МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1989

УДК 531.3

Д. В. ЛЕБЕДЕВ, А. П. ПАНОВ

СИНТЕЗ ВЫСОКОТОЧНЫХ АЛГОРИТМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КАЖУЩЕЙСЯ СКОРОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Изложенный в [1] подход к решению задачи вычисления параметров движения твердого тела по дискретной интегральной информации о его эволюциях используется для синтеза алгоритмов шестого порядка точности, предназначенных для вычисления кажущейся скорости центра масс объекта. Приводятся оценки локальных погрешностей алгоритмов, на основе которых для случая регулярной прецессии твердого тела и ее дуального аналога получены общие структуры асимптотических накопленных (интегральных) ошибок алгоритмов.

Результаты численного моделирования алгоритмов свидетельствуют о существенных преимуществах в точности алгоритмов шестого порядка перед соответствующими алгоритмами четвертого порядка точности. Полученные же оценки погрешностей алгоритмов являются эффективным инструментом исследований их характеристик.

1. Введем две правые ортогональные системы координат: жестко связанную с твердым телом систему координатных осей $\mathbf{E}$, начало O которой поместим в центре масс тела, и инерциальную систему $\mathbf{I}$.

Располагая в базисе $\mathbf{E}$ информацией о векторах $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения объекта и кажущегося ускорения $\mathbf{a}$ его центра масс, требуется определить в системах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I}$ координаты вектора кажущейся скорости $\mathbf{W}$ полюса O (разность между его абсолютной скоростью $\mathbf{V}$ и ее составляющей $\mathbf{V}_*$, обусловленной гравитационным ускорением).

В координатном базисе $\mathbf{E}$ кажущаяся скорость $\mathbf{W}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{W}^*=\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{W} \tag{1.1}$$

где звездочка означает относительную (локальную) производную по времени.

В инерциальном пространстве $\mathbf{I}$ эволюция вектора $\mathbf{W}$ описывается соотношением

$$\mathbf{W}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{a} \tag{1.2}$$

Параметризуем вектор $\mathbf{W}$ в базисах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I}$ кватернионами $\boldsymbol{\Lambda}=\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ и $\mathbf{M}=\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ в соответствии с выражениями [1, 2]:

$$\mathbf{W}_E=2\operatorname{vect}(\overline{\boldsymbol{\Lambda}}\circ\mathbf{M}),\quad \mathbf{W}_I=2\operatorname{vect}(\mathbf{M}\circ\overline{\boldsymbol{\Lambda}}) \tag{1.3}$$

в которых $\operatorname{vect}\mathbf{A}$ — векторная часть кватерниона $\mathbf{A}$, $\overline{\boldsymbol{\Lambda}}$ — кватернион, сопряженный $\boldsymbol{\Lambda}$. Индексы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I}$ здесь и далее указывают базис, к которому отнесены соответствующие величины.

Рассматривая кватернионы $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$ как компоненты единичного бикватерниона $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\Lambda}+s\mathbf{M}$ (s — символ Клиффорда, $s^2=0$), отметим, что $\boldsymbol{\theta}$ подчиняется уравнению

$$2\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{\cdot}}=\boldsymbol{\theta}\circ\boldsymbol{\Omega}_*,\quad \boldsymbol{\Omega}_*=\boldsymbol{\omega}_*+s\mathbf{a}_* \tag{1.4}$$

где $\mathbf{a}_*=\{0, \mathbf{a}\}$, $\boldsymbol{\omega}_*=\{0, \boldsymbol{\omega}\}$ — гиперкомплексные отображения векторов $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\omega}$ на оси базиса $\mathbf{E}$. Уравнения (1.4) — дуальный аналог рассмотренной в [3] первой формы кинематического уравнения движения твердого тела относительно неподвижной точки.

Пусть при заданном временном изменении бикватерниона $\mathbf{\Omega}_*$ известно частное решение $\mathbf{P}(t)=\mathbf{Q}(t)+s\mathbf{R}(t)$ уравнения (1.4). Тогда бикватернион

$$\theta(t)=\mathbf{C}_*\circ\mathbf{P}(t) \tag{1.5}$$

в котором $\mathbf{C}_*=\mathbf{C}+s\mathbf{C}^\circ$ — постоянный бикватернион, является общим решением уравнения (1.4). Этот результат получается при подстановке решения (1.5) в исходное уравнение (1.4).

