

УДК 539.3

© 1989

В. И. КУЗЬМЕНКО

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Группа обратных задач механики деформируемого тела, в отличие от прямых задач, не имеет четкой проблематики и может включать совершенно различные задачи. Укажем, в частности, задачи определения формы полостей в упругом теле [1, 2], обратные задачи нагружения упругих и неупругих пластинок [3, 4], задачи управления температурой [5], обратные контактные задачи [6, 7].

В публикуемой работе рассматривается класс задач определения поверхностной нагрузки, при которой напряженное состояние в упругом теле удовлетворяет заданным требованиям, сформулированным в виде нелинейных равенств и неравенств. Поставленные задачи в большинстве случаев не имеют решения, в связи с чем предлагается ослабленная формулировка в виде задач минимизации отклонения от выполнения заданных требований. Возникающие вариационные задачи являются некорректными по Адамару. Выполняется регуляризация обратных задач по А. Н. Тихонову. Предлагается методика численного решения и приводятся результаты исследования двух обратных задач для полуплоскости.

1. Постановка обратных задач. Рассматриваются обратные задачи для линейно- или нелинейно-упругого тела при малых деформациях. Тело занимает область Ω , ограниченную кусочно-гладкой поверхностью Γ . В качестве системы отсчета используется декартова система координат $Ox_1x_2x_3$. Точку тела с координатами (x_1, x_2, x_3) будем обозначать через x . Под $T(x)$ понимаем тензор напряжений с компонентами σ_{ij} в точке $x \in \Omega$. В соответствии с гипотезой упругого тела предполагается, что в каждой точке $x \in \Omega$ тензор $T(x)$ однозначно определяется компонентами тензора деформаций ε в этой точке

$$\sigma_{ij} = B_{ij}(\varepsilon) \quad (1.1)$$

На части $\Gamma_u \neq \emptyset$ поверхности Γ заданы перемещения $U(x)$, а часть поверхности Γ_0 свободна от нагрузок. На оставшейся части Γ_q могут быть заданы распределенные нагрузки интенсивностью $q(x)$. Объемными нагрузками пренебрегаем.

Прямая задача теории упругости заключается в определении параметров напряженно-деформированного состояния в области Ω при заданных на Γ_u и Γ_q вектор-функциях $U(x)$ и $q(x)$ соответственно. При достаточно общих требованиях на вид функций B_{ij} , U_i , q_i прямая задача имеет единственное решение. Для фиксированных функций U_i решение прямой задачи однозначно определяется выбором функций $q_i(x)$ на поверхности Γ_q . Обозначим через $A(x)$, $x \in \Omega$, отображение, ставящее в соответствие каждой вектор-функции q тензор напряжений в точке $x \in \Omega$:

$$T(x) = A(x)q \quad (1.2)$$

Обратная задача теории упругости заключается в определении поверхностной нагрузки $q(x)$, $x \in \Gamma_q$, при которой возникающее в теле напряженное состояние обладает заданными свойствами. Перемещения $U(x)$ на Γ_u считаются фиксированными. Предполагается, что требования к напряженному состоянию в теле Ω могут быть сформулированы следующим образом. Обозначим через Ω_k некоторые подобласти Ω с ненулевой мерой. В подобластях Ω_k ($k=1, 2, \dots, K$) заданы функции $F_k(x, T)$, а в подобластях Ω_l ($l=K+1, \dots, L$) — функции $G_l(x, T)$. На вид функций F_k и G_l

не накладывается каких-либо специальных ограничений. Тогда обратная задача теории упругости формулируется следующим образом: определить вектор усилий $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ в точках поверхности Γ_q так, чтобы были выполнены условия

$$\begin{aligned} F_k(\mathbf{x}, A(\mathbf{x})\mathbf{q}) &= 0 \quad (k=1, 2, \dots, K) \\ G_l(\mathbf{x}, A(\mathbf{x})\mathbf{q}) &\leq 0 \quad (l=K+1, \dots, L) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Приведем примеры обратных задач теории упругости, возникающих в конструкторской и технологической практике.

