorname{Im} \delta_x$ в зависимости от частотного параметра Z_{02} при $l/R=3$, $\tau=3^{-1/2}$, $\gamma_1=0; 0,1; 0,2$ (сплошная, штрих-пунктирная и штриховая кривые соответственно) представлено на фиг. 6.

При изучении контактных напряжений поступаем по аналогии с изложенным для случая воздействий, показанных на фиг. 1. Приведем выражения для коэффициентов разложения напряжений в задаче B (см. (2.6)):

$$a_{on}^B = -Q Z_1^2 (K \pi R^2 \Delta_n)^{-1} P_{n,1} S_{n,1} (Z_2 - n S_{n,2})$$

$$b_{in}^B = -Q n Z_1^2 (\pi R^2 \Delta_n)^{-1} P_{n,1} S_{n,1} S_{n,2}$$

3. Действие сосредоточенного момента (фиг. 7). Действующий момент считаем сначала приложенным к окружности C_ϵ , обозначая соответствующие напряжения $\tau = M / (2\pi\epsilon^2)$. Пусть к включению приложены момент $M_1 \exp(i\omega t)$ и сила $P_{y1} \exp(i\omega t)$. Данная задача во многом аналогична задаче, представленной на фиг. 1 (справа). Вместо уравнения (2.7) получим уравнение

$$y_1 P_{y2} = P_{y1} y_2 + \int_{C_\epsilon} \tau u_{r2} ds$$

Здесь y_1 — амплитуда колебаний включения в состоянии 1, P_{y2} имеет прежний смысл, u_{r2} — тангенциальные на окружности C_ϵ компоненты амплитуд колебаний второго состояния. Устремляя ϵ к нулю, запишем

$$y_1 P_{y2} = y_2 P_{y1} + M \delta_y R^{-1}, \quad y_1 = (P_{y1} + M \delta_y R^{-1}) / P_{y2} \quad (2.12)$$

$$\delta_y = \frac{R}{2} [\operatorname{rot} u_2(A)]_z = \frac{R}{2r} \left[\frac{\partial (r u_{\varphi 2})}{\partial r} - \frac{\partial u_{r2}}{\partial \varphi} \right] \quad (2.13)$$

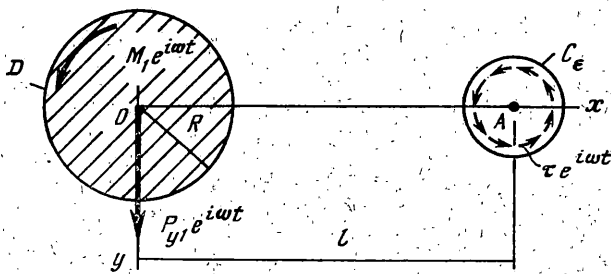
Коэффициент передачи δ_y найдем в соответствии с (1.5) при $r=l$, $\varphi = \pi/2$, $n=1$;

$$\delta_y = -1/2 R r^{-2} C_1 Z_2^2 H_1(z_2)$$

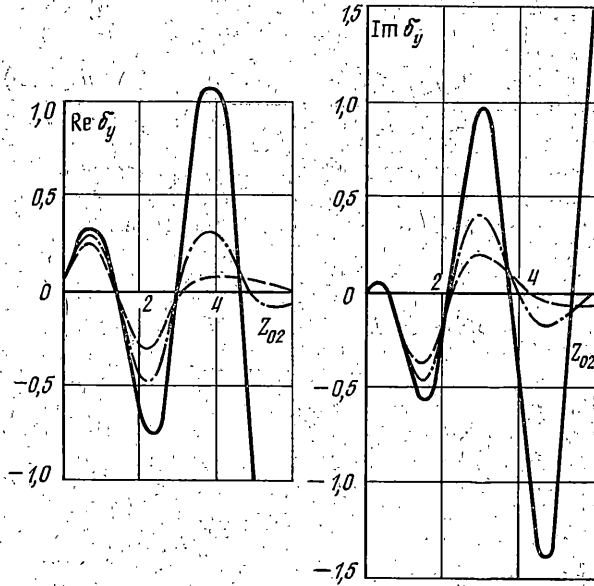
где C_1 — определяется по (2.4) с заменой x_2 на $y_2=1$. Получаем

$$\delta_y = -\frac{1}{2} Z_2^2 \frac{\alpha_1}{\Delta} \frac{H_1(z_2)}{H_0(Z_2)}$$