Поскольку уравнение (1.4) эквивалентно двум уравнениям вида

$$2\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{\Lambda}\circ\boldsymbol{\omega}_* \tag{1.6}$$

$$2\mathbf{M}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{M}\circ\boldsymbol{\omega}_*+\mathbf{\Lambda}\circ\mathbf{a}_* \tag{1.7}$$

то общие решения этих уравнений в соответствии с (1.5) имеют следующие структуры:

$$\mathbf{\Lambda}(t)=\mathbf{C}\circ\mathbf{Q}(t) \tag{1.8}$$

$$\mathbf{M}(t)=\mathbf{C}\circ\mathbf{R}(t)+\mathbf{C}^\circ\circ\mathbf{Q}(t) \tag{1.9}$$

Соотношения (1.8) и (1.9) позволяют записать общие решения уравнений (1.1) и (1.2) в иной, отличной от традиционной форме:

$$\mathbf{W}_\mathrm{E}(t)=\mathrm{vect}[\mathbf{U}_\mathrm{E}(t)+\overline{\mathbf{Q}}(t)\circ\mathbf{C}_\mathrm{E}\circ\mathbf{Q}(t)] \tag{1.10}$$

$$\mathbf{W}_\mathrm{I}(t)=\mathrm{vect}[\mathbf{C}_\mathrm{I}+\mathbf{C}\circ\mathbf{U}_\mathrm{I}(t)\circ\overline{\mathbf{C}}] \tag{1.11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathbf{U}_\mathrm{E}(t)=2\overline{\mathbf{Q}}(t)\circ\mathbf{R}(t),\quad \mathbf{C}_\mathrm{E}=2\overline{\mathbf{C}}\circ\mathbf{C}^\circ$$

$$\mathbf{U}_\mathrm{I}(t)=2\mathbf{R}(t)\circ\overline{\mathbf{Q}}(t),\quad \mathbf{C}_\mathrm{I}=2\mathbf{C}^\circ\circ\overline{\mathbf{C}}$$

При заданном кватернионе $\mathbf{C}$ любое решение уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющее требуемым начальным условиям, получается из (1.10), (1.11) соответствующим выбором кватерниона-константы $\mathbf{C}^\circ$.

Единичному бикватерниону θ поставим в соответствие комплексный вектор $\mathbf{\Phi}=\boldsymbol{\varphi}+s\boldsymbol{\varphi}^\circ$, являющийся дуальным аналогом вектора ориентации [4]. Поскольку

$$\theta_0=\lambda_0+s\mu_0=\cos\Phi/2,\quad \Phi=(\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi})^{1/2}$$

$$\theta_i=\lambda_i+s\mu_i=\Phi_i/\Phi\sin\Phi/2\quad (i=1,2,3)$$

то связь между компонентами кватернионов $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{M}$ и векторами $\boldsymbol{\varphi}=\{\varphi_i\}$, $\boldsymbol{\varphi}^\circ=\{\varphi_i^\circ\}$ устанавливается соотношениями

$$\begin{gathered}\lambda_0=\cos\varphi/2,\quad \lambda_i=\varphi_i/\varphi\sin\varphi/2\\ \mu_0=-{}^1/_2\varphi^{-1}\sin\varphi/2(\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi}^\circ)\\ \mu_i=\varphi^{-1}\sin\varphi/2\varphi_i^\circ-\varphi^{-2}(1/2\cos\varphi/2-\varphi^{-1}\sin\varphi/2)(\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi}^\circ)\varphi_i\\ \varphi=(\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi})^{1/2}\quad (i=1,2,3)\end{gathered} \tag{1.12}$$

причем выполняются условия

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1,\quad \lambda_0\mu_0-\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2-\lambda_3\mu_3=0$$

Задача отыскания координат вектора $\mathbf{W}$ кажущейся скорости в базисах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I}$ может быть сведена, как следует из соотношений (1.3), (1.12), к вычислению векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\varphi}^\circ$ комплексного вектора $\mathbf{\Phi}$.

2. Пусть в дискретные моменты времени в базисе $\mathbf{E}$ измерению доступна информация о поступательно-вращательном движении объекта в форме

$$\mathbf{p}_{n+1}=\int\limits_{t_n}^{t_n+h}\boldsymbol{\omega}(\tau)\,d\tau,\qquad \mathbf{b}_{n+1}=\int\limits_{t_n}^{t_n+h}\mathbf{a}(\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

где h — постоянный шаг интегрирования.

Для вычисления приращения $\Delta\varphi_{N+1}$ вектора φ на шаге $H=rh$ (r — шаговость алгоритма в смысле работы [5]) воспользуемся четырехшаговым алгоритмом шестого порядка точности

$$\Delta\varphi_{N+1}=\mathbf{p}_{N+1}+\Delta\varphi_{4,\ N+1}+\Delta\varphi_{6,\ N+1} \tag{2.2}$$
$$\Delta\varphi_{4,\ N+1}={}^2/_3(\mathbf{p}_{N,1}+\mathbf{p}_{N,2})\times(\mathbf{p}_{N,3}+\mathbf{p}_{N,4})$$
$$\Delta\varphi_{6,\ N+1}={}^{32}/_{15}(\mathbf{p}_{N,1}\times\mathbf{p}_{N,3}+\mathbf{p}_{N,2}\times\mathbf{p}_{N,4})-{}^8/_9(\mathbf{p}_{N,1}+\mathbf{p}_{N,2})\times(\mathbf{p}_{N,3}+\mathbf{p}_{N,4})+$$
$$+{}^{32}/_{45}[\mathbf{p}_{N,1}\times(\mathbf{p}_{N,2}\times\mathbf{p}_{N,4})-\mathbf{p}_{N,4}\times(\mathbf{p}_{N,1}\times\mathbf{p}_{N,3})]-{}^{64}/_{45}(1-\mathbf{p}_{N,2}'\mathbf{p}_{N,3})\mathbf{p}_{N,2}\times\mathbf{p}_{N,3}$$

