МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1989

УДК 539.3

А. А. ШВАБ

НЕКОРРЕКТНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В работе рассматривается класс неклассических задач теории упругости о восстановлении полного тензора напряжений в теле, когда на части поверхности тела заданы одновременно нагрузки и перемещения, а на другой ее части условия не определены. К таким задачам сводятся: задачи тензометрии и задачи голографической интерферометрии; задачи геомеханики, когда восстанавливается поле напряжений около подземных сооружений по измерениям смещений на свободной от нагрузок поверхности; задачи оценки полей напряжений на моделях объектов по замерам смещений на их поверхностях.

Показано, что задачи с переопределенными условиями на части границы тела относятся к условно корректным задачам. Обсуждаются возможные методы решения таких задач. Приведён пример решения пространственной задачи для двусвязного тела.

1. Рассмотрим упругое тело объема V с поверхностью S, на части $S_{u\sigma}$ которой будем считать заданными $\mathbf{P}$ – вектор нагрузки, $\mathbf{u}$ – вектор смещения:

$$\mathbf{u}=(u_1\check{}, u_2\check{}, u_3\check{}),\ \mathbf{P}=(P_1\check{}, P_2\check{}, P_3\check{}) \text{ на } S_{u\sigma} \tag{1.1}$$

Полагаем, что S – кусочно-гладкая, $u, P\in C^2$. Пусть $a_i=a_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i=1, 2, 3)$ ортогональные криволинейные координаты такие, что поверхность $a_3(x_1, x_2, x_3)=0$ совпадает с $S_{u\sigma}$ и $|\partial a_i/\partial x_j|\neq 0$ $(i, j=1, 2, 3)$.

Назовем задачей $(\mathbf{u}, \mathbf{P})$ задачу определения полей напряжений и деформаций в теле при условиях (1.1). Сформулируем граничные условия соответствующие (1.1) для плоского и объемного состояний.

Покажем, что из условия (1.1) могут быть определены все компоненты тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij}. Так дифференцируя $\mathbf{u}$ вдоль $S_{u\sigma}$, находим производные $\partial\mathbf{u}/\partial a_i$ $(i=1, 2)$. Подставляя последние в соотношения Коши для деформаций [1], найдем значения ε_{kl} $(k, l=1, 2)$. Записывая $\mathbf{P}$, как $P_i\check{}=\sigma_{ij}n_j$ на $S_{u\sigma}$, где n_j – компоненты единичного вектора нормали n к $S_{u\sigma}$, на $S_{u\sigma}$ получим $\sigma_{i3}=P_i\check{}$ $(i=1, 2, 3)$. Следовательно на $S_{u\sigma}$ остаются неопределенными ε_{q3}, σ_{kl} $(q=1, 2, 3;\ k, l=1, 2)$. Определим неизвестные ε_{ij}, σ_{ij}. Согласно обобщенному закону Гука:

$$\varepsilon_{kl}=\sum_{m,n=1}^{2} A_{klmn}\sigma_{mn}+\sum_{q=1}^{3} A_{klq3}\sigma_{q3} \qquad (k, l=1, 2)$$

Заметим, что коэффициенты A_{klmn} $(k, l, m, n=1, 2)$ образуют положительно определенную матрицу. Следовательно, матрица $\|B_{klmn}\|=\|A_{klmn}\|^{-1}$ также является положительно определенной. Для неизвестных компонент σ_{kl} $(k, l=1, 2)$ на $S_{u\sigma}$ получим

$$\sigma_{kl}=\sum_{m,n=1}^{2} B_{klmn}\Big(\varepsilon_{mn}-\sum_{q=1}^{3}A_{nmq3}\sigma_{q3}\Big) \tag{1.2}$$

По известным σ_{ij} на $S_{u\sigma}$ из закона Гука находятся ε_{q3} $(q=1, 2, 3)$. Таким образом, из (1.1) на $S_{u\sigma}$ восстанавливаются все компоненты ε_{ij}, σ_{ij}.

Ввиду переопределенности условий на $S_{u\sigma}$ рассмотрим вопрос о получении некоторых характеристик поля напряжений на $S_{u\sigma}$ из условия (1.1).

Лемма 1. Если $\mathbf{u}$, $\mathbf{P}\in C^{N+1}$, то условие (1.1) определяет на $S_{u\sigma}$ значения $\partial^{N+1}u_i/\partial a_k^{N+1}$, $\partial^N\varepsilon_{ij}/\partial a_k^N$, $\partial^N\sigma_{ij}/\partial a_k^N$ $(i, j, k=1, 2, 3)$ (изотропная среда).

