МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1989

УДК 531.8

Д. В. БАЛАНДИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЕМПФИРОВАНИЕМ В ПРОТИВОУДАРНЫХ АМОРТИЗАТОРАХ

Рассматривается вопрос повышения эффективности защиты от ударных воздействий в случае, когда некоторые параметры, определяющие систему «объект защиты – амортизатор» не известны точно, а могут изменяться в заданных пределах. Задача состоит в выборе переменного по ходу амортизатора коэффициента демпфирования, минимизирующего максимальное по всем возможным значениям изменяющихся параметров значение показателя качества системы амортизации.

1. Рассмотрим систему противоударной амортизации

$$x^{\cdot\cdot}=-\Phi^0(x,\, x^{\cdot},\, u,\, \alpha)+b+\sigma(t),\ x(0)=0,\ x^{\cdot}(0)=0 \qquad (1.1)$$

здесь x – смещение подвижного объекта относительно неподвижного основания, $\Phi^0(x,\, x^{\cdot},\, u,\, \alpha)$ – характеристика амортизатора, b – параметр, характеризующий постоянное силовое поле, $u=u(x)$ переменный по ходу амортизатора коэффициент демпфирования, $\sigma(t)$ – внешнее силовое ударное воздействие. Параметр α не известен точно и может изменяться в определенных пределах $[\alpha_-,\, \alpha_+]\equiv A$. Уравнение (1.1) приближенно описывает широкий круг реальных процессов, в частности, откат подвижных частей орудия после выстрела. Неопределенность в задании α может быть обусловлена, например, изменением демпфирующих свойств амортизатора в связи с колебаниями температуры окружающей среды.

Качество противоударной системы будем оценивать по максимальному усилию, действующему на основание в узлах крепления амортизатора и максимальному ходу амортизации. В случае коротких ударных воздействий максимальный ход амортизации совпадает с первым локальным экстремумом функции $x(t)$, достигаемым в момент $t=T$, в который $x^{\cdot}(t)=0$ [1, 2]. При этом, как правило, максимальное усилие достигается на отрезке $[0,\, T]$. В дальнейшем будем исследовать, так называемый, прямой ход амортизатора, определяемый как процесс амортизации на отрезке времени $[0,\, T]$. Предположим, для определенности, что при всех допустимых α, $u(x)$ прямой ход амортизатора происходит в области $x>0$, $x^{\cdot}>0$. Относительно характеристики амортизатора будем предполагать, что на прямом ходу она имеет вид $\Phi^0(x,\, x^{\cdot},\, u,\, \alpha)=\Phi(x,\, x^{\cdot 2}u,\, \alpha)$, а функция $\Phi(x,\, \eta,\, \alpha)$ определена, непрерывна и дифференцируема при $x\in[0,\, \xi_0)$, $\eta\in[0,\infty)$, $\alpha\in[\alpha_-,\, \alpha_+]$, кроме того справедливы следующие соотношения:

$$\Phi(x,\, \eta,\, \alpha)\geqslant 0,\ \Phi_\eta'(x,\, \eta,\, \alpha)>0,\ \Phi_x'(x,\, 0,\, \alpha)>0$$
$$\Phi(x,\, \eta,\, \alpha)\to\infty \text{ при } \eta\to\infty \qquad (1.2)$$

Отметим, что в случае, когда демпфирование является гидравлическим, величина $u(x)$ пропорциональна квадрату площади отверстий для перетекания вязкой жидкости.

Обозначим $G(u,\, \alpha)=\max_{t\in[0,\, T]}\Phi[x(t,\, u,\, \alpha),\, ux^{\cdot 2}(t,\, u,\, \alpha),\, \alpha]$ величину с точностью до множителя, равного массе подвижного объекта, совпадающую с максимальным усилием, действующим на основание, $S(u,\, \alpha)=x(T,\, u,\, \alpha)$ – максимальный ход амортизации, здесь $x(t,\, u,\, \alpha)$ – решение задачи Коши для уравнения (1.1) при заданных $u(x)$, α (время прямого хода T также зависит от $u(x)$, α). В качестве допустимых управлений $u(x)$ будем рассматривать кусочно-непрерывные (допускаются лишь разрывы первого рода, при этом в точке разрыва x' предполагается $u(x') = \lim_{x\to x'-0} u(x)$), кусочно-дифференцируемые на $[0, \xi_1]$ функции, удовлетворяющие условию $0 \leqslant u(x) \leqslant u_+$. Класс допустимых управлений обозначим U.

Сформулируем следующие оптимизационные задачи: найти управление $u^0 \in U$ такое, что

$$\min_{u\in U} S_\alpha(u) = S_\alpha(u^0),\ G_\alpha(u^0) \leqslant G_0 \quad (\text{задача } 1),$$
$$\min_{u\in U} G_\alpha(u) = G_\alpha(u^0),\ S_\alpha(u^0) \leqslant S_0 \quad (\text{задача } 2),$$
$$S_u(u) = \max_{\alpha\in A} S(u, \alpha),\ G_\alpha(u) = \max_{\alpha\in A} G(u, \alpha)$$

Задачи 1, 2 относятся к проблеме оптимизации гарантированного качества. При определенных условиях, указанных в [2], они являются двойственными, т. е., зная решение задачи 1 для любых допустимых значений G_0, можно найти решение задачи 2, и наоборот.