который получается на основе одного из алгоритмов, приведенного в [6]. В (2.2) введены следующие обозначения:

$$\mathbf{p}_{N+1}=\int\limits_{t_n}^{t_n+4h}\omega(\tau)\,d\tau,\qquad \mathbf{p}_{N,j}=\int\limits_{t_n+(j-1)h}^{t_n+jh}\omega(\tau)\,d\tau\quad (j=1,\dots 4) \tag{2.3}$$

Выбранная форма записи алгоритма (2.2) подчеркивает тот факт, что построен он по принципу так называемых «вложенных» алгоритмов [7]. Оставляя в соотношении (2.2) члены соответствующего порядка малости, получаем алгоритмы второго, четвертого и шестого порядков точности.

Локальная погрешность метода (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned}\delta\varphi_{N+1}={}&{}^8/_{945}h^7(92\mathbf{x}_{23}+\mathbf{x}_{05}+6\mathbf{x}_{14}+6\mathbf{x}_{004}+42\mathbf{x}_{013}+24\mathbf{x}_{103}-\\&-66\mathbf{x}_{112}-116\mathbf{x}_{202}-30\mathbf{x}_{301}-34\mathbf{x}_{0003}-28\mathbf{x}_{0012}+\\&+128\mathbf{x}_{0102}-340\mathbf{x}_{0201}+246\mathbf{x}_{1101}+28\mathbf{x}_{2001}-64\mathbf{x}_{00002}-\\&-64\mathbf{x}_{01001}+256\mathbf{x}_{10001}+64\mathbf{x}_{000001}-176\mathbf{x}_{1002})\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\mathbf{x}_{\alpha\beta\dots\gamma\delta}=\omega_m^{(\alpha)}\times(\omega_m^{(\beta)}\times\dots\times(\omega_m^{(\gamma)}\times\omega_m^{(\delta)}))\dots)$; $\omega_m^{(k)}$ — производная по времени k-го порядка от вектора ω, соответствующая моменту времени t_m — середине шага интегрирования $H=4h$.

Образуя из (2.1) комплексный вектор $\mathbf{q}_{n+1}=\mathbf{p}_{n+1}+s\mathbf{b}_{n+1}$ и применяя к алгоритму (2.2) принцип перенесения Котельникова — Штуди [8], получаем следующее выражение для вычисления приращения $\Delta\overset{\circ}{\varphi}_{N+1}$ вектора φ° на шаге H:

$$\Delta\overset{\circ}{\varphi}_{N+1}=\mathbf{b}_{N+1}+\Delta\overset{\circ}{\varphi}_{4,N+1}+\Delta\overset{\circ}{\varphi}_{6,N+1} \tag{2.5}$$
$$\Delta\overset{\circ}{\varphi}_{4,\ N+1}={}^2/_3[(\mathbf{b}_{N,1}+\mathbf{b}_{N,2})\times(\mathbf{p}_{N,3}+\mathbf{p}_{N,4})+(\mathbf{p}_{N,1}+\mathbf{p}_{N,2})\times(\mathbf{b}_{N,3}+\mathbf{b}_{N,4})]$$
$$\begin{aligned}\Delta\overset{\circ}{\varphi}_{6,\ N+1}={}&{}^{32}/_{15}(\mathbf{b}_{N,1}\times\mathbf{p}_{N,3}+\mathbf{p}_{N,1}\times\mathbf{b}_{N,3}+\mathbf{b}_{N,2}\times\mathbf{p}_{N,4}+\mathbf{p}_{N,2}\times\mathbf{b}_{N,4})-\\&-{}^8/_9[(\mathbf{b}_{N,1}+\mathbf{b}_{N,2})\times(\mathbf{p}_{N,3}+\mathbf{p}_{N,4})+(\mathbf{p}_{N,1}+\mathbf{p}_{N,2})\times(\mathbf{b}_{N,3}+\mathbf{b}_{N,4})]+\\&+{}^{32}/_{45}[\mathbf{b}_{N,1}\times(\mathbf{p}_{N,2}\times\mathbf{p}_{N,4})-\mathbf{b}_{N,4}\times(\mathbf{p}_{N,1}\times\mathbf{p}_{N,3})+(\mathbf{p}_{N,4}\times\mathbf{b}_{N,2}+\mathbf{b}_{N,4}\times\mathbf{p}_{N,2})\times\\&\times\mathbf{p}_{N,1}-(\mathbf{p}_{N,3}\times\mathbf{b}_{N,1}+\mathbf{b}_{N,3}\times\mathbf{p}_{N,1})\times\mathbf{p}_{N,4}]-{}^{64}/_{45}[(1-\mathbf{p}_{N,2}'\mathbf{p}_{N,3})\times\\&\times(\mathbf{b}_{N,2}\times\mathbf{p}_{N,3}+\mathbf{p}_{N,2}\times\mathbf{b}_{N,3})-(\mathbf{p}_{N,2}'\mathbf{b}_{N,3}+\mathbf{b}_{N,2}'\mathbf{p}_{N,3})\mathbf{p}_{N,2}\times\mathbf{p}_{N,3}]\end{aligned}$$

где векторы $\mathbf{b}_{N,j}$ ($j=1, 2, 3, 4$) получаются из (2.3) заменой ω на $\overset{\circ}{\mathbf{a}}$.