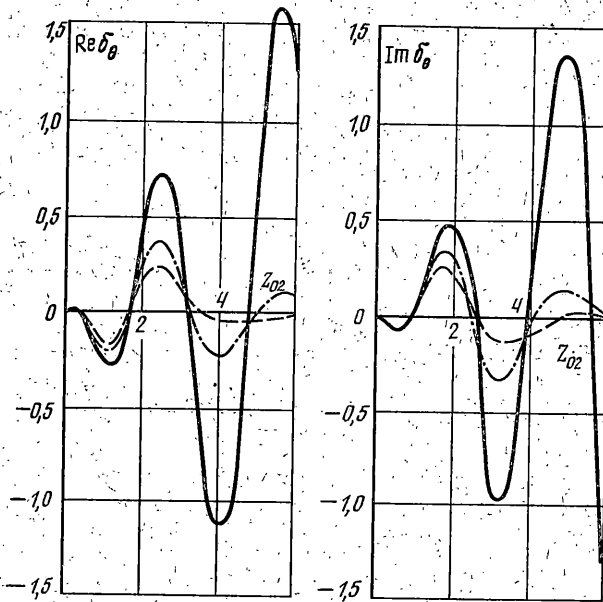
Зависимость $\operatorname{Re} \delta_y$ и $\operatorname{Im} \delta_y$ от параметра Z_{02} показана на фиг. 8 ($\tau=3^{-1/2}$, $l/R=3$, $\gamma_1=0; 0,1; 0,2$).



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Для определения амплитуды вращательных колебаний включения θ_1 рассматривается второе состояние такое же, как и при решении задачи, показанной на фиг. 1 (справа). Вместо уравнений (2.8) запишем

$$M_2\theta_1 = M_1\theta_2 + M\delta_0, \theta_1 = (M_1 + \delta_0 M) / M_2 \quad (2.14)$$

где коэффициент передачи δ_0 определяется по (2.13) без множителя R . Используя (1.5) при $n=0, r=l$ (верхняя строка в первом множителе) и (2.9) получаем

$$\delta_0 = {}^1/2 Z_2 H_0(Z_2) / H_1(Z_2)$$

Фиг. 9 иллюстрирует поведение коэффициента δ_0 в зависимости от Z_{02} (параметры те же, что в предыдущих случаях). Зная δ_0 и M_2 (см. (2.10)), можно найти при помощи (2.14) амплитуду вращательных колебаний включения.

При изучении контактных напряжений учтем, что напряжения в задаче A определяются по прежним формулам (2.11), но величины θ_1 и u_1 нужно находить по (2.14) и (2.12). Контактные напряжения в задаче B представим в виде разложений (2.12). Приведем окончательные выражения для коэффициентов разложения

$$a_{\tau n}^B = -{}^1/2 M (K\pi R^2 \Delta_n)^{-1} Z_2^2 (Z_1 - n S_{n,1}) P_{n,2} S_{n,2}$$

$$b_{\sigma n}^B = {}^1/2 n M (\pi R^2 \Delta_n)^{-1} Z_2^2 S_{n,1} P_{n,2} S_{n,2}$$

В заключение заметим, что в построенных выше решениях можно осуществить переход к случаю плоских волн, удаляя источник в бесконечность. При этом следует соответствующим образом увеличивать интенсивность источника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муравский Г. Б., Соболевский А. Х. Колебания тоннеля кругового очертания в упругонаследственной среде // Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений: Тез. докл. 6-й Всесоюз. конф. Л.: ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1985. С. 114-116.
2. Муравский Г. Б., Соболевский А. Х. Колебания кругового жесткого включения в упругонаследственной среде // Строит. механика и расчет сооружений. 1988. № 1. С. 35-40.
3. Vucroft G. N. Forced vibration of a rigid circular plate on a semiinfinite elastic space and on elastic stratum // Phil. trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1956. V. 248. No 948. P. 327-368.
4. Sezawa K. Further studies on Reyleigh-waves having some azimuthal distribution // Bull. Earthquake Res. Inst. Tokya. 1929. V. 6. P. 1-18.

Москва

Поступила в редакцию
25.04.1988