Доказательство. Из условия (1.1) при $\mathbf{u}$, $\mathbf{P}\in C^{N+1}$ следует, что на $S_{u\sigma}$ могут быть восстановлены ε_{ij}, σ_{ij}, а следовательно и $\partial^N\varepsilon_{ij}/\partial a_k^N$, $\partial^{N+1}u_i/\partial^{N+1}a_k$, $\partial^N\sigma_{ij}/\partial a_k^N$ $(k=1, 2; ij=1, 2, 3)$. Для доказательства леммы очевидно необходимо выяснить возможность нахождения производных по a_3. Из соотношений Коши для деформаций имеем

$$\frac{\partial u_3}{\partial a_3}=H_3\varepsilon_{33}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial a_1}u_1^\vee+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial a_2}u_2^\vee$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_3}=H_3\varepsilon_{i3}-\frac{H_3^2}{H_i}\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{u_3^\vee}{H_3}\right)+\frac{u_i^\vee}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial a_3}\qquad (i=1,2)$$

Представим уравнения Ламе относительно перемещений в форме $\partial^2u_i/\partial a_3^2=F_i(u_j^\vee, \partial u_j/\partial a_q, \partial^2u_j^\vee/\partial a_l^2)$ $(i, j, q=1, 2, 3; l=1, 2)$, где функции F_i определяются из уравнений Ламе [1]. Нетрудно видеть, что аргументы F_i могут быть найдены из условия (1.1). Следовательно на $S_{u\sigma}$ находятся как $\partial u_i/\partial a_3$, так и $\partial^2u_i/\partial a_3^2$. Дифференцируя уравнения Ламе по a_3 с учетом найденных производных от u_i по a_3 получим соотношение для $\partial^3u_i/\partial a_3^3$. Таким образом, последовательным многократным дифференцированием уравнений Ламе можно восстановить производные порядка $N+1$ по a_3 от u_i $(i=1, 2, 3)$. Очевидно, зная последние из соотношений Коши и закона Гука могут быть найдены $\partial^N\varepsilon_{ij}/\partial a_3^N$, $\partial^N\sigma_{ij}/\partial a_3^N$. Лемма доказана.

Назовем задачей В задачу определения полей напряжений и деформаций в теле, при условиях, когда на $S_{u\sigma}$ известны σ_{ij}, $\partial\sigma_{ij}/\partial n$ $(i, j=1, 2, 3)$ (n — внешняя нормаль к $S_{u\sigma}$).

Лемма 2. Задачи $(\mathbf{u}, \mathbf{P})$ и В эквивалентны.

Так как $\partial\sigma_{ij}/\partial n=(\partial\sigma_{ij}/\partial a_3)/H_3$, то в силу леммы 1 из (1.1) на $S_{u\sigma}$ определяются $\partial\sigma_{ij}/\partial n$. Обратно при задании σ_{ij}, $\partial\sigma_{ij}/\partial n$ используя известные формулы Чезаро, где интегрирование ведется по пути, принадлежащем $S_{u\sigma}$, восстанавливаются с точностью до жесткого смещения значение $\mathbf{u}$, а из равенств $\sigma_{i3}=P_i$ вектор $\mathbf{P}$ на $S_{u\sigma}$.

Отличительной особенностью задачи В является то, что деформации ε_{ij}, соответствующие σ_{ij}, удовлетворяют определенным уравнениям совместности на $S_{u\sigma}$, кроме того производные $\partial\sigma_{i3}/\partial n=H_3^{-1}\partial\sigma_{i3}/\partial a_3$ не являются независимыми, т. к. они могут быть найдены из уравнений равновесия на $S_{u\sigma}$ через σ_{ij}, $\partial\sigma_{ij}/\partial a_k$ $(k=1, 2)$. В дальнейшем будем считать, что условия σ_{ij}, $\partial\sigma_{ij}/\partial n$ на $S_{u\sigma}$ в этом смысле согласованы.

Рассмотрим обобщенное плоское состояние. В этом случае условие (1.1) можно свести к условиям для комплексных функций $\varphi=\varphi(z)$, $\Psi=\Psi(z)$. Здесь $S_{u\sigma}$ является частью контура, ограничивающего тело. Согласно [2] на $S_{u\sigma}$ будем иметь

$$\begin{gathered}\varkappa\varphi(t)-\overline{t\varphi'(t)}-\overline{\Psi(t)}=2\mu(u_1^\circ+iu_2^\circ)\\ \varphi(t)+t\varphi'(t)+\Psi(t)=f_1+if_2\end{gathered}\qquad(1.3)$$

$$f_1+if_2=i\int_{t_0}^{t}(P_1^\circ+iP_2^\circ)\,dt,\qquad \mu=E/2(1+\nu),\qquad \varkappa=3-4\nu$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, u_1°, u_2°, P_1°, P_2° — компоненты $\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$ в декартовой системе координат. Складывая (1.3), для φ на $S_{u\sigma}$ получим

$$\varphi|_{S_{u\sigma}}=F(t)\equiv(1+\varkappa)^{-1}[2\mu(u_1^\circ+iu_2^\circ)+f_1+if_2]\qquad(1.4)$$

Дифференцируя (1.4) по t, для φ' на $S_{u\sigma}$ имеем

$$\varphi'|_{S_{u\sigma}}=F_t'[\cos(x,t)+\cos(y,t)]^{-1}\qquad(1.5)$$

После подстановки (1.4), (1.5) в (1.3) для Ψ на $S_{u\sigma}$ находим

$$\Psi|_{S_{u\sigma}}=(1+\varkappa)^{-1}\{[\varkappa f_1-2\mu u_1^\circ+i(2\mu u_2^\circ+\varkappa f_2)]-$$
$$-\bar{t}[2\mu u_1^\circ+f_1+i(2\mu u_2^\circ+f_2)]_t'[\cos(x,t)+i\cos(y,t)]^{-1} \tag{1.6}$$

Следовательно, соотношения (1.4), (1.6) определяют значения функций φ, Ψ через условие (1.1).