Оценку погрешности вычисления приращения $\Delta\overset{\circ}{\varphi}_{N+1}$ нетрудно получить, применяя к соотношению (2.4) принцип перенесения. Вычислив по алгоритмам (2.2), (2.5) приращение $\Delta\Phi_{N+1}=\Delta\varphi_{N+1}+s\Delta\overset{\circ}{\varphi}_{N+1}$ комплексного вектора Φ, по формулам (1.12) найдем изменение $\vartheta_{N+1}=\lambda_{N+1}+s\mu_{N+1}$ бикватерниона θ и его текущее значение $\theta_{N+1}=\theta_N\circ\vartheta_{N+1}$. Искомые значения координат вектора $\mathbf{W}$ в базисах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I}$ определяются затем по рекуррентным соотношениям [1]:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{E},N+1}=\mathrm{vect}(\overline{\lambda}_{N+1}\circ\overset{*}{\mathbf{W}}_{\mathrm{E},N}\circ\lambda_{N+1}+\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{E},N+1})$$
$$\mathbf{W}_{\mathrm{I},N+1}=\mathrm{vect}(\overset{*}{\mathbf{W}}_{\mathrm{I},N}+\Lambda_N\circ\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{I},N+1}\circ\overline{\Lambda}_N) \tag{2.6}$$

$$\Delta \mathbf{W}_{E,\,N+1}=2\bar{\lambda}_{N+1}\circ\boldsymbol{\mu}_{N+1},\ \Delta \mathbf{W}_{I,\,N+1}=2\boldsymbol{\mu}_{N+1}\circ\bar{\lambda}_{N+1}$$

$$\mathbf{W}_{E,N}^{*}=\{0,\mathbf{W}_{E,N}\},\quad \mathbf{W}_{I,N}^{*}=\{0,\mathbf{W}_{I,N}\}$$

3. Исследуем структуры погрешностей вычисления кажущейся скорости полюса O в базисах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I}$. Представим бикватернион θ в виде произведения двух бикватернионов

$$\theta=\theta^{*}\circ\delta\theta \tag{3.1}$$

где $\theta^{*}=\Lambda^{*}+s\mathbf{M}^{*}$ — точное значение бикватерниона θ, а $\delta\theta=\delta\Lambda+s\delta\mathbf{M}$ — погрешность его вычисления.

Поскольку соотношение (3.1) эквивалентно двум выражениям вида

$$\Lambda=\Lambda^{*}\circ\delta\Lambda,\ \mathbf{M}=\mathbf{M}^{*}\circ\delta\Lambda+\Lambda^{*}\circ\delta\mathbf{M} \tag{3.2}$$

то, учитывая (1.3) и (3.2), получаем выражения

$$\begin{aligned}&\mathbf{W}_{E}=\operatorname{vect}(\delta\bar{\Lambda}\circ\mathbf{W}_{E}^{\circ}\circ\delta\Lambda+\delta\mathbf{w}_{E})\\&\mathbf{W}_{I}=\operatorname{vect}(\mathbf{W}_{I}^{\circ}+\Lambda^{*}\circ\delta\mathbf{w}_{I}\circ\bar{\Lambda}^{*})\end{aligned} \tag{3.3}$$

связывающие между собой вычисленные в базисах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I}$ значения координат вектора $\mathbf{W}$ кажущейся скорости и погрешность вычислений бикватерниона θ.

В формулах (3.3) $\mathbf{W}_{E}^{\circ}=2\bar{\Lambda}^{*}\circ\mathbf{M}^{*}$ и $\mathbf{W}_{I}^{\circ}=2\mathbf{M}^{*}\circ\bar{\Lambda}^{*}$ — гиперкомплексные отображения точного значения вектора кажущейся скорости на оси трехгранников $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I}$;

$$\delta\mathbf{w}_{E}=2\delta\bar{\Lambda}\circ\delta\mathbf{M},\ \delta\mathbf{w}_{I}=2\delta\mathbf{M}\circ\delta\bar{\Lambda}$$

При малых погрешностях вычислений справедливо представление кватернионов $\delta\Lambda$ и $\delta\mathbf{M}$ в форме

$$\delta\Lambda=\{1,\ {}^{1}/_{2}\delta\varphi\},\ \delta\mathbf{M}=\{0,\ {}^{1}/_{2}\delta\varphi^{\circ}\} \tag{3.4}$$

Выражения (3.4) позволяют записать погрешности вычисления вектора $\mathbf{W}$ кажущейся скорости в виде

$$\begin{aligned}&\Delta\mathbf{W}_{E}=\mathbf{W}_{E}-\mathbf{W}_{E}^{*}\cong\delta\varphi^{\circ}+\mathbf{W}_{E}^{*}\times\delta\varphi\\&\Delta\mathbf{W}_{I}=\mathbf{W}_{I}-\mathbf{W}_{I}^{*}\cong\operatorname{vect}(\Lambda^{*}\circ\delta\varphi_{*}^{\circ}\circ\bar{\Lambda}^{*})\end{aligned} \tag{3.5}$$

В (3.5) через $\delta\varphi_{*}^{\circ}$ обозначен кватернион $\{0,\ \delta\varphi^{\circ}\}$.