2. Предположим, что внешнее ударное воздействие с достаточной степенью точности можно считать мгновенным импульсом, т. е. $\sigma(t) = J_0\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. От уравнения (1.1) второго порядка, используя условие прямого хода $x^\cdot > 0$, перейдем к уравнению первого порядка

$$dv/dx = -2\Phi(x, uv, \alpha) + 2b, \quad v(0) = v_0 \tag{2.1}$$

где $v = x^{\cdot 2}$, $v_0 = J_0^2$. Обозначим $v(x, u, \alpha)$ решение этого уравнения для заданных $u(x)$, α. Отметим некоторые свойства функционалов $S(u, \alpha)$, $G(u, \alpha)$. Рассмотрим два допустимых управления $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Обозначим $s_1 = S(u_1, \alpha)$, $s_2 = S(u_2, \alpha)$ при некотором фиксированном значении α. Пусть $u_2(x) \leqslant u_1(x)$, причем $u_2(x) \neq u_1(x)$ при $x \in [0, s_1]$, тогда $u_2(x)$ можно представить в виде $u_2(x) = u_1(x) - \omega(x)$, где $\omega \in U$. Введем параметр $\beta \geqslant 0$ и определим функцию $\mu(x, \beta) = u_1(x) - \beta\omega(x)$, при этом $\mu(x, 0) = u_1(x)$, $\mu(x, 1) = u_2(x)$, $\mu \in U$ для $\beta \in [0, 1]$. Будем считать, что $\omega(x) \equiv 0$ при $x \in (0, x_1)$ и $\omega(x) > 0$ в правой окрестности точки x_1, где $x_1 \in [0, s_1)$.

Рассмотрим уравнение $dv/dx = -2\Phi[x, \mu(x, \beta)v, \alpha] + 2b$, $v(0) = v_0$. Дифференцируя данное уравнение по β, получим $dz/dx = 2\Phi_\eta'[x, \mu(x, \beta)v, \alpha] \times \omega(x) - 2\Phi_\eta'[x, \mu(x, \beta)v, \alpha] z\mu(x, \beta)$, $z(0) = 0$, где $z = z(x, \beta) = v_\beta'(x, \beta)$. Интегрируя последнее уравнение, находим

$$z(x, \beta) = e^{-a(x)} \int_0^x \theta(x') e^{a(x')} dx'$$

$$a(x) = \int_0^x 2\Phi_\eta'[x', \mu(x', \beta)v, \alpha]\mu(x', \beta)\, dx', \qquad \theta(x) = 2\Phi_\eta'[x, \mu(x, \beta)v, \alpha]\omega(x)$$

В силу второго соотношения (1.2) $z(x, \beta) = 0$ при $x \in [0, x_1]$, $z(x, \beta) > 0$ при $x > x_1$, а значит, $v(x, 1) = v(x, 0)$ при $x \in [0, x_1]$, $v(x, 1) > v(x, 0)$ при $x > x_1$, т. е.

$$\begin{aligned} &v(x, u_2, \alpha) \equiv v(x, u_1, \alpha) \quad \text{при } x \in [0, x_1] \\ &v(x, u_2, \alpha) > v(x, u_1, \alpha) \quad \text{при } x \in (x_1, s_1] \end{aligned} \tag{2.2}$$

а следовательно, $s_2 > s_1$. Последнее неравенство запишем в символическом виде

$$u_2 \leqslant u_1 \mapsto S(u_2, \alpha) > S(u_1, \alpha) \tag{2.3}$$

Таким образом, $\max_{u\in U} S_\alpha(u) = s_M$ достигается при $u(x) \equiv 0$. В дальнейшем будем полагать, что $\xi_1 = s_M < \xi_0$. Для каждого допустимого управления $u(x)$, параметра $\alpha \in A$ и $x^* \in [0, \xi_1]$ определим функционал

$$P(x^*, u, \alpha) = \begin{cases} \Phi[x^*, u(x^*)v(x^*, u, \alpha), \alpha], & x^* \in [0, S(u, \alpha)] \\ 0, & x^* \in (S(u, \alpha), \xi_1] \end{cases}$$

Для любого фиксированного $u \in U$ функционал $P(x^*, u, \alpha)$ представляет собой кусочно-непрерывную функцию от x^*. Отметим также, что значения функционала $P(x^*, u, \alpha)$ при $x^* < x_0^*$ не зависят от значений $u(x)$ при $x > x_0^*$. Исследуем поведение функционала $P(x^*, u, \alpha)$ в окрестности точки x_1^* при изменении $u(x)$. Зафиксируем $\alpha \in A$ и $u_* \in U$. Пусть управление $u_*(x)$ таково, что в некоторой правой окрестности точки $x_1^* \in [0, S(u_*, \alpha))$ выполняется $0 < u_*(x) < u_+$. Зададим u_v, $\omega \in U$ такие, что $u_v(x) = u_*(x) + \omega(x)$, причем $\omega(x) \equiv 0$ $\forall x \in (0, x_1^*)$, $\omega(x) \neq 0$ в правой окрестности точки x_1^*. Покажем, что существует правая окрестность точки x_1^*, в которой