Решение плоской задачи теории упругости может быть построено с помощью функции напряжений U, удовлетворяющей уравнению $\Delta^2 U=0$. Сведем условия (1.1) к условиям для U и ее производных. По значению P на $S_{u\sigma}$ согласно [2] можно определить U, $\partial U/\partial n$. Запишем φ в виде $\varphi=$ $=l^\smallsmile+iq^\smallsmile$. При таких обозначениях $\partial l^\smallsmile/\partial x=\Delta U/4$ [2]. Дифференцируя $l^\smallsmile$, $q^\smallsmile$ по t и учитывая соотношение Коши — Римана, получим

$$l_t^{\smallsmile\prime}=\cos(x,\ t)\partial l^\smallsmile/\partial x+\cos(y,\ t)\partial l^\smallsmile/\partial y$$
$$q_t^{\smallsmile\prime}=-\cos(x,\ t)\partial l^\smallsmile/\partial y+\cos(y,\ t)\partial l^\smallsmile/\partial x$$

Отсюда следует, что $\partial l^\smallsmile/\partial x=l_t^{\smallsmile\prime}\cos(x,\ t)+q_t^{\smallsmile\prime}\cos(y,\ t)$. Тогда с учетом равенств $l^\smallsmile=(2\mu u_1^\circ+f_1)/(1+\varkappa)$, $q^\smallsmile=(2\mu u_2^\circ+f_2)/(1+\varkappa)$ находим

$$\Delta U|_{S_{u\sigma}}=4(1+\varkappa)^{-1}[(2\mu u_1^\circ+f_1)_t'\cos(x,t)+(2\mu u_2^\circ+f_2)_t'\cos(y,t)] \tag{1.7}$$

Определим $\partial(\Delta U)/\partial n$. Из (1.5) и (1.7) нетрудно видеть, что $\Delta U=2(\varphi'+$ $+\bar{\varphi}')$. Для аналитической φ справедливо равенство $\partial(\varphi'+\bar{\varphi}')/\partial n=i\partial(\varphi'-$ $-\bar{\varphi}')/\partial t$. С учетом последнего и (1.5) получим

$$\frac{\partial}{\partial n}(\Delta U)|_{S_{u\sigma}}=-\frac{4}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}[(2\mu u_2^\circ+f_2)_t'\cos(x,t)-(2\mu u_1^\circ+f_1)_t'\cos(y,t)]$$

Таким образом, условия (1.1) эквивалентны заданию на $S_{u\sigma}$ значений U, $\partial U/\partial n$, ΔU, $\partial(\Delta U)/\partial n$. Отметим, что в [3] упоминаются аналогичные условия для бигармонического уравнения и отмечается возможность постановки такой задачи в теории упругости без указания механического смысла граничных условий.

Таким образом, условия (1.1) в плоском случае сводятся либо к условиям для аналитических функций φ, Ψ; либо для U, $\partial U/\partial n$, ΔU, $\partial(\Delta U)/\partial n$. В пространственном случае аналогичные условия можно свести к заданию u_i, $\partial u_i/\partial n$ на $S_{u\sigma}$ (задача в перемещениях), или к заданию σ_{ij}, $\partial\sigma_{ij}/\partial n$ на $S_{u\sigma}$ (задача в напряжениях).

В п. 3 рассмотрены некоторые решения задачи (**u**, **P**) при формулированных выше условиях.

Возможно, что экспериментально могут быть получены не **u**, **P** на $S_{u\sigma}$, а функции от них например, $\Theta_1(u,\ P)=0$, $\Theta_2(u,\ P)=0$ на $S_{u\sigma}$. Если последние однозначно разрешимы относительно **u**, **P**, то задача определения напряжений в теле эквивалентна задаче (**u**, **P**). В некоторых случаях для разрешимости $\Theta_1=\Theta_2=0$ необходимы дополнительные условия. При этом, если удается экспериментально их получить или обосновать, то можно также прийти к задаче (**u**, **P**). Ниже разобран такой пример.

2. Остановимся на задаче тензометрии (определение напряжений в объеме детали по данным измерений на поверхности [4]). Задача тензометрии, как и задача (**u**, **P**) относится к неклассическим задачам. В задачах тензометрии можно выделить два случая: когда значения ε_{ij} получены на всей поверхности и когда ε_{ij} заданы на части S. В первом случае задача тензометрии достаточно изучена в [4] и сводится к задаче Дирихле для системы Белтрами — Мичелла.