Наиболее простой вид погрешность вычисления имеет в инерциальном пространстве $\mathbf{I}$. Если оценивать ее евклидовой нормой вектора $\Delta\mathbf{W}_{I}$, то отыскание ее сводится к определению нормы вектора $\delta\varphi^{\circ}$.

4. При исследовании высокоточных алгоритмов вычисления параметров движения твердого тела самостоятельный интерес представляет отыскание таких движений объекта, которые могут быть описаны аналитически. Так, при исследовании алгоритмов вычисления параметров ориентации часто используется частный случай регулярной прецессии твердого тела — коническое движение [4]. Ниже для исследования алгоритмов используется регулярная прецессия твердого тела и ее дуальный аналог.

Обозначим через ν угловую скорость собственного вращения, через μ — угловую скорость прецессии, через ϑ — угол нутации. Изменение вектора угловой скорости вращения объекта в базисе $\mathbf{E}$ запишем в виде [9]:

$$\omega=\begin{bmatrix}\varepsilon\nu\sin\vartheta\sin\nu t\\ \varepsilon\nu\sin\vartheta\cos\nu t\\ \nu(1+\varepsilon\cos\vartheta)\end{bmatrix},\quad \varepsilon=\mu/\nu \tag{4.1}$$

Отметим, что коническое движение имеет место при $\varepsilon=-1$.

Обозначим через $\theta=\vartheta+s\vartheta^{\circ}$ и $N=\nu+s\nu^{\circ}$ дуальные аналоги угла нутации и скорости собственного вращения твердого тела. Дуальный аналог регулярной прецессии тела порождается комплексным вектором

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + s\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \varepsilon N \sin\theta \sin Nt \\ \varepsilon N \sin\theta \cos Nt \\ N(1+\varepsilon\cos\theta) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

в котором кажущееся ускорение полюса O изменяется по закону

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \varepsilon(\nu\vartheta^\circ \cos\vartheta + \nu^\circ \sin\vartheta)\sin\nu t + \varepsilon\nu\nu^\circ t \sin\vartheta \cos\nu t \\ \varepsilon(\nu\vartheta^\circ \cos\vartheta + \nu^\circ \sin\vartheta)\cos\nu t - \varepsilon\nu\nu^\circ t \sin\vartheta \sin\nu t \\ \nu^\circ(1+\varepsilon\cos\vartheta) - \varepsilon\nu\vartheta^\circ \sin\vartheta \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

При заданной временной функции (4.2) частным решением уравнения (1.4) является бикватернион

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) + s\mathbf{R}(t)$$

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2}\cos(1+\varepsilon)\nu t/2 \\ \sin\frac{\vartheta}{2}\cos(1-\varepsilon)\nu t/2 \\ -\sin\frac{\vartheta}{2}\sin(1-\varepsilon)\nu t/2 \\ \cos\frac{\vartheta}{2}\sin(1+\varepsilon)\nu t/2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1+\varepsilon}{2}\nu^\circ t \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{(1+\varepsilon)\nu t}{2} - \frac{\vartheta^\circ}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{(1+\varepsilon)\nu t}{2} \\ -\frac{1-\varepsilon}{2}\nu^\circ t \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{(1-\varepsilon)\nu t}{2} + \frac{\vartheta^\circ}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{(1-\varepsilon)\nu t}{2} \\ -\frac{1-\varepsilon}{2}\nu^\circ t \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{(1-\varepsilon)\nu t}{2} - \frac{\vartheta^\circ}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{(1-\varepsilon)\nu t}{2} \\ \frac{1+\varepsilon}{2}\nu^\circ t \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{(1+\varepsilon)\nu t}{2} - \frac{\vartheta^\circ}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{(1+\varepsilon)\nu t}{2} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Общие решения уравнений (1.1), (1.2) задаются соотношениями (1.10), (1.11), в которых кватернионы $\mathbf{U}_E(t)$ и $\mathbf{U}_I(t)$, как следует из (4.4), (4.5), определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{U}_E(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon\nu^\circ t \sin\vartheta \sin\nu t + \vartheta^\circ \cos\nu t \\ \varepsilon\nu^\circ t \sin\vartheta \cos\nu t - \vartheta^\circ \sin\nu t \\ \nu^\circ t(1+\varepsilon\cos\vartheta) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$\mathbf{U}_I(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu^\circ t \sin\vartheta \sin\varepsilon\nu t + \vartheta^\circ \cos\varepsilon\nu t \\ -\nu^\circ t \sin\vartheta \cos\varepsilon\nu t + \vartheta^\circ \sin\varepsilon\nu t \\ \nu^\circ t(\varepsilon + \cos\vartheta) \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Точные решения (1.10), (1.11), (4.4), (4.6), (4.7) уравнений (1.1), (1.2) позволяют оценить качество работы алгоритмов любого порядка точности для вычисления параметров движения твердого тела.