$$P(x^*, u_v, \alpha) > P(x^*, u_*, \alpha) \tag{2.4}$$

Исследуем сначала случай, когда $\omega(x)$ терпит разрыв первого рода в точке x_1^*. В силу непрерывности функции $v(x, u, \alpha)$ по x получим неравенство $u_v(x) v(x, u_v, \alpha) > u_*(x) v(x, u_*, \alpha)$, справедливое в некоторой правой окрестности точки x_1^*, следовательно, с учетом второго соотношения (1.2) справедливо и неравенство (2.4). Рассмотрим далее случай, когда **$\omega(x)$ непрерывна** в точке x_1^*. Выберем правую окрестность точки x_1^*, в которой $u_*(x)$, $\omega(x)$ непрерывны и дифференцируемы. В дальнейшем будем проводить исследование, не выходя за пределы этой окрестности, обозначаемой $\varkappa_0$. Произведем в уравнении (2.1) замену $W = uv$, в новых переменных получим

$$dW/dx = Wu'/u - 2u[\Phi(x, W, \alpha) - b], \quad W(x_1^*) = W^* \tag{2.5}$$

где $u' = du/dx$, а $W^* = u_*(x_1^*) v(x_1^*, u_*, \alpha)$. Обозначим $W_*(x)$ и $W_v(x)$ решения уравнения (2.5), соответствующие $u_*(x)$ и $u_V(x)$. Сравним между собой выражения, стоящие в правой части (2.5) при $u = u_*(x)$ и $u = u_V(x)$, полагая $W = W_V(x)$. Составим разность

$$\Delta(x) = W_v(x)\left[\frac{u_V'(x)}{u_v(x)} - \frac{u_*'(x)}{u_*(x)}\right] - 2\{\Phi[x, W_v(x), \alpha] - b\}\omega(x).$$

После преобразований получим

$$\Delta(x) = \{\omega'(x)\gamma(x) - \omega(x)\nu(x)\}/[u_*(x) u_v(x)], \text{ где } \gamma(x) = \\ = u_*(x) W_v(x), \quad \nu(x) = 2u_v(x) u_*(x)\{\Phi[x, W_v(x), \alpha] - b\}.$$

Так как $\omega(x_1^*) = 0$, а $\omega(x) > 0$ при $x > x_1^*$, то $\Omega_1 = \lim_{x \to x_1^* + 0} \omega'(x) \geqslant 0$. Если $\Omega_1 > 0$, то в силу $\omega(x_1^*) = 0$ существует правая окрестность точки x_1^*, лежащая в $\varkappa_0$, в которой $\Delta(x) > 0$. Если $\Omega_1 = 0$, то $\omega(x)$ можно представить в виде $\omega(x) = (x - x_1^*)^m f(x)$, причем $f(x_1^*) > 0$. Рассматривая разность $\omega'(x)\gamma(x) - \omega(x)\nu(x) = (x - x_1^*)^{m-1}\{mf(x)\gamma(x) + (x - x_1^*)[f'(x)\gamma(x) - f(x)\nu(x)]\}$, также устанавливаем существование правой окрестности точки x_1^*, в которой $\Delta(x) > 0$. Следовательно, по теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [3] в правой окрестности точки x_1^* справедливо неравенство $W_v(x) > W_*(x)$ и с учетом второго соотношения (1.2) $\Phi[x, W_v(x), \alpha] > \Phi[x, W_*(x), \alpha]$. Таким образом (2.4) доказано.

Покажем далее, что в правой окрестности точки $x_1^* < S_\alpha(u_*)$ справедливо неравенство

$$\max_{\alpha \in A} P(x^*, u_v, \alpha) > \max_{\alpha \in A} P(x^*, u_*, \alpha) \tag{2.6}$$

Если $x_1^* < x_m^* = \min_{\alpha \in A} S(u_*, \alpha)$, то для всех $\alpha \in A$ справедливо (2.4), а следовательно, и (2.6). Пусть $x_1^* \geqslant x_m^*$, тогда в A можно выделить непересекающиеся множества $a_1(x_1^*) \cup a_2(x_1^*) = A$, где $a_1(x_1^*)$ — множество параметров α, для которых $x_1^* \geqslant S(u_*, \alpha)$, $a_2(x_1^*)$ — множество параметров α, для которых $x_1^* < S(u_*, \alpha)$. Для всех $\alpha \in a_1(x_1^*)$ $P(x^*, u_*, \alpha) = P(x^*, u_v, \alpha) = 0$ при $x^* > x_1^*$, а для всех $\alpha \in a_2(x_1^*)$ в правой окрестности точки x_1^* $P(x^*, u_*, \alpha) = \Phi[x^*, u_*(x^*) v(x^*, u_*, \alpha), \alpha] > 0$, $P(x^*, u_v, \alpha) = \Phi[x^*, u_v(x^*) \times v(x^*, u_v, \alpha), \alpha] > 0$. Поскольку для всех $\alpha \in a_2(x_1^*)$ справедливо (2.4), то $\max_{\alpha \in A} P(x^*, u_v, \alpha) = \max_{\alpha \in a_2(x_1^*)} P(x^*, u_v, \alpha) > \max_{\alpha \in a_2(x_1^*)} P(x^*, u_*, \alpha) = \max_{\alpha \in A} P(x^*, u_*, \alpha)$. Неравенство (2.6) доказано.