Прежде всего укажем обратную задачу определения нагрузки, при которой компоненты тензора напряжений принимают заданные значения в некоторой подобласти. Другой класс обратных задач связан с распределением нагрузки, обеспечивающей неразрушение конструкции в соответствии с некоторым феноменологическим критерием. В технологических приложениях представляет интерес задача определения нагрузки, при которой пластическая деформация начинается в определенной подобласти тела. Еще один класс обратных задач возникает при изучении условий трения на поверхности тела по данным измерений внутри тела.

Очевидно, что сформулированные обратные задачи в общем случае не имеют решения. Действительно, компоненты тензора напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия и условиям совместности. Однако условиям вида (1.3) удовлетворяют компоненты тензора напряжений, для которых, как правило, не выполняются уравнения равновесия и (или) условия совместности. Таким образом, сформулированные обратные задачи лишены смысла и, по существующей традиции, не должны рассматриваться. С другой стороны, требования, налагаемые на напряжения, имеют четкий физический смысл и практически целесообразны. Поэтому разумно заменить условия (1.3) требованием наименьшего отклонения от выполнения этих условий. Очевидно, возможны различные критерии погрешности выполнения условий (1.3). В дальнейшем в качестве указанного критерия используется среднеквадратичное отклонение от выполнения условий (1.3) в следующем виде:

$$\int_{\Omega_k} F_k^2(\mathbf{x}, A(\mathbf{x})\mathbf{q}) d\Omega \quad (k=1, 2, \dots, K) \quad (1.4)$$

$$\int_{\Omega_l} \{\max[0, G_l(\mathbf{x}, A(\mathbf{x})\mathbf{q})]\}^2 d\Omega \quad (l=K+1, \dots, L)$$

Отклонение от выполнения совокупности условий (1.4) будем характеризовать взвешенной суммой

$$J(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^K a_k \int_{\Omega_k} F_k^2(\mathbf{x}, A(\mathbf{x})\mathbf{q}) d\Omega + \sum_{l=K+1}^L b_l \int_{\Omega_l} \{\max[0, G_l(\mathbf{x}, A(\mathbf{x})\mathbf{q})]\}^2 d\Omega \quad (1.5)$$

где a_k, b_l — весовые множители, удовлетворяющие условиям $a_k \geq a_0 > 0, b_l \geq b_0 > 0$. Очевидно, что если для некоторого \mathbf{q}^* выполнены все условия (1.3), то функционал $J(\mathbf{q})$ обращается в нуль, в противном случае значения $J(\mathbf{q}^*)$ строго положительны.

Получаем следующую ослабленную формулировку обратных задач: найти распределение поверхностных нагрузок $\mathbf{q}^*(x), x \in \Gamma_q$, для которого функционал $J(\mathbf{q})$ принимает наименьшее значение:

$$J(\mathbf{q}^*) = \inf_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}) \quad (1.6)$$

Приведенная формулировка обратных задач предполагает, что на значения \mathbf{q} не накладывается никаких специальных ограничений. Однако во многих задачах значения q_i должны быть подчинены определенным требованиям, например, требованиям неотрицательности, равенства главного вектора заданному значению и т. д. Будем считать, что такие требова-

ния выделяют некоторое множество допустимых значений \mathbf{q} , которое обозначим через W . Тогда вместо задачи (1.6) следует рассматривать задачу

$$J(\mathbf{q}^*) = \inf_{\mathbf{q} \in W} J(\mathbf{q}) \quad (1.7)$$

Сформулированные вариационные задачи (1.6) и (1.7) при наложении определенных требований гладкости используемых функций имеют, как правило, единственное решение. Доказательство этого утверждения, ввиду произвольного вида функций F_h, G_i , не может быть выполнено в общем случае и должно производиться в условиях конкретных задач. Такие доказательства требуют введения соответствующих функциональных пространств и здесь не рассматриваются.

