МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1989

УДК 531.8

Л. Д. АКУЛЕНКО, Н. Н. БОЛОТНИК

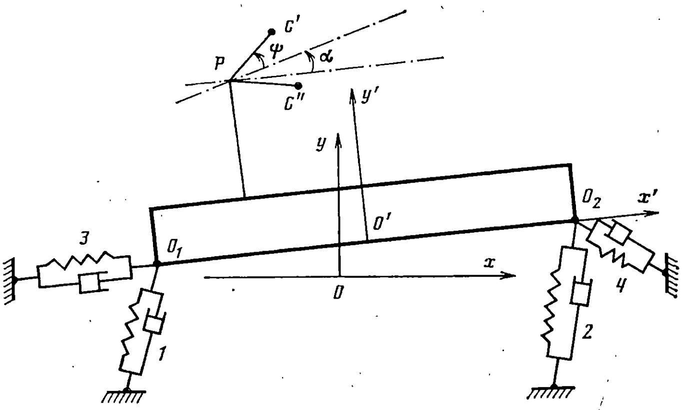
О БАЛАНСИРОВКЕ ВИБРАЦИОННЫХ МЕХАНИЗМОВ С ИНЕРЦИОННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА ВЯЗКОУПРУГИХ ОПОРАХ

Рассматриваются плоскопараллельные движения механической системы, представляющей собой абсолютно твердое тело (платформу), на котором расположен двухвальный вибровозбудитель направленного действия [1, 2]. Платформа связана с неподвижным основанием посредством опор, состоящих из упругих элементов (пружин) и демпферов с линейными характеристиками. Решается задача о выборе параметров системы (коэффициентов жесткости и демпфирования опор, геометрических характеристик крепления вибровозбудителя и др.), обеспечивающих поступательное (без вращения) движение платформы. Такая задача возникает, например, при расчете виброплощадок для формования изделий из железобетона [2, 3]. Получены условия «абсолютной» балансировки, при которых вращательная составляющая движения не появляется, если в начальный момент времени угловая скорость платформы равна нулю, а также условия существования стационарных колебаний с поступательным движением платформы. Некоторые общие аспекты теории вибрационных механизмов с инерционным возбуждением изложены в [2, 4, 5]. В [6–8] рассматривались вопросы балансировки вибрационного механизма в стационарном режиме без учета диссипации в опорах.

1. Механическая модель и уравнение движения. Рассматриваются малые плоскопараллельные колебания абсолютно твердой платформы, на которой расположен двухвальный вибровозбудитель направленного действия. Вибровозбудитель представляет собой два одинаковых несбалансированных ротора, вращающиеся вокруг оси P с равными по абсолютной величине и противоположно направленными угловыми скоростями. Платформа связана с неподвижным основанием (фундаментом) посредством вязкоупругих одноосных элементов (опор) с линейными характеристиками, как показано на фигуре. Ось вращения P роторов перпендикулярна плоскости движения. Рассматриваемая система моделирует рабочий орган многих вибрационных механизмов технологического назначения, например, виброплощадок для формования объемных изделий из бетона.

Введем инерциальную систему координат Oxy и подвижную систему $O'x'y'$, связанную с платформой. Ось $O'x'$ направим вдоль прямой O_1O_2, проходящей через точки крепления опор к платформе; полюс подвижной системы координат O' примем в середине отрезка O_1O_2. Оси Ox и Oy инерциальной системы отсчета направлены соответственно по горизонтали и по вертикали. Обе системы координат совпадают в положении платформы, отвечающем недеформированному состоянию всех опор, при этом оси опор 1 и 2 ориентированы вертикально, а оси опор 3 и 4 — горизонтально.