Рассмотрим функциональное неравенство $\max_{\alpha\in A}P(x^*, u, \alpha)\leqslant G_0$ $\forall x^*\in[0, \xi_1]$. Предположим, что среди всевозможных решений этого неравенства имеется $u_P\in U$ такое, что

$$u_P(x)=u_+ \quad \forall x\in X_1\subset[0, s_P{}^0], \quad u_P(x)\leqslant u_+ \quad \forall x\in X_2\equiv[0, s_P{}^0]\setminus X_1 \qquad (2.7)$$

$$X_1=\{x^* : \max_{\alpha\in A}P(x^*, u_P, \alpha)<G_0\}, \quad X_2=\{x^* : \max_{\alpha\in A}P(x^*, u_P, \alpha)= =G_0\}, \quad s_P{}^0=S_\alpha(u_P).$$

Заметим, что $G_\alpha(u_P)$ и $S_\alpha(u_P)$ не зависят от значений $u_P(x)$ при $x>s_P{}^0$, поэтому в дальнейшем для определенности будем полагать $u_P(x)=u_P(s_P{}^0)$ при $x\in(s_P{}^0, \xi_1]$.

Утверждение 1. Для того, чтобы управление $u^0\in U$ являлось решением задачи 1, необходимо и достаточно $u^0(x)=u_P(x)$ при $x\in[0, s_P{}^0]\equiv X_P$.

Доказательство. Докажем сначала достаточное условие. Пусть $u^0(x)= =u_P(x)$, следует доказать, что $u^0(x)$ решение задачи 1. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует $u^*\in U$, отличное от $u^0(x)$ на X_P, для которого $G_\alpha(u^*)\leqslant G_0$, $s^*<s^0$, где $s^0=S_\alpha(u^0)$, $s^*=S_\alpha(u^*)$. Отметим, что если $u^*(x)\leqslant u^0(x)$ на X_P, то в силу (2.3) сразу получим $s^*>s^0$. Значит, существует точка $x_1\in[0, s^0)$ такая, что $u^*(x_1)>u^0(x_1)$. Если $x_1=0$, то из (2.7) следует $\max_{\alpha\in A}P(0, u^0, \alpha)=G_0$ (если $u^0(0)=u_+$, то $u^*(0)>u_+$), но тогда в силу (2.6) получим $\max_{\alpha\in A}P(0, u^*, \alpha)>G_0$, т. е. $G_\alpha(u^*)>G_0$, а значит, $x_1\neq0$. Предположим далее, что $u^*(x)\leqslant u^0(x)$ при $x\in[0, x_0]$ и $u^*(x)>u^0(x)$ при $x\in(x_0, x_0')$, т. е. $x_1\in(x_0, x_0')$. В указанном случае можно выделить два варианта: $u^*(x)\equiv u^0(x)$, $u^*(x)\not\equiv u^0(x)$ при $x\in[0, x_0]$. Рассмотрим первый из вариантов. Поскольку $u^*(x)>u^0(x)$, то равенство $u^0(x)=u_+$ при $x\in(x_0, x_0')$ невозможно (в противном случае $u^*\notin U$), а значит, согласно (2.7) $\max_{\alpha\in A}P(x^*, u^0, \alpha)=G_0$ при $x^*\in(x_0, x_0')$, откуда в силу (2.6) получим $\max_{\alpha\in A}P(x^*, u^*, \alpha)>G_0$ при $x^*>x_0$, т. е. $G_\alpha(u^*)>G_0$. Следовательно, первый вариант невозможен. Рассмотрим второй вариант. В силу (2.2) и непрерывности $v(x, u, \alpha)$ по x, в точке x_0 и ее правой окрестности справедливо неравенство $v(x, u^*, \alpha)>v(x, u^0, \alpha)$ для всех $\alpha\in a_2(x_0)$ (т. е. для всех α, удовлетворяющих $x_0<S(u^0, \alpha)$). Как и в первом варианте $u^0(x)\neq u_+$ при $x\in(x_0, x_0')$, а следовательно, согласно (2.7) $\max_{\alpha\in A}P(x^*, u^0, \alpha)=G_0$ при $x^*\in(x_0, x_0')$. С учетом второго соотношения (1.2) в правой окрестности x_0 справедливо $P(x^*, u^*, \alpha)>P(x^*, u^0, \alpha)$ для $\alpha\in a_2(x_0)$, откуда получаем противоречие $G_\alpha(u^*)>G_0$. Таким образом второй вариант также невозможен, как и первый. Итак, если $u^*\in U$ и $G_\alpha(u^*)\leqslant G_0$, то $u^*(x)\leqslant u^0(x)$ при $x\in X_P$, следовательно, $u^0(x)$ решение задачи I.

Докажем необходимое условие утверждения 1. Пусть $u^0(x)$ оптимальное управление, покажем, что $u^0(x)=u_P(x)$ при $x\in X_P$. Доказательство также проведем от противного. Предположим, что в точке $x_1<S_\alpha(u^0)$ $u^0(x_1)\neq u_P(x_1)$. Если $u^0(x_1)>u_P(x_1)$, то существует отрезок $[x_0, x_0']$, содержащих x_1, в любой точке которого $u^0(x)>u_P(x)$. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве достаточного условия, придем к противоречию $G_\alpha(u^0)>G_0$. Следовательно, $u^0(x)\leqslant u_P(x)$ при $x\in X_P$. Однако, если $u^0(x)\not\equiv u_P(x)$ то согласно (2.3) придем к противоречию $S_\alpha(u^0)>S_\alpha(u_P)$. Таким образом $u^0(x)\equiv u_P(x)$ при $x\in X_P$. Утверждение 1 доказано.