Отметим, что в соответствии с (4.1), (4.3) первичная информация (2.1) о движении объекта задается соотношениями

$$\mathbf{p}_{n+1} = \begin{bmatrix} -\varepsilon\sin\vartheta[\cos\nu(t_n+h) - \cos\nu t_n] \\ \varepsilon\sin\vartheta[\sin\nu(t_n+h) - \sin\nu t_n] \\ \nu(1+\varepsilon\cos\vartheta)h \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{n+1} = \begin{bmatrix} \varepsilon\{\nu^\circ\sin\vartheta[(t_n+h)\sin\nu(t_n+h) - t_n\sin\nu t_n] - \vartheta^\circ\cos\vartheta[\cos\nu(t_n+h) - \cos\nu t_n]\} \\ \varepsilon\{\nu^\circ\sin\vartheta[(t_n+h)\cos\nu(t_n+h) - t_n\cos\nu t_n] + \vartheta^\circ\cos\vartheta[\sin\nu(t_n+h) - \sin\nu t_n]\} \\ [\nu^\circ(1+\varepsilon\cos\vartheta) - \varepsilon\nu\vartheta^\circ\sin\vartheta]h \end{bmatrix}$$

5. Аналитические решения уравнений движения твердого тела в случае регулярной прецессии и ее дуального аналога дают возможность построить асимптотические оценки накопленных погрешностей вычисления параметров движения объекта и организовать соответствующие процедуры оптимизации вычислительного процесса.

Погрешность $\alpha(t)$ вычисления параметров ориентации удовлетворяет приближенному уравнению [10]:

$$\alpha^{\cdot}+\omega\times\alpha=\Delta\mathbf{m} \tag{5.1}$$

в котором под $\Delta\mathbf{m}$ будем понимать вектор скорости дрейфа, порожденный методическими локальными погрешностями используемого численного алгоритма.

Оценивая вектор $\Delta\mathbf{m}$ соотношением $\Delta\mathbf{m}=\delta\varphi/H$ ($\delta\varphi$ — локальная погрешность алгоритма на шаге вычислений H), решение уравнения (5.1) при нулевых начальных условиях представим в форме

$$\alpha(t)=\frac{1}{H}\int_0^t \operatorname{vect}(\bar{\Lambda}^{*}\circ\delta\varphi_{*}\circ\Lambda^{*})\,d\tau \tag{5.2}$$

В выражении (5.2) $\delta\varphi_{*}=\{0,\ \delta\varphi\}$, $\Lambda^{*}(t)=\mathbf{C}\circ\mathbf{Q}(t)$, причем $\mathbf{C}=\{\cos(\vartheta/2),\ -\sin(\vartheta/2),\ 0,\ 0\}$, а кватернион $\mathbf{Q}(t)$ определяется соотношением (4.4).

Подставляя в (5.2) соответствующие выражения и выполняя интегрирование, приходим к следующей структуре погрешности вычисления вектора ориентации для движения твердого тела с угловой скоростью (4.1):

$$\alpha(t)=\frac{\delta_\rho h^\rho}{r}\begin{bmatrix} B_\rho/\nu\cos\nu t\cos\vartheta - A_\rho/\varepsilon\nu\cos\varepsilon\nu t\sin\vartheta \\ B_\rho/\nu\sin\nu t\cos\vartheta - A_\rho/\varepsilon\nu\sin\varepsilon\nu t\sin\vartheta \\ (B_\rho\sin\vartheta + A_\rho\cos\vartheta)\,t \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$A_\rho=\varepsilon\nu^{\rho+1}\sin^2\vartheta f_\rho(\varepsilon,\vartheta),\quad B=\varepsilon\nu^{\rho+1}\sin\vartheta\, g_\rho(\varepsilon,\vartheta)$$

Константа δ_ρ зависит от порядка точности ρ алгоритма вычисления параметров ориентации.