Обозначим x, y — координаты точки O' в инерциальной системе; φ — угол между осями Ox и $O'x'$ (угол поворота платформы); $L=|O_1O'|=|O'O_2|$ — половина расстояния между точками крепления опор к платформе; ξ, η — абсцисса и ордината центра масс платформы в системе координат $O'x'y'$; a, b — координаты проекций точки пересечения оси вращения роторов вибровозбудителя с плоскостью $O'x'y'$ соответственно на оси $O'x'$ и $O'y'$ подвижной системы координат; C', C'' — центры инерции роторов вибровозбудителя; γ — линия действия вибровозбудителя (биссектриса угла $C'PC''$); α — угол между прямой γ и осью Ox'; ψ — абсолютная ве-



личина углов поворота роторов относительно линии действия вибровозбудителей; $l=|PC'|=|PC''|$ — расстояние от оси вращения роторов до их центров масс; M — масса платформы, m — суммарная масса роторов вибровозбудителя, I_1 — момент инерции платформы относительно оси, проходящей через точку O' и перпендикулярной плоскости движения; $^1/_2 I_2$ — момент инерции одного ротора вибровозбудителя относительно оси вращения; $c_j \geqslant 0$ — коэффициенты жесткости опор; $k_j \geqslant 0$ — коэффициенты демпфирования опор (индекс $j=1$, 2, 3, 4 обозначает номер опоры в соответствии с фигурой). Рассматривается случай, когда угловые скорости вращений роторов постоянны; $\psi(t)=\omega t+\psi_0$. Здесь ω — абсолютная величина угловой скорости, ψ_0 — аддитивная фазовая постоянная (значение величины ψ при $t=0$).

Кинетическая энергия описанной механической системы задается выражением:

$$
\begin{gathered}
T={}^1/_2\{(M+m)(x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2})+[m(a^2+b^2)+I_1+I_2+ \\
+2ml(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\cos\psi]\varphi^{\cdot 2}\}+\{M(\eta\cos\varphi+\xi\sin\varphi)+ \\
+m[a\sin\varphi+b\cos\varphi+l\sin(\alpha+\varphi)\cos\psi]\}x^{\cdot}\varphi^{\cdot}+\{M(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)+ \\
+m[a\cos\varphi-b\sin\varphi+l\cos(\alpha+\varphi)\cos\psi]\}y^{\cdot}\varphi^{\cdot}+ml\omega[(b\cos\alpha-a\sin\alpha)\varphi^{\cdot}- \\
-\sin(\alpha+\varphi)y^{\cdot}-\cos(\alpha+\varphi)x^{\cdot}]\sin\psi+{}^1/_2 I_2\omega^2
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Потенциальная энергия П складывается из энергии упругой деформации опор и потенциальной энергии сил тяготения, дествующих на элементы системы

$$
\begin{gathered}
\Pi=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} c_j(l_j-l_{j0})^2+Mg(y+\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)+ \\
+mg[y+a\sin\varphi+b\sin(\alpha+\varphi)\cos\psi]
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Здесь l_j — текущая длина j-й опоры, l_{j0} — длина j-й опоры в недеформированном состоянии. Из геометрии расположения опор вытекает, что

$$
\begin{aligned}
l_1&=\{[x-L(\cos\varphi-1)]^2+(y-L\sin\varphi+l_{10})^2\}^{1/2} \\
l_2&=\{[x+L(\cos\varphi-1)]^2+(y+L\sin\varphi+l_{20})^2\}^{1/2} \\
l_3&=\{[x-L(\cos\varphi-1)+l_{30}]^2+(y-L\sin\varphi)^2\}^{1/2} \\
l_4&=\{[x+L(\cos\varphi-1)-l_{40}]^2+(y+L\sin\varphi)^2\}^{1/2}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Диссипативная функция Рэлея R равна

$$
R=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} k_j l_j^{\cdot 2}
\tag{1.4}
$$

Малые колебания платформы, которые характеризуются соотношениями $|x/l_{j0}|\ll 1$, $|y/l_{j0}|\ll 1$, $|\varphi|\ll 1$, $L\varphi=O((x^2+y^2)^{1/2})$, с достаточной точностью описываются линеаризованными уравнениями Лагранжа, соответствующими (1.1)–(1.4):