Обозначим $G^+=G_\alpha(u^+)$, где $u^+(x)\equiv u_+$. Согласно (2.3) для всех $G_0\geqslant G^+$ решение задачи 1 есть $u^0(x)\equiv u^+(x)$. Проанализируем изменение $s^0= =S_\alpha(u^0)$ в зависимости от $G_0<G^+$, т. е. исследуем функцию $s^0=s^0(G_0)$.

Утверждение 2. Пусть оптимальное управление $u_1{}^0(x)$ отвечает ограничению $G_0=G_0'<G^+$, а оптимальное управление $u_2{}^0(x)$ – $G_0=G_0''<G_0'$, тогда $s^0(G_0')<s^0(G_0'')$.

Доказательство. Предположим $s^0(G_0')>s^0(G_0'')$. Данное неравенство согласно (2.3) возможно лишь в том случае, если существует $x_1\in[0, s^0(G_0''))$, в которой $u_1{}^0(x_1)<u_2{}^0(x_1)$. Если $u_1{}^0(x_1)<u_2{}^0(x_1)$, то повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве утверждения 1, получим $G_\alpha(u_2{}^0)>G_0'>G_0''$. Данное противоречие означает, что, по крайней мере, $s^0(G_0')\leqslant s^0(G_0'')$ и $u_1{}^0(x)\geqslant u_2{}^0(x)$ при $x\in[0, s^0(G_0')]$. Таким образом равенство $s^0(G_0')=s^0(G_0'')$ возможно лишь в случае $u_1^0(x)\equiv u_2^0(x)$. Поскольку $G_0'<G^+$, то $u_1^0(x)\neq u_+$, а значит, согласно (2.7) $G_\alpha(u_1^0)=G_0'$ и опять получаем противоречие $G_\alpha(u_2^0)=G_0'>>G_0''$. Следовательно, $s^0(G_0')<s^0(G_0'')$. Утверждение 2 доказано.

Следует отметить, что вопрос практического определения $u_P(x)$ в соответствии с (2.7) представляет собой весьма непростую задачу, не допускающую аналитического решения даже для наиболее простых зависимостей $\Phi(x, \eta, \alpha)$. Поэтому представляется целесообразным на основе утверждений 1, 2 попытаться построить приближенное решение задач 1, 2.

3. Выберем на отрезке $[\alpha_-, \alpha_+]$ n различных значений параметра α. Определим множество $A_n=\{\alpha_i, i\in[1, n]\}$, где $\alpha_-\leqslant\alpha_1<\alpha_2\ldots<\alpha_i\ldots<\alpha_n\leqslant\leqslant\alpha_+$. Сформулируем следующие задачи: найти управление $u_n^a\in U$ такое, что

$$\min_{u\in U}S_n(u)=S_n(u_n^a),\quad G_n(u_n^a)\leqslant G_0\ \text{(задача 1')}$$
$$\min_{u\in U}G_n(u)=G_n(u_n^a),\quad S_n(u_n^a)\leqslant S_0\ \text{(задача 2')}$$
$$S_n(u)=\max_{\alpha_i\in A_n}S(u,\alpha_i),\qquad G_n(u)=\max_{\alpha_i\in A_n}G(u,\alpha_i)$$

Построим алгоритм решения задачи 1'. Рассмотрим уравнение $\Phi(x, \eta, \alpha)=G_0$. В силу второго и четвертого соотношений (1.2) это уравнение однозначно разрешимо относительно $\eta=\eta_0(x, \alpha_i)\geqslant0$ при тех x и α_i, для которых $\Phi(x, 0, \alpha_i)\leqslant G_0$, при этом функция $\eta_0(x, \alpha_i)$ является монотонно убывающей по x. Определим

$$\Phi_+=\max_{\alpha_i\in A_n}\Phi(0,u_+U_0,\alpha_i),\qquad \Phi_0=\max_{\alpha_i\in A_n}\Phi(0,0,\alpha_i)$$

Если $\Phi_0\geqslant G_0$, то с учетом третьего соотношения (1.2) $G_n(u)>G_0$ для всех $u\in U$ и задача 1' не имеет решения. Пусть $\Phi_0<G_0$. В соответствии с утверждением 1 построим кусок оптимального управления в малой правой окрестности, обозначаемой $\varkappa_0$, точки $x^*=0$. Предположим сначала, что $\Phi_+>G_0$, определим $\eta_m=\min_{\alpha_i\in A_n}\eta_0(0, \alpha_i)$ и множество номеров 1, для которых $\eta_m=\eta_0(0, \alpha_i)$. Покажем, что обязательно найдется номер $k\in I$ и функция $u_0^c(x)$, совпадающая при $x\in\varkappa_0$ с искомым оптимальным управлением $u_n^a(x)$, для которых при $x^*\in\varkappa_0$ справедливо

$$P(x^*, u_0^c, \alpha_k)=G_0,\quad P(x^*, u_0^c, \alpha_i)\leqslant G_0$$
$$0\leqslant u_0^c(x^*)\leqslant u_+ \tag{3.1}$$