2. Регуляризация некорректных вариационных задач. Задачи (1.6) и (1.7) в большинстве случаев будут некорректными в смысле Адамара, даже если выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решения, поскольку нарушается третье условие, необходимое для корректности — условие устойчивости [8]. Возможная неустойчивость задач (1.6) и (1.7) связана с тем, что малым изменениям напряженного состояния внутри области соответствует конечное изменение поверхностной нагрузки. Объясним такую ситуацию на примере плоской задачи линейной теории упругости. Пусть область Γ_q совпадает с участком $[c, d]$ оси Ox_1 . Тогда соотношения (1.2) могут быть записаны в виде [9]:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_c^d A_{ijm}(\mathbf{x}, \xi) q_m(\xi) d\xi \quad (2.1)$$

Сообщим теперь $q_m(\xi)$ конечные приращения $\Delta q_m(\xi) = \cos \lambda \xi$. Однако соответствующие этим приращениям согласно (2.1) приращения напряжений $\Delta \sigma_{ij}$ стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$.

Отметим, что указанная неустойчивость вообще типична для обратных задач математической физики [8].

Для исследования некорректных обратных задач используем подход, основанный на методе регуляризации А. Н. Тихонова [8], в соответствии с которым вместо экстремальной задачи (1.7) рассматривается задача

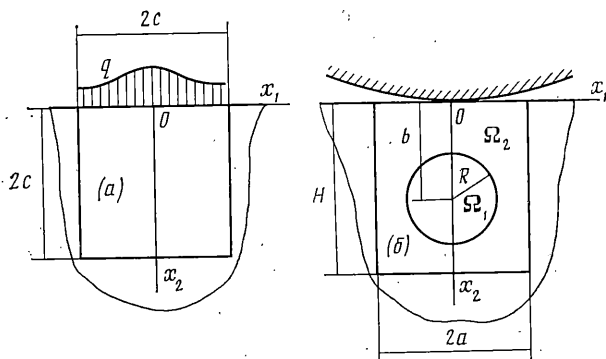
$$\inf_{\mathbf{q} \in W} [J(\mathbf{q}) + \alpha \omega(\mathbf{q})] \quad (2.2)$$

Функционал $\omega(\mathbf{q})$ называется стабилизатором и должен быть построен таким образом, чтобы обеспечить корректность задачи (2.2). В качестве стабилизатора используем следующий функционал [8]:

$$\omega(\mathbf{q}) = \int_{\Gamma_q} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + \text{grad } q_i \cdot \text{grad } q_i) d\Gamma \quad (2.3)$$

Числовой параметр $\alpha > 0$ называется параметром регуляризации и выбирается для конкретных задач на основе вычислительного эксперимента.

3. Численное решение регуляризованной задачи (2.2). Аналитическое решение обратных задач, ввиду нелинейности функций F_h и G_i , может быть получено только в специальных случаях. Предлагаемый алгоритм численного решения основан на дискретизации вариационной задачи (2.2) и последующем решении возникающей задачи нелинейного программирования. С целью дискретизации задачи (2.2) поверхность Γ_q разбита на n ячеек. Обозначим через \mathbf{q}_n вектор-функцию, полученную в результате дискретизации допустимых распределений усилий при помощи указанного разбиения. В пределах каждой ячейки значения \mathbf{q}_n полагаются постоянными и равными значениям \mathbf{q} в некоторой внутренней точке данной ячейки. Таким образом, приближенное решение определяется на классе кусочно-постоянных вектор-функций \mathbf{q}_n , каждая из которых полностью задается указанием $3n$ параметров. Значения частных производных $\partial q_i / \partial x_j$, входящих в стабилизатор (2.1), приближенно заменяются конечноразностными аналогами. Вычисление интеграла по Γ_q фактически сводится к простейшей квадратурной формуле типа формулы прямоугольников. Значения \mathbf{q}_n



Фиг. 1

в каждой ячейке должны быть подчинены условиям принадлежности к множеству W .