$$\begin{gathered}(M+m)\ddot{x}-(M\eta+mb+ml\sin\alpha\cos\psi)\ddot{\varphi}+(c_3+c_4)x+\\+ml\omega^2\sin\alpha\cos\psi\varphi+(k_3+k_4)\dot{x}+2ml\omega\sin\alpha\sin\psi\dot{\varphi}=ml\omega^2\cos\alpha\cos\psi\\(M+m)\ddot{y}+(M\xi+ma+ml\cos\alpha\cos\psi)\ddot{\varphi}+(c_1+c_2)y+(k_1+k_2)\dot{y}+\\+[(k_2-k_1)L-2ml\omega\cos\alpha\sin\psi]\dot{\varphi}=ml\omega^2\sin\alpha\cos\psi-\\-(M+m)g-(M\eta+mb+ml\sin\alpha\cos\psi)\ddot{x}+(M\xi+ma+ml\cos\alpha\cos\psi)\ddot{y}+\\+[I_1+I_2+m(a^2+b^2)+2ml(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\cos\psi]\ddot{\varphi}+(c_2-c_1)Ly+\\+[(c_1+c_2)L^2-(M\eta+mb+ml\sin\alpha\cos\psi)g]\varphi+(k_2-k_1)L\dot{y}+\\+[(k_1+k_2)L^2-2ml\omega(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\sin\psi]\dot{\varphi}=\\=-ml\omega^2(b\cos\alpha-a\sin\alpha)\cos\psi-g(M\xi+ma+ml\cos\alpha\cos\psi)\end{gathered}\tag{1.5}$$

Введем новые безразмерные переменные и параметры

$$\begin{gathered}x'=x/L,\quad y'=y/L,\quad a'=a/L,\quad b'=b/L,\quad l'=l/L\\ \xi'=\xi/L,\quad \eta'=\eta/L,\quad m'=m/M,\quad t'=\omega t,\quad g'=g/(L\omega^2)\\ I_i'=I_i/(ML^2)\quad(i=1,2);\quad k_j'=k_j/(M\omega),\quad c_j'=c_j/(M\omega^2)\quad(j=1,2,3,4)\end{gathered}\tag{1.6}$$

После перехода к безразмерным переменным и опускания штрихов для удобства записи уравнения движения будут иметь вид (1.5), где следует положить $M=1$, $L=1$, $\omega=1$.

Оценим величины безразмерных параметров, входящих в уравнения движения виброплощадки для формования железобетонных изделий [6, 8]. Типичные значения геометрических, инерционных и вибрационных параметров площадки следующие: $L=5$ м, $\eta=0.4$ м, $l=0.15$ м, $\omega=50\ \pi c^{-1}$ (это отвечает частоте вращения роторов, равной 25 Гц), $m=24$ кг, $M=2\cdot10^4$ кг. Соответствующие безразмерные параметры имеют оценки:

$$\begin{gathered}m'=1{,}2\cdot10^{-3},\quad l'=3\cdot10^{-2},\quad g'=7{,}9\cdot10^{-5}\\ m'l'=3{,}6\cdot10^{-5},\quad \eta'=8\cdot10^{-2}\end{gathered}\tag{1.7}$$

Остальные безразмерные параметры будем считать величинами порядка единицы.

Оценки (1.7) показывают, что в систему уравнений (1.5) входят величины существенно различных порядков. Это позволяет значительно упростить систему, опустив ряд малых слагаемых, и с достаточной степенью точности представить ее в виде совокупности дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{gathered}\ddot{x}-\eta\ddot{\varphi}+(c_3+c_4)x+(k_3+k_4)\dot{x}=ml\cos\alpha\cos\psi\\ \ddot{y}+\xi\ddot{\varphi}+(c_1+c_2)y+(k_1+k_2)\dot{y}+\\+(c_2-c_1)\varphi+(k_2-k_1)\dot{\varphi}=ml\sin\alpha\cos\psi-g\\ -\eta\ddot{x}+\xi\ddot{y}+[I_1+I_2+m(a^2+b^2)]\ddot{\varphi}+\\+(c_2-c_1)y+(k_2-k_1)\dot{y}+(c_1+c_2)\varphi+(k_1+k_2)\dot{\varphi}=\\=-ml(b\cos\alpha-a\sin\alpha)\cos\psi-g\xi\end{gathered}\tag{1.8}$$

На основе строгих утверждений [9] доказывается, что установившиеся колебания с периодом 2π по фазе ψ исходной системы (1.5) и линеаризованной (1.8) близки в следующем смысле. Стационарные колебания, описываемые системой (1.8) в силу (1.7) малы; их амплитуды оцениваются величинами: $|x|\sim ml$; $|y|$, $|\varphi|\sim ml+g$; 2π-периодическое решение возмущенной системы (1.8) будет отличаться от соответствующего решения невозмущенной системы на величину порядка $g^2+(ml)^2$, что приемлемо с прикладной точки зрения. Конечно, при этом предполагается, что демпфирование, определяемое коэффициентами k_j, достаточно велико, либо, в противном случае, возбуждение рассматривается вне резонансных зон, определяемых собственными частотами системы (1.8) (при $k_j=0$).