Рассмотрим второй случай. Допустим, что данные тензометрии сняты на части S, т. е. на $S_{u\sigma}$. При подстановке σ_{ij} в уравнения равновесия можно восстановить $\partial\sigma_{i3}/\partial a_3$ ($i=1, 2, 3$) на $S_{u\sigma}$. До сведения задачи тензометрии к задаче B необходимо доопределить $\partial\sigma_{kl}/\partial n$ (k, $l=1, 2$) на $S_{u\sigma}$. Прямое экспериментальное определение последних не представляется возможным. Как будет отмечено выше, задачи (**u**, **P**) или B имеют единственное решение, поэтому в общем случае в задаче тензометрии нет единственности решения. Этим частично можно объяснить использование тензометодов в основном только для оценки напряжений на поверхности тела $S_{u\sigma}$. Остановимся на одном из вариантов преодоления указанной трудности. Рассмотрим возможность доопределения данных тензометрии частичными замерами смещений на $S_{u\sigma}$ с целью постановки задачи ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$).

Допустим, что на свободной от нагрузок поверхности $S_{u\sigma}(\mathbf{P}=0)$ измерены $\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{kl}{}^{\vee}$ (k, $l=1$, 2), причем $\partial H_2/\partial a_3\neq 0$ на $S_{u\sigma}$. Тогда из соотношений для деформаций будем иметь

$$\varepsilon_{ii}{}^{\vee}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial u_i}{\partial a_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial a_j}u_j+\frac{1}{H_iH_3}\frac{\partial H_i}{\partial a_3}u_3 \tag{2.1}$$

$$2\varepsilon_{12}{}^{\vee}=\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{u_2}{H_2}\right)+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{u_1}{H_1}\right) \qquad (i,j=1,2;\ i\neq j)$$

Исключая из (2.1) компоненту u_3 получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_1}{\partial a_1}-\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial H_2}{\partial a_3}\right)^{-1}\frac{\partial H_1}{\partial a_3}\frac{\partial u_2}{\partial a_3}=\varepsilon_{11}{}^{\vee}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial a_2}u_2-\\ -\frac{H_2}{H_1}\left(\frac{\partial H_2}{\partial a_3}\right)^{-1}\frac{\partial H_1}{\partial a_3}\varepsilon_{22}{}^{\vee}+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial a_3}\left(\frac{\partial H_2}{\partial a_3}\right)^{-1}\frac{\partial H_2}{\partial a_1}u_1\\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_1}{\partial a_2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_2}{\partial a_1}=\frac{u_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial a_1}+\frac{u_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial a_2}+2\varepsilon_{12}{}^{\vee}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) представляет систему уравнений смешанного типа относительно u_1, u_2 на $S_{u\sigma}$. Уравнение для определения характеристик системы (2.2) имеет вид

$$da_2/da_1=\pm[(H_1/H_2)(\partial H_1/\partial a_3)(\partial H_2/\partial a_3)^{-1}]^{1/2}$$

Отсюда следует, что если величина $(H_1/H_2)(\partial H_1/\partial a_3)(\partial H_2/\partial a_3)^{-1}$ равна, меньше или больше нуля, то система (2.2) относится соответственно к параболическому, эллиптическому или гиперболическому типам.

В общем случае поверхность $S_{u\sigma}$ можно представить в виде суммы подобластей в каждой из которых тип (2.2) постоянный. Для сведения к задаче ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) в каждой из подобластей следует указать такие кривые, замеры смещений на которых позволяют однозначно разрешить (2.2). Пусть, например, $S_{u\sigma}$ сферическая поверхность, т. е. $a_1=\Theta$, $a_2=\lambda$, $H_1=R$, $H_2=R\sin\Theta$, $H_3=1$, где λ, Θ, R — сферические координаты. В этом случае (2.2) относится к гиперболическому типу. Анализ характеристик (2.2) на $S_{u\sigma}$ показывает, что например, при задании u_1, u_2 на линии $\lambda=0$ можно однозначно восстановить u_1, u_2 на поверхности $\lambda\in[0,2\pi]$, $\Theta\in[\delta_0,\pi-\delta_0]$ ($\delta_0=\mathrm{const}$, $0<\delta_0<\pi/2$). По найденным u_1, u_2 из (2.1) определяется u_3, а следовательно и вектор $\mathbf{u}$.

При $\partial H_1/\partial a_3=\partial H_2/\partial a_3=0$ из соотношения (2.1) не удается выразить u_3, а следовательно, свести задачу тензометрии к задаче ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) только посредством измерений смещений u_1, u_2.