Аналогично производится вычисление интегралов по областям Ω_k . Область Ω разбивается на ячейки определенной формы. Внутри каждой ячейки фиксируется некоторая точка (узел). Считаем, что данная ячейка принадлежит подобласти Ω_k , если выбранный внутри этой ячейки узел принадлежит Ω_k . В каждом узле определяются компоненты тензора напряжений, соответствующего согласно (1.2) нагрузкам q_n на Γ_q . Значение интеграла по ячейке принимается равным произведению значения подынтегральной функции в узле на объем ячейки.

Таким образом, в результате дискретизации возникает задача минимизации функции многих переменных с ограничениями. Поскольку вид минимизируемой функции и ограничений существенно зависит от конкретной обратной задачи и практически не поддается предварительному анализу, решение задачи нелинейного программирования целесообразно производить при помощи метода локальных вариаций [10], не использующего какие-либо специальные свойства целевых функций. Метод локальных вариаций разработан для решения задач безусловной минимизации и может быть обобщен для решения нелинейного программирования в случае ограничений в виде линейных неравенств простейшего вида [10]. Поэтому условия в виде равенств, а также нелинейных неравенств необходимо предварительно исключить, например, при помощи метода штрафных функций [11].

Ключевое значение для эффективной реализации алгоритма имеет этап вычисления компонент тензора напряжений внутри области по заданным на Γ_q усилиям. Существенное упрощение алгоритма и значительное сокращение времени счета достигается в случаях, когда для соответствующих прямой задачи построен тензор функций Грина. Если аналитическое выражение для функций Грина получить не удастся, то целесообразно предварительно построить матрицу влияния А. А. Ильюшина [12] путем решения серии прямых задач.

4. Обратные задачи теории упругости для полуплоскости. Рассмотрим два примера решения обратных задач линейной теории упругости для полуплоскости (фиг. 1). Реализация решения таких задач сравнительно проста, поскольку существует явное аналитическое выражение компонент напряженного состояния полуплоскости при заданных на границе усилиях [9]. Если $q(x_1)$ — распределение нормальных усилий на отрезке $[c, d]$ границы полуплоскости, то компоненты тензора напряжений в точке (x_1, x_2) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_c^d \frac{x_2^3}{[x_2^2 + (x_1 - \xi)^2]^2} q(\xi) d\xi \\ \sigma_{22}(x_1, x_2) &= -\frac{2}{\pi} \int_c^d \frac{x_2(x_1 - \xi)^2}{[x_2^2 + (x_1 - \xi)^2]^2} q(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) = -\frac{2}{\pi} \int_c^a \frac{x_2^2(x_1 - \xi)}{[x_2^2 + (x_1 - \xi)^2]^2} q(\xi) d\xi$$

1°. Рассмотрим задачу определения на отрезке $[-c, c]$ нормальной нагрузки $q(x_1)$ с заданным главным вектором $2Q_0$ таким образом, чтобы в области $\{-c \leq x_1 \leq c, 0 \leq x_2 \leq 2c\}$ возникало состояние всестороннего сжатия (фиг. 1, а). Практическое значение этой задачи связано с тем, что состояние всестороннего сжатия наиболее выгодно с точки зрения прочности конструкций.