Возьмем произвольный номер $j\in I$ и, заменяя в уравнении (2.1) $\Phi(x, uv, \alpha_j)$ на G_0, найдем $v(x, u_0, \alpha_j)=v_0-2(G_0-b)x$, где $u_0(x)=\eta_0(x, \alpha_j)/ /[v_0-2(G_0-b)x]$. Из неравенства $\Phi_0<\Phi[0, \eta_0(0, \alpha_j), \alpha_j]<\Phi_+$ следует $0<u_0(0)<u_+$, а значит, в силу непрерывности $u_0(x)$ справедливо $0<u_0(x)<<u_+$ при $x\in\varkappa_0$. Исследуем поведение $P(x^*, u_0, \alpha_i)$ при $x^*\in\varkappa_0$. Для всех $i\in[1, n]\setminus I$ из $\Phi[0, \eta_0(0, \alpha_j), \alpha_i]<\Phi[0, \eta_0(0, \alpha_i), \alpha_i]=G_0$ следует $P(x^*, u_0, \alpha_i)<G_0$. Для $i\in I$ возможны два случая: $P(x^*, u_0, \alpha_i)\leqslant G_0$; найдется номер $p\in I$, для которого $P(x^*, u_0, \alpha_p)>G_0$. В первом случае, очевидно, искомый номер $k=j$, а $u_0^c(x)=u_0(x)$. Во втором случае аналогично $u_0(x)$ определим $u_1(x)=\eta_0(x, \alpha_p)/[v_0-2(G_0-b)x]$. Поскольку $P(x^*, u_0, \alpha_p)>G_0$, $P(x^*, u_1, \alpha_p)=G_0$, $u_0(0)=u_1(0)=\eta_m/v_0$, то при $x\in\varkappa_0$ должно выполняться неравенство $u_1(x)<u_0(x)$ (в противном случае в (2.4) было бы $P(x^*, u_0, \alpha_p)<P(x^*, u_1, \alpha_p)=G_0$) и, следовательно, согласно (2.4) $P(x^*, u_0, \alpha_i)>P(x^*, u_1, \alpha_i)$ для всех $i\in[1, n]$. Таким образом неравенство $P(x^*, u_1, \alpha_i)<G_0$ удовлетворяется, по крайней мере, для тех же номеров i, для которых справедливо $P(x^*, u_0, \alpha_i)<G_0$, а также и для $i=j$. Продолжая подобную процедуру и, следовательно, каждый раз уменьшая число номеров из I, для которых $P(x^*, u, \alpha_i)>G_0$, придем за конечное число шагов к искомому номеру k и $u_0^c(x)=\eta_0(x, \alpha_k)/[v_0-2(G_0-b)x]$, удовлетворяющих (3.1). Отметим, что функция $u_0^c(x)$ при $x<v_0/[2(G_0-b)]$ является непрерывной. Распространяя управление $u_0^c(x)$ за пределы $\varkappa_0$, будем иметь две противоположные ситуации: для всех $x^*\in[0, S(u_0^c, \alpha_k)]$ справедливо (3.1); найдется точка $x_1^*>0$, удовлетворяющая условию $v(x_1^*, u_0^c, \alpha_k)>0$, начиная с которой (3.1) нарушается. Пусть реализуется первая ситуация, тогда, если $S(u_0^c, d_i) \leqslant S(u_0^c, \alpha_k)$, то искомое решение $u_n^a(x)$ задачи 1′ есть $u_0^c(x)$, если же найдется номер r, для которого $v(x, u_0^c, \alpha_r) > 0$ при $x = S(u_0^c, \alpha_k)$, то продолжение управления при $x > S(u_0^c, \alpha_k)$ строится аналогично управлению в окрестности точки $x = 0$. Рассмотрим подробно вторую ситуацию. В точке x_1^* и ее малой окрестности $\varkappa_1 \ni x^*$ возможны следующие различные случаи: существуют номера $i \in I_1$, для которых $P(x_1^*, u_0^c, \alpha_i) = G_0$, $P(x^*, u_0^c, \alpha_i) > G_0$ (1); $u_0^c(x_1^*) = u_+$, $u_0^c(x^*) > u_+$ (2); $u_0^c(x_1^*) = 0$, $u_0^c(x^*) < 0$ (3). Возможны также еще два смешанных случая, соответствующие объединению (1), (2) и (1), (3). Рассмотрим последовательно каждый из случаев и построим продолжение оптимального управления при $x \in \varkappa_1$. При реализации случая (1), повторяя проведенные выше рассуждения, определим номер $m \in I_1$ и функцию $u_1^c(x) = \eta_0(x, \alpha_m)/[v(x_1^*, u_n^a, \alpha_m) - 2(G_0 - b)(x - x_1^*)]$ такие, что $P(x^*, u_n^a, \alpha_m) = G_0$, $P(x^*, u_n^a, \alpha_i) \leqslant G_0$, $0 \leqslant u_1^c(x^*) \leqslant u_+$ при $x^* \in \varkappa_1$, здесь

$$u_n^a(x) = \begin{cases} u_0^c(x), & x \in [0, x_1^*] \\ u_1^c(x), & x \in \varkappa_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Если реализуется случай (2), то

$$u_n^a(x) = \begin{cases} u_0^c(x), & x \in [0, x_1^*] \\ u_+, & x \in \varkappa_1 \end{cases} \tag{3.3}$$