Важной инженерной задачей, решаемой при проектировании и настройке вибрационного механизма, является выбор таких его параметров, при которых платформа движется поступательно, т. е. $\varphi^{\cdot}\equiv 0$. Применительно к виброплощадке для формирования изделий из бетона это обеспечит однородность поля ускорений по всему объему формуемого бетона и, как следствие, однородность механических характеристик готового изделия.

2. «Абсолютная» балансировка механизма. Найдем условия, которые надо наложить на параметры системы (1.8), чтобы при любых начальных условиях для x, $x^{\cdot}$, y, $y^{\cdot}$ и нулевых для $\varphi, \varphi^{\cdot}$ выполнялось тождество $\varphi(t)\equiv 0$, $t\geqslant 0$, что отвечает поступательному движению платформы.

Выразив из первых двух уравнений (1.8) величины $x^{\cdot\cdot}$, $y^{\cdot\cdot}$ и подставив полученные соотношения в третье уравнение, получим

$$\begin{gathered}[I_1+I_2+m(a^2+b^2)-\eta^2-\xi^2]\varphi^{\cdot\cdot}+\\ +[(c_1+c_2)-\xi(c_2-c_1)]\varphi+[(k_1+k_2)-\xi(k_2-k_1)]\varphi^{\cdot}+\\ +\eta(c_3+c_4)x+\eta(k_3+k_4)x^{\cdot}+\\ +[c_2-c_1-\xi(c_1+c_2)]y+(k_2-k_1-\xi(k_1+k_2)]y^{\cdot}=\\ =ml[(\eta-b)\cos\alpha+(a-\xi)\sin\alpha]\cos\psi \end{gathered} \tag{2.1}$$

Как следует из (1.8), (2.1), для того, чтобы система обладала желаемым свойством, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при x, $x^{\cdot}$, y, $y^{\cdot}$, $\cos\psi$ в уравнении (2.1) равнялись нулю. Это приводит к следующим соотношениям:

$$\eta=0,\qquad \xi=\frac{c_2-c_1}{c_1+c_2}=\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}=\frac{a\sin\alpha-b\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{2.2}$$

Равенства (2.2) можно записать в виде:

$$\eta=0,\qquad \frac{c_1}{c_2}=\frac{k_1}{k_2}=\frac{1-\xi}{1+\xi}=\frac{(1-a)\sin\alpha+b\cos\alpha}{(1+a)\sin\alpha-b\cos\alpha} \tag{2.3}$$

Условия (2.2), (2.3) будем называть условиями абсолютной балансировки механизма, поскольку при их выполнении угловой составляющей движения системы (1.8) не возникает ни в течение переходного процесса, ни при стационарном режиме работы механизма. В этом случае угловая переменная φ отделяется от x, y и внешнее возбуждение отсутствует. При нулевых начальных условиях $\varphi(t)\equiv 0$ для $\forall t>0$. Конечно, это утверждение выполняется в указанном выше приближенном смысле. Из первого равенства (2.2) вытекает, что абсолютная балансировка возможна только тогда, когда центр масс платформы расположен в плоскости крепления к ней опор. (Плоскостью крепления опор к платформе здесь и в дальнейшем называется плоскость, перпендикулярная плоскости движения и проходящая через ось $O'x'$ системы координат, связанной с платформой.) Технически приведение центра масс платформы в плоскость крепления опор можно осуществить за счет использования специальной конструкции виброплощадки, в которой предусмотрено вертикальное перемещение формы с бетонной смесью [8]. При условии $\eta=0$, как видно из (2.2), (2.3), абсолютной балансировки можно добиться при любом ξ соответствующим выбором отношений коэффициентов жесткости и демпфирования опор, а также параметров a и b, характеризующих расположение вибровозбудителя на платформе.