Принцип перенесения Котельникова — Штуди, примененный к выражению (5.3), позволяет оценить погрешность $\alpha^\circ(t)$ вычисления вектора φ°:

$$\alpha_\rho^\circ(t)=\frac{\delta_\rho h^\rho}{r}\begin{bmatrix} P_\rho\cos\nu t - Q_\rho\cos\varepsilon\nu t + R_\rho t\sin\varepsilon\nu t - S_\rho t\sin\nu t \\ P_\rho\sin\nu t - Q_\rho\sin\varepsilon\nu t - R_\rho t\cos\varepsilon\nu t + S_\rho t\cos\nu t \\ T_\rho t \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

В (5.4) введены следующие обозначения:

$$P_\rho=\frac{1}{\nu}\left[\left(B_\rho^\circ - B_\rho\frac{\nu^\circ}{\nu}\right)\cos\vartheta - B_\rho\vartheta^\circ\sin\vartheta\right]$$

$$Q_\rho=\frac{1}{\varepsilon\nu}\left[\left(A_\rho^\circ - A_\rho\frac{\nu^\circ}{\nu}\right)\sin\vartheta + A_\rho\vartheta^\circ\cos\vartheta\right]$$

$$R_\rho=\frac{\nu^\circ}{\nu}A_\rho\sin\vartheta,\qquad S_\rho=\frac{\nu^\circ}{\nu}B_\rho\cos\vartheta$$

$$T_\rho=(A_\rho^\circ+B_\rho\vartheta^\circ)\cos\vartheta+(B_\rho^\circ-A_\rho\vartheta^\circ)\sin\vartheta$$

$$A_\rho^\circ=\varepsilon\nu^\rho\{[(\rho+1)\nu^\circ\sin^2\vartheta+\nu\vartheta^\circ\sin 2\vartheta]f_\rho(\varepsilon,\vartheta)+\nu\sin^2\vartheta f_\rho^\circ(\varepsilon,\vartheta,\vartheta^\circ)\}$$

$$B_\rho^\circ=\varepsilon\nu^\rho\{[(\rho+1)\nu^\circ\sin\vartheta+\nu\vartheta^\circ\cos\vartheta]g_\rho(\varepsilon,\vartheta)+\nu\sin\vartheta g_\rho^\circ(\varepsilon,\vartheta,\vartheta^\circ)\}$$

Структуры функций f_ρ, f_ρ°, g_ρ, g_ρ° зависят от порядка точности ρ алгоритмов вычисления векторов φ и φ° и имеют, например, для $\rho=2$ и $\rho=4$ вид

$$f_2(\varepsilon,\vartheta)=-\varepsilon,\quad f_2^\circ(\varepsilon,\vartheta,\vartheta^\circ)=0$$

$$g_2(\varepsilon,\vartheta)=1+\varepsilon\cos\vartheta,\quad g_2^\circ(\varepsilon,\vartheta,\vartheta^\circ)=-\varepsilon\vartheta^\circ\sin\vartheta$$

$$f_4(\varepsilon,\vartheta)=-\varepsilon(4\varepsilon^2+24\varepsilon\cos\vartheta+23)$$

$$g_4(\varepsilon,\vartheta)=4\varepsilon^3\cos\vartheta+8\varepsilon^2(3\cos^2\vartheta-1)+19\varepsilon\cos\vartheta+7$$

$$f_4^\circ(\varepsilon,\vartheta,\vartheta^\circ)=24\varepsilon^2\vartheta^\circ\sin\vartheta$$

$$g_4^\circ(\varepsilon,\vartheta,\vartheta^\circ)=-\varepsilon\vartheta^\circ\sin\vartheta(4\varepsilon^2+48\varepsilon\cos\vartheta+19)$$

Точность построения базиса **E** условимся характеризовать скоростью дрейфа $\alpha^{\cdot}=\|\alpha^{\cdot}\|$ вычисленной связанной с телом системы координат (численный образ системы **E**) относительно своего истинного положения. Из (5.3) получаем оценку величины для движения твердого тела, отвечающего регулярной прецессии:

$$\alpha_\rho^{\cdot}=\frac{\delta_\rho h^\rho}{r}\left[A_\rho^2+B_\rho^2+A_\rho B_\rho \sin 2\vartheta\,(1-\cos(1-\varepsilon)\nu t)\right]^{1/2} \tag{5.5}$$

Если погрешность вычисления вектора φ° определять евклидовой нормой вектора α°, то в соответствии с (5.4) асимптотическую оценку этой величины удобно представить в форме

$$\alpha_\rho^\circ=\|\alpha_\rho^\circ\|=\frac{\delta_\rho h^\rho}{r}W_\rho t\left[1-\frac{\nu^{02}A_\rho B_\rho \sin 2\vartheta \cos(1-\varepsilon)\nu t}{\nu^2 W_\rho^2}\right]^{1/2}\Psi_\rho(t) \tag{5.6}$$

где введены следующие обозначения:

$$W_\rho=(R_\rho^2+S_\rho^2+T_\rho^2)^{1/2}$$

$$\Psi_\rho(t)=\left[1+\frac{P_\rho^2+Q_\rho^2-2P_\rho Q_\rho \cos(1-\varepsilon)\nu t+2t(Q_\rho S_\rho-P_\rho R_\rho)\sin(1-\varepsilon)\nu t}{t^2(W_\rho^2-2R_\rho S_\rho\cos(1-\varepsilon)\nu t)}\right]^{1/2}$$

При больших t оценка (5.6) упрощается, так как при этом $\Psi_\rho(t)\approx 1$. Величина (5.6) — оценка точности вычисления кажущейся скорости центра масс твердого тела в инерциальном пространстве (см. вторую формулу в (3.5)). Чтобы получить аналогичную оценку в связанной с объектом системе координат **E**, следует воспользоваться первой формулой (3.5) и выражениями (5.3), (5.4).