В самом деле, поскольку $u_0^c(x) > u_+$ при $x \in \varkappa_1$, то согласно (2.4) $P(x^*, u_n^a, \alpha_i) < G_0$ при $x^* \in \varkappa_1$. Если реализуется случай (3), то $\Phi(x_1^*, 0, \alpha_k) = G_0$, $v(x_1^*, u_0^c, \alpha_k) > 0$ и с учетом третьего соотношения (1.2), а также (2.2) для любого $u \in U$, у которого $u(x) \leqslant u_0^c(x)$ при $x \in [0, x_1^*]$, будем иметь $P(x^*, u, \alpha_k) > G_0$ при $x^* \in \varkappa_1$. А для любого $u \in U$, у которого $u(x_1) > u_0^c(x_1)$ в некоторой точке $x_1 \in [0, x_1^*]$, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве утверждения I, обнаружим точки $x_2^* \leqslant x_1$, в которых $P(x_2^*, u, \alpha_k) > G_0$. Следовательно, при реализации случая (3) задача I′ не имеет решения. Пусть реализуется смешанный случай (1), (2), тогда если $u_1^c(x) \leqslant u_+$ при $x \in \varkappa_1$, то $u_n^a(x)$ соответствует (3.2), если же $u_1^c(x) > u_+$, то $u_n^a(x)$ соответствует (3.3). Смешанный случай (1), (3) в смысле окончательных выводов полностью совпадает с уже рассмотренным случаем (3). До сих пор предполагалось, что $\Phi_+ > G_0$. Пусть теперь $\Phi_+ \leqslant G_0$. При $\Phi_+ < G_0$ управление на первом этапе равно u_+. Далее либо при $u^+(x) \equiv u_+$ для всех $x^* \in [0, S_n(u^+)]$, $\alpha_i \in A_n$ справедливо $P(x^*, u^+, \alpha_i) \leqslant G_0$ и тогда $u_n^a(x) \equiv u_+$, либо существует точка x_1^*, в окрестности которой нарушается условие $P(x^*, u^+, \alpha_i) \leqslant G_0$ и приходим к рассмотренной ранее ситуации. При $\Phi_+ = G_0$ построение управления в окрестности точки $x^* = 0$ проводится аналогично смешанному случаю (1), (2). Итак, следуя указанному алгоритму, можно не только построить оптимальное управление, но и обнаружить отсутствие решения задачи 1′ в классе U.

Исследуем подробнее вопрос существования решения задачи 1′.

Утверждение 3. Если решение задачи 1′ существует при $G_0 = G_0'$, то оно существует и при $G_0 = G_0'' > G_0'$.

Доказательство. Из приведенного алгоритма следует, что задача 1′ не имеет решения в двух случаях: либо $\Phi_0 > G_0$, либо существуют α_i и x_1, для которых $u_n^a(x_1) = 0$, а $v(x_1, u_n^a, \alpha_i) > 0$. Предположим, что задача 1′ при $G_0 = G_0''$ не имеет решения. Если $\Phi_0 \geqslant G_0''$, то $\Phi_0 > G_0'$, откуда получаем противоречие — задача 1′ при $G_0 = G_0'$ не имеет решения. Следовательно, $\Phi_0 < G_0''$. Предположим далее, что $u_{n2}^a(x_1) = 0$, $v(x, u_{n2}^a, \alpha_i) > 0$, где кусок управления $u_{n2}^a(x)$ отвечает $G_0 = G_0''$. Если решение $u_{n1}^a(x)$ для $G_0 = G_0'$ удовлетворяет условию $u_{n1}^a(x) \leqslant u_{n2}^a(x)$ при $x < x_1$, то получаем $u_{n1}^a(x_1) = 0$, $v(x_1, u_{n1}^a, \alpha_i) > 0$ — противоречие. Если же существует точка $x_2 < x_1$, в которой $u_{n1}^a(x_2) > u_{n2}^a(x_2)$, то, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве утверждения 1, получим либо $u_{n1}^a(x_2) > u_+$, либо $G_n(u_{n1}^a) > G_0'' > G_0'$. Последнее противоречие и доказывает утверждение 3.

Утверждение 4. Если решение задачи 1′ не существует при $G_0 = G_0'$, то оно не существует и при $G = G_0''' < G_0'$.

Доказательство. Предположим противное: решение задачи 1′ существует при $G_0=G_0'''$, тогда согласно утверждению 3 оно существует и при $G_0=G_0'>G_0'''$. Полученное противоречие и доказывает утверждение 4.

При $G_0=0$ в силу первого соотношения (1.2) задача I' не имеет решения. При $G_0\geqslant G^+$ решением является $u_n^a(x)=u^+(x)\equiv u_+$. Согласно утверждениям 3, 4 существует $G_n^-\in(0, G^+)$ такое, что при $G_0\geqslant G_n^-$ задача 1' имеет решение, а при $G_0<G_n^-$ решения нет. Обозначим $G_n^+=G_n(u^+)$, при этом $G_n^+\leqslant G^+$, поскольку $G_n(u)\leqslant G_\alpha(u)$ для любого $u\in U$. Следует отметить, что G_n^-, G_n^+ зависят от выбора множества A_n. Для заданного A_n определим функцию $s_n^0=s_n^0(G_0)$, где $s_n^0=S_n(u_n^a)$. Исследуем функцию $s_n^0(G_0)$. Она определена при $G_0\in[G_n^-, \infty)$, причем согласно утверждению 2 является монотонно убывающей при $G_0\in[G_n^-, G_n^+]$ и постоянной $s_n^0(G_0)=$ $=s_n^0(G_n^+)$ при $G_0>G_n^+$. С учетом непрерывности функции $\Phi(x, \eta, \alpha)$, а также результатов [4] можно показать непрерывность функционалов $G_n(u)$ и $S_n(u)$ на U. Следовательно, непрерывна и функция $s_n^0(G_0)$ при $G_0\in[G_n^-, \infty)$. Согласно теореме, доказанной в [2], решение задачи 2' для всех $S_0\in[s_n^0(G_n^+), s_n^0(G_n^-)]$ получается как решение задачи 1', отвечающее G_0, причем $S_0=s_n^0(G_0)$. При всех $S_0>s_n^0(G_n^-)$ решение задачи 2' соответствует решению задачи 1' с $G_0=G_n^-$, а при $S_0<s_n^0(G_n^+)$ задача 2' не имеет решения.