3. Балансировка механизма в стационарном режиме работы. Найдем множество параметров, при которых существуют 2π-периодические колебания системы (1.8), отвечающие поступательному установившемуся (для достаточно больших t) движению платформы (при $\varphi(t)\equiv 0$). Подставляя $\varphi(t)\equiv 0$ в (1.8), получим

$$x^{\cdot\cdot}+(c_3+c_4)x+(k_3+k_4)x^{\cdot}=ml\cos\alpha\cos\psi \tag{3.1}$$

$$y^{\cdot\cdot}+(c_1+c_2)y+(k_1+k_2)y^{\cdot}=ml\sin\alpha\cos\psi-g \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}-\eta x^{\cdot\cdot}+\xi y^{\cdot\cdot}+(c_2-c_1)y+(k_2-k_1)y^{\cdot}=\\ =-ml(b\cos\alpha-a\sin\alpha)\cos\psi-g\xi,\quad \psi=t+\psi_0\end{gathered} \tag{3.3}$$

Уравнения (3.1), (3.2) имеют единственное периодическое решение:

$$x^*(t)=\frac{ml\cos\alpha}{(c_3+c_4-1)^2+(k_3+k_4)^2}\left[(k_3+k_4)\sin\psi+(c_3+c_4-1)\cos\psi\right] \quad (3.4)$$

$$y^*(t)=\frac{ml\sin\alpha}{(c_1+c_2-1)^2+(k_1+k_2)^2}\left[(k_1+k_2)\sin\psi+(c_1+c_2-1)\cos\psi\right]-g/(c_1+c_2)$$

Подставляя (3.4) в (3.3), имеем:

$$ml\Omega_1\sin\psi(t)+ml\Omega_2\cos\psi(t)+\Omega_3\equiv 0 \quad (3.5)$$

$$\Omega_1=\frac{\eta(k_3+k_4)\cos\alpha}{(c_3+c_4-1)^2+(k_3+k_4)^2}+\frac{[2c_2k_1-2c_1k_2-(1+\xi)k_1+(1-\xi)k_2]\sin\alpha}{(c_1+c_2-1)^2+(k_1+k_2)^2}$$

$$\Omega_2=\frac{\eta(c_3+c_4-1)\cos\alpha}{(c_3+c_4-1)^2+(k_3+k_4)^2}+ \quad (3.6)$$

$$+\frac{[c_2^2-c_1^2+k_2^2-k_1^2+(1-\xi)c_1-(1+\xi)c_2+\xi]\sin\alpha}{(c_1+c_2-1)^2+(k_1+k_2)^2}+b\cos\alpha-a\sin\alpha$$

$$\Omega_3=g[\xi-(c_2-c_1)/(c_1+c_2)]$$

Для существования стационарного режима работы механизма с поступательным движением платформы ($\varphi(t)\equiv 0$) необходимо и достаточно, чтобы равенство (3.5) выполнялось тождественно по t. Последнее эквивалентно равенству нулю каждого коэффициента Ω_i, $i=1, 2, 3$, так как система функций 1, $\cos\psi$, $\sin\psi$ линейно независима. Равенства

$$\Omega_i=0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.7)$$

где Ω_i выражаются формулами (3.6), определяют искомое множество параметров и являются условиями балансировки механизма в стационарном режиме работы. Во время переходного процесса платформа в общем случае движется непоступательно.

В [6] были получены условия балансировки (в стационарном режиме) для механизма, аналогичного рассматриваемому в настоящей статье, но без учета демпфирования в опорах. При $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ последние два равенства (3.7) переходят в условия балансировки, полученные в [6]; первое равенство (3.7) при этом выполняется тождественно и в [6] отсутствует.

Условия абсолютной балансировки (2.2), (2.3) являются более жесткими, чем условия (3.7). Если, например, абсолютная балансировка возможна лишь тогда, когда центр масс платформы лежит в плоскости крепления к ней опор ($\eta=0$), то поступательного движения платформы в установившемся режиме можно добиться и при ином положении центра масс. Таким образом, технические возможности балансировки механизма в стационарном режиме шире, чем возможности абсолютной балансировки. Этот факт представляется важным, поскольку при эксплуатации вибромашин обычно требуется обеспечить поступательность движения рабочего органа именно в стационарном режиме.