Если известны некоторые особенности деформированного состояния, то количество измерений можно значительно сократить. Так предположим, что $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=0$, $u_2=0$, $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{11}{}^{\vee}(a_1)$, $\varepsilon_{22}=\varepsilon_{22}{}^{\vee}(a_1)$, т. е. значения ε_{ij} зависят только от a_1 на $S_{u\sigma}$. Описанное состояние может возникнуть, например, в телах вращения при осесимметричных нагрузках. Из (2.2) для u_1 следует

$$\frac{1}{H_1}\frac{du_1}{da_1}-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial a_3}\left(\frac{\partial H_2}{\partial a_3}\right)^{-1}\frac{\partial H_2}{\partial a_1}u_1=\varepsilon_{11}{}^{\vee}-\frac{H_2}{H_1}\left(\frac{\partial H_2}{\partial a_3}\right)^{-1}\frac{\partial H_1}{\partial a_3}\varepsilon_{22}{}^{\vee} \tag{2.3}$$

Для решения (2.3) достаточно задать u_1 в произвольной точке a_1. При $\partial H_1/\partial a_3=0$ ($S_{u\sigma}$ — поверхность цилиндра) из (2.1) определяются u_1, u_2 с точностью до жесткого смещения, т. е. в этом случае задача тензометрии совпадает с задачей ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$).

Кроме перечисленных случаев возможны ситуации, когда вообще можно избежать измерений смещений, например, если из соображений симметрии находятся линии уровня $u_1=\mathrm{const}$, $u_2=\mathrm{const}$ или линия $\mathbf{u}=0$ при жестком замещении. Наличие этих данных о смещениях может оказаться достаточным для разрешимости (2.2) на $S_{u\sigma}$. Из сказанного следует, что для оценки напряжений внутри тела в ряде случаев целесообразно комбинировать методы тензометрии с методами измерения смещений. Следует отметить, что в отличии от тензометодов метод голографической интерферометрии дает значение $\mathbf{u}$ на свободной поверхности ($\mathbf{P}=0$), а это позволяет однозначно решить задачу ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$), т. е. восстановить поле σ_{ij} в объекте.

3. Остановимся на вопросах корректности и методах решения задачи ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) и В. Из леммы 1 следует, что если $\mathbf{u}$, $\mathbf{P}\in C^{\infty}$, то задача ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) может быть сведена к задаче аналитического продолжения. В плоском случае задача ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) сводится к восстановлению функций φ, Ψ заданных на части некоторого контура. При $\mathbf{u}$, $\mathbf{P}\in C^2$, как было показано в п. 1, задача ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) может быть сведена к задаче Коши для бигармонического уравнения (в плоском случае) или для уравнений Ламе, либо для системы Белтрами — Мичела в пространственном случае (задача В). Единственность решения задачи ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) равносильна существованию только тривиального решения при $\mathbf{u}=\mathbf{P}=0$ на сколь угодно малой части границы тела. Этот факт установлен Альманзи. Так как исследования задачи Коши для обсуждаемых эллиптических систем отсутствует, то для выяснения корректности задач ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) и В воспользуемся представлением уравнений теории упругости через соотношения для которых такая задача изучена. Так при отсутствии массовых сил согласно [6] имеем

$$\Delta e=0,\ \Delta(u_i^{\circ}+k^*x_ie/2)=0 \tag{3.1}$$

$$\Delta e=0,\ \Delta\sigma_{ij}+E[(1+\nu)(1-z\nu)]^{-1}e_{,ij}=0 \tag{3.2}$$

$$\Delta V^*=0,\ \Delta U=V^* \tag{3.3}$$

где $k^*=(1-2\nu)^{-1}$, $e=\overset{\circ}{u}_{i,i}$, u_i° — компоненты $\mathbf{u}$ в декартовой системе координат.

Согласно лемме 1 на $S_{u\sigma}$ из (1.1) могут быть определены e $\partial e/\partial n$; $u_i^{\circ}+$ $+k^*x_ie/2$, $\partial(u_i^{\circ}+k^*x_ie/2)/\partial n$; σ_{ij} $\partial\sigma_{ij}/\partial n$. Поэтому для (3.1)—(3.3) можно сформулировать задачу Коши. Таким образом, посредством представления (3.1)—(3.3) задачи ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) и В сводятся к последовательному решению задач Коши для уравнения Лапласа.

Как известно решение задачи аналитического продолжения и решение задачи Коши для уравнения Лапласа неустойчивы [7—8], поэтому и решения задач ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) и В неустойчивы. Однако если сузить класс возможных решений до компакта, например, предположить известной заранее верхнюю границу модуля решения, то можно строить устойчивые решения задачи Коши [7—9], а следовательно и задач ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) и В. Рассматриваемые задачи поэтому могут быть отнесены к условно корректным задачам теории упругости.

Остановимся на методах решения задачи ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$). При использовании представлений (3.1)—(3.3) методы решения задачи ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) и задачи Коши для уравнения Лапласа совпадают. В силу того, что практическое приложение подобные задачи нашли в геофизике, существующие решения задачи Коши для уравнения Лапласа получены для областей представляющих интерес в гравиразведке. Методы решения задач гармонического продолжения достаточно полно представлены в [10—14].