Выясним соотношение между задачами 1, 1' и задачами 2, 2'. В силу непрерывной зависимости решения (2.1) от параметра α для любого малого ε можно найти такое A_n, которому соответствует $u_n^a(x)=u_+$ при $x\in X_1^\varepsilon\subset[0, s_\varepsilon^0]$, $u_n^a(x)\leqslant u_+$ при $x\in X_2^\varepsilon\subset[0, s_\varepsilon^0]\setminus X_1^\varepsilon$, где $X_1^\varepsilon=$ $=\{x^*: \max_{\alpha\in A}P(x^*, u_n^a, \alpha)<G_0+\varepsilon\}$, $X_2^\varepsilon=\{x^*: |\max_{\alpha\in A}P(x^*, u_n^a, \alpha)-G_0|\leqslant$ $\leqslant\varepsilon\}$, $s_\varepsilon^0=S_\alpha(u_n^a)$, причем $0\leqslant s_\varepsilon^0-s_n^0<\varepsilon$. Если для выбранного множества A_n задача 1' не имеет решения, то и задача 1 также не имеет решения. Таким образом управление $u_n^a\in U$ можно рассматривать как приближенное решение задачи 1. Аналогичные соображения имеют место и в отношении задач 2, 2'.

4. Проведем некоторые обобщения полученных результатов. Пусть система (2.1) наряду с α имеет еще несколько неопределенных параметров, изменяющихся в заданных пределах. Так, например, при откате подвижных частей орудия после выстрела, показатели качества амортизации зависят от угла возвышения φ. Характеристика амортизатора на прямом ходу имеет вид $\Phi(x, ux^{\cdot 2}, \alpha)=\alpha ux^{\cdot 2}+\nu\cos\varphi+f(x)$, где $\alpha ux^{\cdot 2}$ и $\nu\cos\varphi$ связаны с вязким и сухим трением, а $f(x)$ — с нелинейной возвращающей силой. Кроме того $b=g\sin\varphi$, где g — ускорение свободного падения. Полагая угол φ неопределенным, изменяющимся в пределах $[\varphi_-, \varphi_+]$ будем иметь оптимизационные задачи с двумя неопределенными параметрами. В общем случае, если показатели качества амортизации зависят от N неопределенных параметров $\{\alpha^i, i\in[1, N]\}$, которые могут изменяться на множестве D, определенном системой неравенств $\psi_j(\alpha^1, \ldots \alpha^i \ldots, \alpha^N)\leqslant 0$, $j\in[1, k]$, $k\leqslant N$, то постановка задач оптимизации аналогична задачам 1, 2 с той разницей, что операция $\max_{\alpha\in A}$ заменяется на $\max_{\alpha^i\in D}$. Используя полученные результаты, можно построить приближенное решение указанных задач, выбирая подобно A_n дискретное множество $D_n\subset D$.

Другое возможное обобщение связано с отказом от предположения $\sigma(t)=J_0\delta(t)$. Используя условие прямого хода $x^\cdot>0$, запишем уравнение (1.1) в виде системы

$$dv/dx=-2\Phi(x, uv, \alpha)+2b+2\sigma(t), \quad dt/dx=1/v^{1/2} \tag{4.1}$$

При $v(0)=0$ данная система имеет особенность. Избавимся от этой особенности. Проинтегрируем уравнение (1.1) на достаточно малом промежутке времени, полагая $u(x)=u_+$, при этом получим $x=x(t, \alpha)$. Зададим малое значение x_0 и определим $t_0(x_0, \alpha)$ из уравнения $x_0=x(t, \alpha)$ и $J_0^1(x_0, \alpha)=x^\cdot[t_0(x_0, \alpha), \alpha]$. В дальнейшем будем рассматривать систему (4.1) с начальными условиями $v(x_0)=[J_0^1(x_0, \alpha)]^2$, $t(x_0)=t_0(x_0, \alpha)$. Если $\Phi_0<G_0$, то, задавая x_0 достаточно малым, при $u(x)=u_+$ можно добиться выполнения неравенства

$$\max_{\alpha\in A}\Phi[x, u_+v(x, u, \alpha), \alpha]<G_0 \quad \forall x\in[0, x_0)$$

Следуя доказательству неравенства (2.4), можно показать, что оно справедливо и в случае, когда внешнее воздействие отлично от дельта-функции. Анализируя систему (4.1), устанавливаем, что если $\sigma(t)$ представляет из себя непрерывную невозрастающую функцию, то справедливы соотношения (2.2) и (2.3). Таким образом для получения приближенного решения оптимизационных задач в данном случае можно воспользоваться указанным выше алгоритмом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике/Справочник. Т. 6. М.: Машиностроение, 1981. 456 с.
2. *Болотник Н. Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
3. *Белых В. Н.* Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем/Учебное пособие. Изд. ГГУ. Горький, 1980. 98 с.
4. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.

Горький

Поступила в редакцию 27.IV.1988