Сделаем некоторые замечания, касающиеся характера поступательного движения платформы в стационарном режиме при выполнении условий балансировки (3.6), (3.7). Из (3.4) вытекает, что в общем случае траектории движения всех точек платформы — одинаковые эллипсы. Угол наклона осей этих эллипсов по отношению к осям координат инерциальной системы отсчета зависит от параметров, входящих в равенства (3.4). В частности траектории будут окружностями при выполнении следующих равенств

$$\cos^2\alpha[(c_1+c_2-1)^2+(k_1+k_2)^2]=\sin^2\alpha[(c_3+c_4-1)^2+(k_3+k_4)^2]$$

$$(k_1+k_2)(k_3+k_4)+(c_1+c_2-1)(c_3+c_4-1)=0$$

Если выполнено соотношение

$$(k_3+k_4)(c_1+c_2-1)=(k_1+k_2)(c_3+c_4-1) \quad (3.8)$$

то платформа совершает колебания вдоль прямой

$$(k_1+k_2)\,y-(k_3+k_4)\,\operatorname{tg}\alpha\,x=0 \tag{3.9}$$

или (что то же, согласно (3.8)):

$$(c_1+c_2-1)\,y-(c_3+c_4-1)\,\operatorname{tg}\alpha\,x=0 \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) видно, что направление колебаний, вообще говоря, не совпадает с направлением действия вибровозбудителя.

Как следует из (3.4), при $\alpha=0$, колебания возможны только в горизонтальном направлении, а при $\alpha=\pi/2$ — в вертикальном.

Система линеаризованных уравнений движения (1.8), записанная в векторно-матричных обозначениях, имеет вид

$$A\ddot{q}+B\dot{q}+Cq=F(t) \tag{3.11}$$

Здесь $q=(x,y,\varphi)^T$ — вектор обобщенных координат, A — положительно-определенная матрица кинетической энергии, B — матрица коэффициентов диссипации, C — матрица потенциальной энергии, $F(t)$ — обобщенная возмущающая сила. Непосредственная проверка показывает, что если

$$\begin{gathered} c_1>0,\quad c_2>0,\quad c_3+c_4>0 \\ k_1>0,\quad k_2>0,\quad k_3+k_4>0 \end{gathered} \tag{3.12}$$

то матрицы B и C положительно-определенны. В этом случае любое частное решение линейной системы (1.8), в том числе и установившееся, асимптотически устойчиво [9]. Если хотя бы одно из неравенств (3.12) нестрогое, то матрица B неотрицательно-определенна, при этом любое решение системы (1.8) устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво.

Пусть параметры системы удовлетворяют условиям (3.6), (3.7) при $k_j=0$, $j=1,2,3,4$; $c_1+c_2\neq1$, $c_3+c_4\neq1$, обеспечивающим балансировку в стационарном режиме работы при отсутствии демпфирования (см. также [6]). Оценим влияние неучтенного демпфирования на величину «угловых» колебаний платформы в стационарном режиме. Представим стационарное решение в виде

$$q(t)=q_0(t)+q_1(t),\quad q=(x,y,\varphi)^T \tag{3.13}$$

где $q_0(t)=(x^*(t),y^*(t),0)^T$ — стационарное решение при отсутствии демпфирования, $q_1(t)$ — добавка, обусловленная демпфированием. Функции $x^*(t)$, $y^*(t)$ определяются равенствами (3.4) при $k_j=0$, $j=1,2,3,4$. Подставляя (3.13) в (3.11), получим уравнение для $q_1(t)$:

$$A\ddot{q}_1+B\dot{q}_1+Cq_1=-B\dot{q}_0(t) \tag{3.14}$$

Из (3.4) вытекает, что $\dot{q}_0(t)$ в правой части (3.14) имеет вид

$$\dot{q}_0(t)=u\sin\psi,\quad \psi=t+\psi_0$$

$$u=\{-ml\cos\alpha/(c_3+c_4-1),\ -ml\sin\alpha/(c_1+c_2-1),\ 0\}^T$$

Стационарное (установившееся) решение системы (3.14) представляется следующим равенством:

$$q_1(t)=v_1\sin\psi+v_2\cos\psi \tag{3.15}$$

где векторы v_1 и v_2 находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$(C-A)\,v_1-Bv_2=Bu,\quad Bv_1+(C-A)\,v_2=0 \tag{3.16}$$

Система (3.16) получается после подстановки (3.15) в (3.14) и разделения коэффициентов при $\sin\psi$ и $\cos\psi$.