Рассмотрим возможность использования других известных представлений теории упругости к решению рассматриваемой задачи. Один из подходов к решению задачи Коши для уравнения Лапласа основан на построении функции Карлемана [13—14]. Для задачи ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) функцию Карлемана можно заменить нахождением дополнительного решения, обладающего свойством функции Карлемана. В этом случае задача сводится к нахождению решения, зависящего от некоторого скалярного параметра ε, уравнения

$$\mu\Delta U_i^{(k)}+(\lambda+\mu)U_{j,ji}^{(k)}+\delta(X-\xi)\delta_{ik}=0 \qquad (X,\xi\in V)$$

с граничными условиями $\lim_{\varepsilon\to 0}[(U_i^{(k)})^2+(\partial U_i^{(k)}/\partial n)^2]=0$ при $\xi\in V$, $X\in\in S\setminus S_{u\sigma}$. Из представления общего решения теории упругости с помощью тензора перемещений Грина (формулы Сомильяны [6]) получим, что при $\varepsilon\to 0$ решение будет зависеть только от данных на $S_{u\sigma}$. В плоской задаче для определения аналитических функций φ, Ψ могут быть использованы функции Карлемана, приведенные в [13]. К недостаткам данного подхода можно отнести сложность нахождения такой функции в пространственном случае и ее предельный характер [14].

Большой класс задач может быть решен с использованием общих представлений в рядах Фурье, Лежандра [6]. Здесь в отличие от прямых задач, коэффициенты разложений определяются из системы линейных уравнений только из условий на одной из границ (окружность, сфера). Другая граница при этом может быть произвольной.

Для упругого слоя или полупространства (неоднородное поле на бесконечности) могут быть использованы решения, найденные посредством интегрального преобразования Фурье. В качестве иллюстрации приведем такое решение.

Пусть на одной из плоскостей упругого слоя $x_3=0$ заданы $\mathbf{u}=(g_1, g_2, g_3)$, $\mathbf{P}=(d_1, d_2, d_3)$. Двумерное преобразование Фурье функций $\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$ по x_1 и x_2 на $S_{u\sigma}$ дает $u^*=(g_1^*, g_2^*, g_3^*)$, $P^*=(d_1^*, d_2^*, d_3^*)$. Общее решение для трансформант ε_{ij}^*, σ_{ij}^* содержит шесть произвольных постоянных A_i, A_i° $(i=1, 2, 3)$. Используя граничные условия для их определения получим следующие уравнения

$$\begin{gathered}
g_1^*=A_1,\ g_2^*=A_2,\ g_3^*=A_3^\circ\\
d_1^*/\mu=A_1^\circ(\alpha+b\alpha_1^2)+A_2^\circ\alpha_1\alpha_2 b+A_3^\circ i\alpha(\alpha_1 b-1)\\
d_2^*/\mu=A_1^\circ\alpha_1\alpha_2 b+A_2^\circ(\alpha+b\alpha_2^2)+A_3^\circ i(\alpha_2 b-1)\alpha\\
d_3^*/\mu=A_1[i(1-k^*)-i\alpha(1+k^*)b\alpha_1]+A_2[i(1-k^*)b-\\
-i\alpha(1+k^*)b\alpha_2]+A_3[(1+k^*)\alpha-\alpha^2(1+k^*)b]\\
\alpha=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{1/2},\ b=k^*[\alpha(k^*+2)]^{-1}
\end{gathered}\tag{3.4}$$

Определитель (3.4), есть $\Delta_1=2(1+k^*)\alpha^3(k^*+2)^{-2}>0$. Подставив A_i, A_i° из (3.4) в общее решение [6], получим распределение напряжений в упругом слое при условиях (1.1). Соответствующие выражения не приводятся ввиду их громоздкости.

Если по конкретным данным на $x_3=0$ оценить область ограниченности построенного решения, то следовательно можно указать и его область устойчивости [7].

Кроме отмеченных случаев нахождение решения задачи ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) требует развития новых аналитических и численных подходов. В следующем пункте приведено одно из таких решений, имеющее приложения в геомеханике.

4. Рассмотрим задачу ($\mathbf{u}$, $\mathbf{P}$) для произвольного двусвязанного тела. Условия (1.1) заданы на внутренней (внешней) поверхности тела. Решение задачи будем строить на основе представления (3.1). Условия (1.1) на $S_{u\sigma}$ в данном случае сводятся к условиям для e, $\partial e/\partial n$; $u_i^\circ+k^*x_ie/2$, $\partial(u_i^\circ+ +k^*x_ie/2)/\partial n$ и имеют следующий вид

$$\begin{gathered}
e=\frac{P_3^\vee(1-2\nu)}{2\mu(1-\nu)}+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left\{\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{u_i^\vee}{H_i}\right)+\frac{1}{2H_i^2}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial H_i}{\partial a_j}\frac{u_j^\vee}{H_j}\right]\right\}\\
\frac{\partial e}{\partial n}=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial H_2\omega_2}{\partial a_1}-\frac{\partial H_1\omega_1}{\partial a_2}\right)\\
u_i^\circ+k^*x_ie/2=\sum_{j=1}^{3}\frac{u_j^\vee}{H_j}\frac{\partial x_i}{\partial a_j}+\frac{k^*x_ie}{2}\\
\frac{\partial}{\partial n}\left(u_i^\circ+\frac{k^*x_ie}{2}\right)=\frac{1}{H_3}\left\{\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2x_i}{\partial a_3\,\partial a_j}\frac{u_j}{H_j}+\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{u_j}{H_j}\right)+\right.
\end{gathered}\tag{4.1}$$

$$+\frac{k^*x_i}{2}\frac{\partial e}{\partial n}H_3+\frac{k^*e}{2}\frac{\partial x_i}{\partial a_3}\Big\}$$

$$\omega_k=\frac{1}{2H_lH_m}\left(\frac{\partial H_m u_m}{\partial a_l}-\frac{\partial H_l u_l}{\partial a_m}\right)\qquad (i,k,l,m=1,2,3;\ k\neq l\neq m)$$