В соответствии с условиями задачи потребуем, чтобы главный вектор нагрузки имел заданное значение

$$\int_{-c}^c q(\xi) d\xi = 2Q_0 \quad (4.2)$$

Кроме того, потребуем, чтобы нагрузки $q(x_1)$ могли быть реализованы приложением штампа со специальной формой поверхности, т. е. усилия $q(x_1)$ должны быть сжимающими

$$q(x_1) \geq 0, \quad \forall x_1 \in [-c, c] \quad (4.3)$$

Сразу же укажем, что поставленная задача при $\nu \neq 0,5$ не имеет решения. Действительно, при всестороннем сжатии, по определению,

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}, \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Однако в случае плоской деформации имеем $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. Следовательно, состояние всестороннего сжатия не может достигаться при $\nu \neq 0,5$ ни в одной точке полуплоскости. Поэтому практический смысл приобретает задача определения нагрузки, при которой напряженное состояние наиболее близко к всестороннему сжатию. В качестве критерия близости используем интенсивность напряжений

$$\sigma_u = 2^{-1/2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2]^{1/2}$$

так как $\sigma_u = 0$ в состоянии всестороннего сжатия.

Тогда в соответствии с изложенным общим подходом получаем следующую вариационную задачу: определить функцию $q(x_1)$ на отрезке $[-c, c]$ таким образом, чтобы функционал

$$\int_{-c}^{2c} \int_{-c}^c \sigma_u^2 dx_1 dx_2 + \alpha \int_{-c}^c \{q^2(\xi) + [q'(\xi)]^2\} d\xi \quad (4.4)$$

достигал минимального значения при выполнении условий (4.2), (4.3).

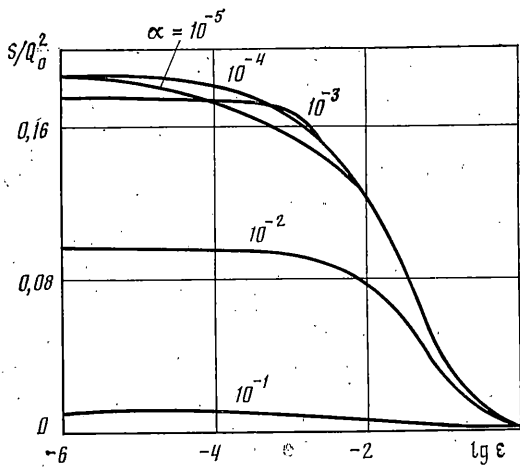
Для дискретизации задачи отрезок $[-c, c]$ разбивался на $2N$ промежутков (ячеек) равной длины; узловые значения выбраны на середине каждого промежутка. Область $\{-c \leq x_1 \leq c, 0 \leq x_2 \leq 2c\}$ разбивалась сеткой $2M \times 2M$ квадратных ячеек. Значения компонент тензора напряжений относились к центрам ячеек.

Условие (4.2) исключалось при помощи метода штрафных функций с использованием штрафных добавок вида

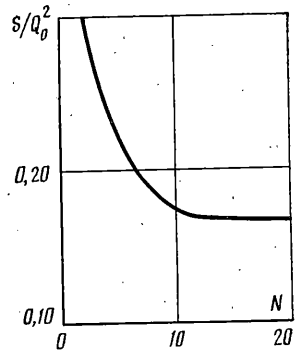
$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{r=1}^{2N} q(x_{1r}) \Delta x_1 - 2Q_0 \right)^2$$

где $\Delta x_1 = c/N$, x_{1r} — координаты узлов на $[-c, c]$: Условия (4.3) в виде неравенств удовлетворяются при реализации метода локальных вариаций.

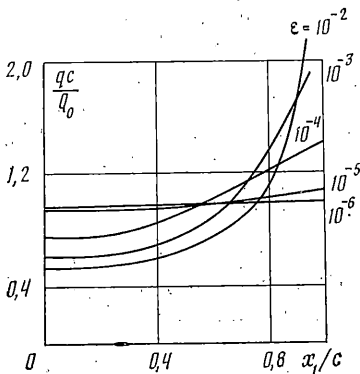
Для оценки влияния стабилизатора на точность решения, с одной стороны, и его устойчивость, с другой, расчеты выполнены для различных значений параметра регуляризации от 0,1 до 10^{-5} . Кроме того, решение производилось для различных