6. Для исследования точности вычисления параметров движения твердого тела по алгоритмам четвертого и шестого порядков точности проводился вычислительный эксперимент. Моделировался дуальный аналог регулярной прецессии на интервале времени в 100 с при $\nu=2\pi$ с$^{-1}$, $\vartheta=10°$, $h=0{,}01$ с.

Рассматривались три варианта задания параметров и начальных условий движения твердого тела:

1) $\nu^\circ=0{,}5$ м/с^2, $\vartheta^\circ=10$ м/с, $\mathbf{W}_I(0)=\{10,\ 0,\ 0\}$ (м/с); $\mathbf{\Lambda}(0)=\{\cos(\vartheta/2), \sin(\vartheta/2), 0, 0\}$

2) $\nu^\circ=10$ м/с^2, $\vartheta^\circ=100$ м/с, $\mathbf{W}_I(0)=\{100,\ 0,\ 0\}$ (м/с); $\mathbf{\Lambda}(0)=\{\cos(\vartheta/2), \sin(\vartheta/2), 0, 0\}$

3) $\nu^\circ=10$ м/с^2, $\vartheta^\circ=100$ м/с, $\mathbf{W}_I(0)=\{20,\ 35,\ 40\}$ (м/с); $\mathbf{\Lambda}(0)=\{1,\ 0, 0, 0\}$

Параметр ε в выражении (4.2) принимал два значения: $\varepsilon=-1$ (коническое движение) и $\varepsilon=0{,}5$.

Параллельно с анализом точности алгоритмов исследовались асимптотические оценки (5.3), (5.4) погрешностей вычисления комплексного вектора **Φ** и построенные на их основе оценки точности определения параметров ориентации твердого тела и кажущейся скорости его центра масс.

Погрешности вычислений параметров движения твердого тела, относящиеся к моменту времени $t=100$ с, сведены в таблицу (ΔW — в м/с). Под $\delta\varphi^{\cdot}$ (град/час) понимается постоянная составляющая скорости дрей-

Параметр	$\rho=4$ $\varepsilon=-1$	$\rho=4$ $\varepsilon=0{,}5$	$\rho=6$ $\varepsilon=-1$	$\rho=6$ $\varepsilon=0{,}5$	Варианты
$\delta\varphi^{\cdot}$	$1{,}590\cdot10^{-1}$	$8{,}216\cdot10^{-2}$	$3{,}476\cdot10^{-4}$	$8{,}372\cdot10^{-4}$	1–3
$\|\Delta W_E\|$	$8{,}648\cdot10^{-3}$	$4{,}597\cdot10^{-3}$	$5{,}794\cdot10^{-6}$	$4{,}017\cdot10^{-5}$	1
	$8{,}619\cdot10^{-2}$	$4{,}619\cdot10^{-2}$	$5{,}851\cdot10^{-5}$	$3{,}999\cdot10^{-4}$	2
	$8{,}644\cdot10^{-2}$	$4{,}644\cdot10^{-2}$	$5{,}783\cdot10^{-5}$	$6{,}406\cdot10^{-4}$	3
$\|\Delta W_I\|$	$8{,}648\cdot10^{-3}$	$4{,}629\cdot10^{-3}$	$5{,}978\cdot10^{-6}$	$8{,}687\cdot10^{-5}$	1
	$8{,}755\cdot10^{-2}$	$4{,}688\cdot10^{-2}$	$6{,}207\cdot10^{-5}$	$1{,}232\cdot10^{-3}$	2,3

фа вычисленной связанной с телом системы координат относительно базиса E.

Анализ результатов численного моделирования свидетельствует, с одной стороны, о высокой точности вычисления параметров движения твердого тела по предлагаемым алгоритмам, а с другой стороны — об эффективности асимптотических оценок погрешностей определения искомых параметров.

В заключение отметим, что с методической точки зрения при синтезе высокоточных алгоритмов определения параметров движения твердого тела целесообразно основное усилие сосредоточить на построении эффективных алгоритмов вычислений координат вектора ориентации и оценок их погрешностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев Д. В.* К задаче вычисления параметров движения твердого тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 170–172.
2. *Челноков Ю. Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.
3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
4. *Bortz J. E.* A new mathematical formulation for strap-down inertial navigation // IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst. 1971. V. 7. № 1. P. 61–66.
5. *Панов А. П.* Синтез методов вычислений координат вектора ориентации // Кибернетика и вычислительная техника. 1979. Вып. 43. С. 122–130.
6. *Панов А. П.* Методы шестого порядка точности для вычисления координат вектора ориентации по квазикоординатам // Кибернетика и вычислительная техника. 1986. Вып. 69. С. 47–52.
7. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
8. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее применения. М.: Наука, 1978. 327 с.
9. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1969. Ч. 2. 332 с.
10. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М. Наука, 1966. 579 с.

Киев

Поступила в редакцию
2.VI.1987