Для гармонической функции e в сферической системе координат имеем [16] $(e\in C^2(\overline{V}))$

$$e(\lambda,\Theta,R)=\sum_{l=1}^{\infty}(C_lR^l+C_l{}^*R^{-(l+1)})\sum_{m=0}^{l}(a_{lm}\cos m\lambda+$$

$$+b_{lm}\sin m\lambda)P_l{}^m(\cos\Theta)+a_0/R+a_{01}\qquad(4.2)$$

Пусть G — множество однородных гармонических полиномов вида:

$$G_0=P_0(\cos\Theta),\ G_{01}=R^{-1}P_0(\cos\Theta),\ G_{la}{}^m=R^l\cos m\lambda P_l{}^m(\cos\Theta)$$

$$G_{la}{}^m=R^{-(l+1)}\cos m\lambda P_l{}^m(\cos\Theta),\ G_{lb}{}^m=R^l\sin m\lambda P_l{}^m(\cos\Theta)$$

$$G_{lb1}^{m}=R^{-(l+1)}\sin m\lambda P_l{}^m(\cos\Theta)$$

где $P_l{}^m(\cos\Theta)$ — присоединенные функции Лежандра [15]. Пусть B_0 — сфера радиуса $R=R_0$, разделяющая тело на две части и содержащая внутреннюю границу $S_{u\sigma}$. Запишем формулу Грина для функций e, $G_{la}{}^m$:

$$\int_{V_0}(e\Delta G_{la}{}^m-G_{la}{}^m\Delta e)\,dV=\int_{B_0+S_{u\sigma}}\left(e\frac{\partial G_{la}{}^m}{\partial n}-G_{la}{}^m\frac{\partial e}{\partial n}\right)dS\qquad(4.3)$$

Здесь V_0 — объем, заключенный между B_0 и $S_{u\sigma}$. Из (4.3) получим

$$\int_{S_{u\sigma}}\left(G_{la}{}^m\frac{\partial e}{\partial n}-e\frac{\partial G_{la}{}^m}{\partial n}\right)dS=\int_{B_0}\left(e\frac{\partial G_{la}{}^m}{\partial n}-G_{la}{}^m\frac{\partial e}{\partial n}\right)dS\qquad(4.4)$$

Здесь интеграл в левой части (обозначим его $F_{la}{}^m$) определен в силу задания краевых условий (4.1) на $S_{u\sigma}$. Подставив в интеграл справа выражение (4.2) для e и соответствующее для $\partial e/\partial n$ и учитывая сходимость ряда (4.2) и свойство ортогональности сферических функций найдем

$$a_{lm}c_l{}^*(2l+1)N_{lm}=F_{la}{}^m$$

$$N_{lm}=2\pi(l+m)!\,[(2l+1)(l-m)!]^{-1}$$

Таким образом, имеем

$$a_{lm}C_l{}^*=\frac{1}{N_{lm}(2l+1)}\int_{S_{u\sigma}}\left(-e\frac{\partial G_{la}{}^m}{\partial n}+G_{la}{}^m\frac{\partial e}{\partial n}\right)dS$$

Повторяя выше описанную процедуру для G_0, G_{01}, $G_{la1}{}^m$, $G_{lb}{}^m$, $G_{lb1}{}^m$ получим

$$a_0=F_0/(4\pi),\qquad a_{01}=-F_{01}/(4\pi),\qquad a_{lm}c_l=F_{la1}^{m}[N_{lm}(2l+1)]^{-1}$$

$$b_{lm}c_l=-F_{lb1}[N_{lm}(2l+1)]^{-1},\quad b_{lm}c_l{}^*=F_{lb}{}^m[N_{lm}(2l+1)]^{-1}$$

Окончательно находим

$$e(\lambda,\Theta,R)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{N_{lm}(2l+1)}[(R^{-(l+1)}F_{la}{}^m-R^lF_{la1}^{m})\cos m\lambda+$$

$$+(R^{-(l+1)}F_{lb}{}^m-R^lF_{lb1}^{m})\sin m\lambda]P_l{}^m(\cos\Theta)+(F_0/R-F_{01})/(4\pi)\qquad(4.5)$$

Решение для величин $u_i^\circ+k^*x_ie/2$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ строится аналогичным образом. Так, если обозначить

$$\Phi_{lai}^{m}=\int_{S_{u\sigma}}\left[\left(u_i^\circ+\frac{k^*x_i}{2}e\right)\frac{\partial G_{la}{}^m}{\partial n}-G_{la}{}^m\frac{\partial}{\partial n}\left(u_i^\circ+\frac{k^*x_i}{2}e\right)\right]dS$$