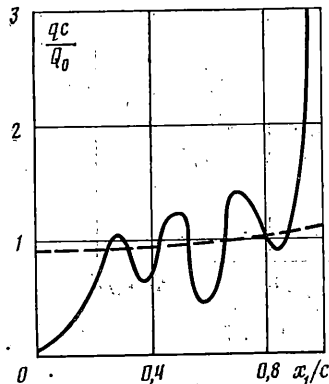
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

значений параметров регуляризации: от 3 до 20 и от 5 до 20. Штрафной параметр ϵ изменялся от 0,1 до 10^{-6} . Итерационный процесс метода локальных вариаций прекращается, если текущий шаг варьирования становится меньше 10^{-5} . Все расчеты выполнены для $\nu=0,3$.

Оценим влияние ϵ и α на изменение среднеквадратичного отклонения от выполнения заданного условия

$$S = \sum_{p=1}^{4M^2} \sigma_u^2(x_{1p}, x_{2p}) \Delta x_1 \Delta x_2$$

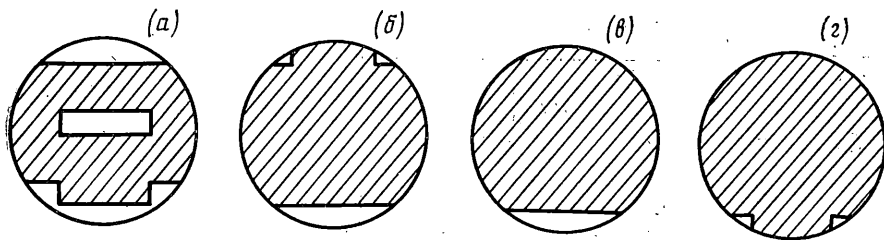
На фиг. 2 показано полученные в результате расчетов безразмерные значения среднеквадратичного отклонения S в зависимости от штрафного параметра ϵ . Соответствующие зависимости построены для различных значений параметра регуляризации α . Полученные при $\epsilon \geq \epsilon_0 = 10^{-5}$ и $\alpha \geq \alpha_0 = 10^{-4}$ значения S различаются не более чем на 0,2%, и указанные значения ϵ_0 и α_0 можно принять в качестве рабочих при дальнейших расчетах. Оценка ϵ и α производилась при $N=10$, $M=5$.

Погрешность дискретизации оценим по значениям S для различных N (фиг. 3). При $N \geq N_0 = 10$ значения S практически не уточняются. Отметим, что влияние параметра дискретизации M оказалось незначительным.

На фиг. 4 приведены полученные усилия $q(x_1)$ при $N=10$, $M=5$, $\alpha=10^{-4}$; кривые построены для нескольких значений штрафного параметра ϵ . Получаем неожиданно простой результат: распределение усилий $q(x_1)$ при $\epsilon \rightarrow 0$ приближается к равномерному.

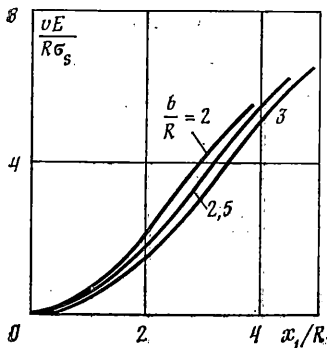
В заключение приведем полученное «распределение усилий $q(x_1)$ » без использования стабилизатора, т. е. при $\alpha=0$ (фиг. 5). Расчеты выполнялись при $N=10$, $M=5$, $\epsilon=10^{-5}$. Отметим характерную неустойчивость осциллирующего типа. Для сравнения штриховой линией показано соответствующее решение регуляризованной задачи.