Если $\det(C-A)\neq0$, т. е. отсутствует резонанс собственных частот колебательной системы (3.14) с частотой возбуждения, то $|v_1|=O(\|B\|)$, $|v_2|=O(\|B\|)$ при $\|B\|\to0$.

4. Частные случаи. Рассмотрим два случая ориентации линии действия вибровозбудителя относительно платформы, а именно $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$.

При $\alpha=0$ условия абсолютной балансировки (2.2) выглядят следующим образом:

$$\eta=0, \quad b=0, \quad \xi=\frac{c_2-c_1}{c_1+c_2}=\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}=a \tag{4.1}$$

Из (4.1) вытекает, что для абсолютной балансировки механизма при $\alpha=0$ требуется, чтобы ось вращения роторов вибровозбудителя находилась в плоскости крепления опор к платформе ($b=0$) и, кроме того, проходила через ее центр масс $a=\xi$.

Рассмотрим теперь балансировку в стационарном режиме работы механизма в случае $\alpha=0$. Как следует из (3.1), (3.2) стационарные поступательные колебания платформы происходят в горизонтальном направлении, при этом $y=g/(c_1+c_2)$. Из (3.6), (3.7) вытекают следующие условия балансировки при $\alpha=0$:

$$\begin{gathered}\eta(k_3+k_4)/[(c_3+c_4-1)^2+(k_3+k_4)^2]=0\\ \eta(c_3+c_4-1)/[(c_3+c_4-1)^2+(k_3+k_4)^2]+b=0\\ \xi=(c_2-c_1)/(c_1+c_2)\end{gathered} \tag{4.2}$$

Для удовлетворения первого равенства (4.2) необходимо, чтобы $\eta=0$ или $k_3+k_4=0$. В первом случае имеем

$$\eta=0, \quad b=0, \ \xi=(c_2-c_1)/(c_1+c_2) \tag{4.3}$$

Таким образом, если $k_3=k_u\neq0$, т. е. опоры, оказывающие сопротивление движению в горизонтальном направлении, обладают демпфированием, то балансировка механизма в стационарном режиме, как и абсолютная балансировка, возможна лишь тогда, когда центр масс платформы и ось вращения роторов вибровозбудителя лежат в плоскости крепления опор. В отличие от условий абсолютной балансировки (4.1), равенства (4.3) не налагают никаких ограничений на коэффициенты демпфирования k_1, k_2 опор, действующих в вертикальном направлении, а также на расположение оси вращения роторов вибровозбудителя в плоскости крепления виброизоляторов к платформе (параметр a).

Если $\eta\neq0$, то для балансировки в стационарном режиме необходимо, чтобы опоры, действующие в горизонтальном направлении, не обладали демпфированием, т. е. $k_3=k_4=0$. В этом случае из (4.2) вытекают соотношения

$$\xi=(c_2-c_1)/(c_1+c_2), \quad c_3+c_4=1-\eta/b, \quad k_3=k_4=0, \quad c_3+c_4\neq1 \tag{4.4}$$

Неравенство в (4.4) означает отсутствие резонанса между частотой возбуждения вибраций и собственной частотой горизонтальных колебаний платформы. В противном случае при $k_3=k_4=0$, $\alpha=0$ периодические установившиеся колебания системы невозможны.

При $\alpha=\pi/2$ условия абсолютной балансировки (2.2) имеют вид

$$\eta=0, \ \xi=(c_2-c_1)/(c_1+c_2)=(k_2-k_1)/(k_1+k_2)=a \tag{4.5}$$

Особенность абсолютной балансировки при $\alpha=\pi/2$ состоит в том, что центр масс платформы должен лежать в плоскости, проходящей через ось вращения роторов вибровозбудителя и перпендикулярной плоскости крепления опор к платформе ($a=\xi$). Высота b расположения оси вращения роторов вибровозбудителя над плоскостью крепления опор не оказывает влияния на балансировку.