то для указанных величин получим соотношение идентичное (4.5), из которого с учетом (4.5) определяются перемещения u_i°:

$$u_i^\circ(\lambda,\Theta,R)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{N_{lm}(2l+1)}\left\{\left[R^{-(l+1)}\left(\Phi_{lai}^{m}-\frac{k^*x_i}{2}F_{la}{}^{m}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-R^{l}\left(\Phi_{lai1}^{m}-\frac{k^*x_i}{2}F_{la1}^{m}\right)\right]\cos m\lambda+\left[R^{-(l+1)}\left(\Phi_{lbi}^{m}-\frac{k^*x_i}{2}F_{lb}{}^{m}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-R^{l}\left(\Phi_{lbi1}^{m}-\frac{k^*x_i}{2}F_{lb1}^{m}\right)\right]\sin m\lambda\right\}P_l{}^m(\cos\Theta)+\frac{1}{4\pi R}\left(\Phi_{0i}-\frac{k^*x_i}{2}F_0-\right.$$

$$\left.-\Phi_{0i1}R+R\frac{k^*x_i}{2}F_{01}\right)\qquad(i=1,2,3)$$

Соотношение (4.6) дает решение задачи через пространственные сферические гармоники.

Для случая обобщенного плоского состояния решение для двусвязного тела может быть найдено таким же образом. Здесь роль функций G играют: $G_0=1$, $G_{01}=\ln R$, $G_l{}^+=R^l\cos l\lambda$, $G_{l1}{}^+=R^{-l}\sin l\lambda$, $G_l{}^-=R^l\cos l\lambda$, $G_{l1}{}^-=R^{-l}\sin l\lambda$ (λ — полярный угол). При получении (4.6) предполагалась сходимость рядов для функций e, u_i° в V. Как видно из решения (4.6) сходимость может быть оценена через граничные условия посредством нахождения функций Φ_{lai1}^{m}, F_{la1}^{m}, Φ_{lbi1}^{m}, F_{lb1}^{m}. Так, например, условия сходимости в сфере $R<R_*$ можно представить в виде

$$\lim_{l\to\infty}\Sigma'/\Sigma''<R_*$$

$$\sum{}'=\sum_{m=0}^{l}\left(|\Phi_{lai1}^{m}|-\frac{k^*R}{2}|F_{la1}^{m}|\right)|P_l(\cos\Theta)|$$

$$\sum{}''=\sum_{m=0}^{l+1}\left(|\Phi_{lai1}^{m}|+\frac{k^*R}{2}|F_{la1}^{m}|\right)|P_{l+1}^{m}(\cos\Theta)|$$

Оценивая R_* для конкретных условий, можно установить область ограниченности решения, а следовательно и область корректности [8] рассмотренной задачи. Для регулярности u_i° в $\overline{V}$ сфера R_* должна содержать все тело.

Использование решения (4.6), как и любых других решений в рядах, для сред содержащих включения, трещины, центры давления или для случая когда к границе $S\backslash S_{u\sigma}$ приложены сосредоточенные силы, приводит к расхождению рядов в окрестности этих точек.

Отметим две особенности рассмотренных выше условно корректных задач: 1) приближенный характер граничных условий; 2) решение может содержать возрастающие члены, зависящие от граничных условий. Поэтому при решении конкретных задач следует избегать процедур дифференцирования граничных условий, т. е. не использовать дифференциальные уравнения порядка выше порядка системы Ламе относительно u_i. Кроме того, для устойчивости численных решений, необходимо по возможности на основе точного решения задачи строить регуляризованное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В. В.* Теория упругости. М.: Изд-во судостроит. пром., 1958. 370 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1954. 647 с.
3. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 334 с.
4. *Прайсс А. К.* Определение напряжений в объеме детали по данным измерений на поверхности. М.: Наука, 1979. 127 с.
5. *Пригорских Н. И., Панских В. К.* Метод хрупких тензочувствительных покрытий. М.: Наука, 1978. 183 с.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Ландис Е. М.* О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. № 5.

8. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, СО АН СССР, 1962. С. 92.
9. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
10. Гравиразведка. Справочник геофизика. М.: Недра, 1981. 397 с.
11. *Страхов В. Н., Иванов С. Н.* Метод аналитического продолжения потенциальных полей. В кн. Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1983.
12. *Вабищевич П. Н., Пулатов П. А.* Устойчивые разностные методы продолжения аномальных полей в гравиразведке. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 9.
13. *Воскобойников Г. М.* Функция Карлемана и ее применение к решению задач геофизики. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1962. № 11. С. 1579–1587.
14. *Ярмухамедов Ш.* О задаче Коши для уравнения Лапласа в постановке М. М. Лаврентьева. В кн.: Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1984. 263 с.
15. *Кампе Ж. и др.* Функции математической физики. М.: Наука, 1963. 102 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию 18.IV.1986