2°. Второй пример связан с задачей управления пластическим деформированием при помощи выбора формы инструмента. В рамках обратных задач теории упругости определим контактные напряжения под штампом



Фиг. 6

(и соответствующую форму штампа) таким образом, чтобы пластическое деформирование возникало вначале в заданной области. Приведем результаты численного решения задачи определения формы штампа, при которой пластическое деформирование возникает в круге Ω_1 радиуса R



Фиг. 7

(фиг. 1, б). Положение круга определяется расстоянием b от центра круга до границы полуплоскости. Выделим в полуплоскости прямоугольную область, включающую круг Ω_1 , как показано на фиг. 1, б, и обозначим через Ω_2 часть этой области вне круга. Потребуем, чтобы в точках круга компоненты тензора напряжений удовлетворяли условию пластичности Губера — Мизеса:

$$\sigma_u^2 = \sigma_s^2 \quad (4.5)$$

а вне круга, в области Ω_2 , осуществлялось только упругое деформирование, т. е.

$$\sigma_u^2 < \sigma_s^2 \quad (4.6)$$

Среднеквадратичное отклонение от выполнения условий (4.5) и (4.6) запишем в виде

$$J(q) = \int_{\Omega_1} (\sigma_u^2 - \sigma_s^2)^2 d\Omega + \int_{\Omega_2} [\max(0, \sigma_u^2 - \sigma_s^2)]^2 d\Omega$$

На размер участка приложения нагрузки, а также на главный вектор усилий никаких ограничений не накладывается. Однако значения $q(x_1)$ должны быть неотрицательными.

Расчеты выполнены при $\nu=0,3$; $a=1,5R$; $H=b+1,5b$ для трех значений $b=2R$; $2,5R$; $3R$. Поскольку ограничения на размеры участка приложения нагрузки отсутствуют, то величина c выбиралась достаточно большой: $c=4R$. При дискретизации отрезок $[-c, c]$ разбивался на 40 отрезков равной длины. Выделенная прямоугольная область разбивалась в горизонтальном направлении на 12 отрезков. В вертикальном направлении количество отрезков зависит от величины b и для указанных выше значений b равнялось 14, 16, 18 соответственно. Параметр релаксации принимался равным 10^{-4} . Процесс реализации метода локальных вариаций прерывался, если текущий шаг варьирования становился меньше 2×10^{-4} .

Для полученного решения $q^*(x_1)$ условие (4.6) в виде неравенства удовлетворяется во всех ячейках в области Ω_2 . Погрешность в выполнении условия пластичности будем характеризовать величиной $\delta = |\sigma_u - \sigma_s|/\sigma_s$.

На фиг. 6, а, б, г, з для случая $b=2,5R$ штриховкой показаны области внутри круга Ω_1 , в которых погрешность выполнения условия пластичности удовлетворяет условиям $\delta \leq 1\%$; $\delta \leq 1,5\%$; $\delta \leq 2\%$; $\delta \leq 2,5\%$ соответственно. Таким образом, полученное решение удовлетворяет условиям исходной обратной задачи с приемлемой точностью.

Наконец, на фиг. 7 для трех значений b показана полученная форма штампа, при действии которого пластическое деформирование начинается в заданном круге; под E понимается модуль упругости Юнга. Величина $v(x_1)$ равна расстоянию от поверхности полуплоскости до поверхности штампа, измеренному вдоль линии $x_1 = \text{const}$ в момент начального касания штампа и полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 963–979.
2. Вигдергауз С. Б. Обратная задача трехмерной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 90–93.
3. Литвинов В. Г. Некоторые обратные задачи для изгибаемых пластин // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 682–691.
4. Цвелодуб И. Ю. Некоторые обратные задачи изгиба пластин при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 126–134.
5. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев: Наук. думка. 1988. 312 с.
6. Мигкевич В. М. Постановка и решение обратной контактной задачи // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 5. С. 38–40.
7. Кузьменко В. И. К обратным контактными задачам теории пластичности // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 475–482.
8. Тилонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 285 с.
9. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
10. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука. 1973. 238 с.
11. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной оптимизации. М.: Мир. 1972. 240 с.
12. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
14.XI.1988