Условия (3.6), (3.7) балансировки механизма в стационарном режиме при $\alpha=\pi/2$ выглядят так

$$\begin{gathered}\xi=(c_2-c_1)/(c_1+c_2)\\ \frac{2c_2k_1-2c_1k_2-(1+\xi)k_1+(1-\xi)k_2}{(c_1+c_2-1)^2+(k_1+k_2)^2}=0\\ a=\frac{c_2^2-c_1^2+k_2^2-k_1^2+(1-\xi)c_1-(1+\xi)c_2+\xi}{(c_1+c_2-1)^2+(k_1+k_2)^2}\end{gathered} \tag{4.6}$$

Исключив параметр ξ из второго и третьего равенств (4.6), используя первое равенство, получим

$$\frac{(c_2k_1-c_1k_2)(c_2+c_1-1)}{(c_1+c_2)[(c_1+c_2-1)^2+(k_1+k_2)^2]}=0 \qquad (4.7)$$

$$\frac{(c_2-c_1)(c_1+c_2-1)^2+(k_2^2-k_1^2)(c_1+c_2)}{(c_1+c_2)[(c_1+c_2-1)^2+(k_1+k_2)^2]}=a \qquad (4.8)$$

Неравенство (4.7) выполняется либо при отсутствии демпфирования в опорах, действующих в вертикальном направлении ($k_1=k_2=0$), либо когда отношение (безразмерных) коэффициентов жесткости равно отношению коэффициентов демпфирования ($c_1/c_2=k_1/k_2$), либо когда имеет место «резонанс» между частотой возбуждения вибраций и собственной частотой вертикальных колебаний платформы: $c_1+c_2=1$.

В отсутствие демпфирования условия (4.6) имеют вид:

$$\xi=a=(c_2-c_1)/(c_1+c_2), \quad k_1=k_2=0 \qquad (4.9)$$
$$(c_1+c_2\neq 1)$$

При выполнении условий (4.9) резонанс не допускается, так как при $\alpha=\pi/2$, $c_1+c_2=1$ отсутствуют стационарные периодические колебания системы.

В случае резонанса получаются следующие условия балансировки:

$$a=(k_2-k_1)/(k_1+k_2), \quad c_1={}^1/_2(1-\xi), \quad c_2={}^1/_2(1+\xi) \qquad (4.10)$$
$$(k_1+k_2\neq 0)$$

При равенстве отношений безразмерных коэффициентов демпфирования и жесткости опор имеем:

$$\xi=a=(c_2-c_1)/(c_1+c_2)=(k_2-k_1)/(k_1+k_2), \quad c_1k_2=c_2k_1 \qquad (4.11)$$

Обратим внимание, что условия (4.9)–(4.11) балансировки механизма в стационарном режиме при $\alpha=\pi/2$ не содержат никаких ограничений на параметры опор, оказывающих сопротивление движению в горизонтальном направлении k_3, k_4, c_3, c_4.

Из (3.6)–(3.7), (4.4)–(4.11) вытекает, что одновременное выполнение условий балансировки в стационарном режиме при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$ влечет балансировку механизма в стационарном режиме при произвольной ориентации линии действия вибровозбудителя.

Изложенные результаты могут быть использованы для настройки параметров существующих инерционно возбуждаемых вибрационных механизмов с целью улучшения их эксплуатационных характеристик, а также при создании новых конструкций механизмов и машин для формирования объемных изделий из бетона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладков С. Н.* Электромеханические вибраторы. М.: Машиностроение, 1966. 83 с.
2. Вибрации в технике: Справочник. Т. 4. Вибрационные процессы и машины. М.: Машиностроение, 1981. 509 с.
3. *Осмаков С. А., Брауде Ф. Г.* Вибрационные формовочные машины. Расчет и применение. Л.: Стройиздат, 1976. 128 с.
4. *Быховский И. И.* Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1969. 363 с.
5. *Бауман В. А., Быховский И. И.* Вибрационные машины и процессы в строительстве. М.: Высшая школа, 1977. 255 с.
6. *Болотник Н. Н., Нгуен Чыонг.* О выборе параметров вибрационных машин с инерционным возбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 59–66.
7. *Нгуен Чыонг.* Об устойчивости стационарных колебаний вибрационного механизма с инерционным возбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 67–74.
8. *Болотник Н. Н., Гусев Б. В., Нгуен Чыонг, Холмин И. Е., Черноусько Ф. Л.* Расчет параметров вибрационного механизма с вибровозбудителями дебалансного типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 50–58.
9. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.X.1988