МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1989

УДК 531.36

В. В. КОЗЛОВ

ОБ УДАРЕ С ТРЕНИЕМ

При ударе с трением изменяется не только нормальная составляющая скорости системы, но и ее касательная составляющая (см. [1, 2]). В теории удара с трением обычно используются две гипотезы. В случае сухого ударного трения принимается, что касательная составляющая ударного импульса пропорциональна его нормальной составляющей. Этот случай исследован в [1–3]. Если ударное трение является вязким, то касательные составляющие скорости до и после удара связаны некоторым линейным соотношением (см., например, [4]). В публикуемой работе дано инвариантное описание основных соотношений теории удара с вязким трением, найдено обобщение теоремы Карно. Указан физический способ реализации удара с трением, основанный на введении поля упругих и диссипативных сил с большими коэффициентами жесткости и трения. С помощью предельного перехода в решениях полных уравнений движения получено выражение оператора восстановления через характеристики механической системы и введенных силовых полей.

1. Удар с вязким трением. Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы, на которую наложена односторонняя связь $f(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 0$. Граничная поверхность $\Sigma=\{x\colon f(x)=0\}$ предполагается регулярной ($df\neq 0$ в точках, где $f=0$). Пусть

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)x_i^{\boldsymbol{\cdot}}x_j^{\boldsymbol{\cdot}}$$

кинетическая энергия системы; $F_1(x^{\boldsymbol{\cdot}},\ x,\ t),\ldots,F_n(x^{\boldsymbol{\cdot}},\ x,\ t)$ — обобщенные силы. В области $f>0$ движение описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{\boldsymbol{\cdot}}}-\frac{\partial T}{\partial x_i}=F_i\qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

Пусть $x(t)$ — решение этой системы, такое, что $f(x(t))>0$ при $t<0$, $f(x(0))=0$ и $f^{\boldsymbol{\cdot}}(x(t))<0$ при $t=0$. Следовательно, в момент времени $t=0$ имеет место явление удара. Продолжение решения $x(t)$ для положительных значений t существенно зависит от принимаемой гипотезы о характере ударного взаимодействия. Приведем инвариантную формулировку математической модели удара с трением.

Пусть $\mathbf{v}=(x_1^{\boldsymbol{\cdot}},\ldots,x_n^{\boldsymbol{\cdot}})$ — скорость точки $x(t)$ в момент удара. Введем скалярное произведение, задаваемое кинетической энергией в точке $x_0=x(0)$:

$$(\xi,\eta)=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_0)\,\xi_i\eta_j \tag{1.2}$$

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к Σ в точке x_0 (в метрике (1.2)). Разложим скорость на касательную и нормальную составляющие: $\mathbf{v}=\mathbf{v}_\tau+\mathbf{v}_n$, где $\mathbf{v}_n=(\mathbf{v},\ \mathbf{n})\mathbf{n}$, $\mathbf{v}_\tau=\mathbf{v}-\mathbf{v}_n$. Пусть $\mathbf{v}'$ — скорость точки $x(t)$ после удара и $\mathbf{v}'=\mathbf{v}_\tau'+\mathbf{v}_n'$. Согласно гипотезе удара с трением, имеется симметричный оператор Λ (зависящий от точки $x_0\in\Sigma$), такой, что

$$\mathbf{v}'=\Lambda\mathbf{v},\quad \mathbf{v}_n'=\Lambda\mathbf{v}_n,\quad \mathbf{v}_\tau'=\Lambda\mathbf{v}_\tau \tag{1.3}$$

Так как после удара кинетическая энергия не увеличивается, то оператор Λ удовлетворяет неравенству

$$(\Lambda^2 \mathbf{v}, \mathbf{v}) \leqslant (\mathbf{v}, \mathbf{v}) \tag{1.4}$$

для всех $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — ортонормированный базис оператора Λ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения (все они вещественны). Из (1.4) вытекают неравенства для собственных значений: $|\lambda_i| \leqslant 1$. В силу (1.3) оператор Λ переводит касательную плоскость к Σ в точке x_0 в себя. Следовательно, одним из его собственных векторов является нормаль n; будем считать, что $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$. Так как после удара точка $x(t)$ будет двигаться в полупространстве $f \geqslant 0$, то векторы $\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}_n'$ направлены в разные стороны. Поэтому $\lambda_1 \leqslant 0$. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ естественно назвать коэффициентами восстановления, а оператор Λ — оператором восстановления. Если в касательной плоскости к Σ оператор Λ является тождественным, то получим известную гипотезу Ньютона о неупругом ударе.

Решая уравнения (1.1) с начальными данными $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = \mathbf{v}'$, получим закон движения системы при $t > 0$.

2. Неравенства Карно. Пусть $T' = (\mathbf{v}', \mathbf{v}')/2$ — кинетическая энергия системы после удара, $\Delta T = T - T'$ — потерянная кинетическая энергия. Полагая $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$, введем, следуя Карно, кинетическую энергию потерянных скоростей $T^* = (\mathbf{u}, \mathbf{u})/2$.

Положим $\varkappa = \max_{\lambda_i \neq 1} \lambda_i$, $\nu = \min \lambda_i$. Ясно, что $-1 \leqslant \nu \leqslant \varkappa < 1$.

Теорема 1. Справедливы неравенства

$$\frac{1+\nu}{1-\nu} T^* \leqslant \Delta T \leqslant \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} T^* \tag{2.1}$$

Если $\nu = \varkappa$, то неравенства (2.1) превращаются в равенство. Например, в условиях применимости гипотезы Ньютона $\lambda_1 = -e$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$, где $e \in [0, 1]$ — коэффициент восстановления. В этом случае $\nu = \varkappa = -e$ и неравенства (2.1) дают классическую теорему Карно

$$\Delta T = \frac{1-e}{1+e} T^* \tag{2.2}$$

Если положить $e = 0$, то формула (2.2) будет совпадать с теоремой Пифагора в пространстве $\mathbf{R}^n = \{\mathbf{v}\}$ с евклидовой метрикой (1.2). Неравенства (2.1) естественно назвать неравенствами Карно.

Доказательство. Положим $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{e}_i$. Тогда $\mathbf{v}' = \sum \lambda_i v_i \mathbf{e}_i$. В силу ортонормированности базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ будем иметь (знак суммы со штрихом означает, что в ней опущено слагаемое, содержащее $\lambda_i = 1$):

$$\Delta T = \sum (1-\lambda_i^2) \frac{v_i^2}{2} = \sum_i{}' \frac{1+\lambda_i}{1-\lambda_i} (1-\lambda_i)^2 \frac{v_i^2}{2}$$
$$T^* = \sum_i{}' (1-\lambda_i)^2 \frac{v_i^2}{2} \tag{2.3}$$

Так как функция $(1+x)/(1-x)$ монотонно возрастает в полуинтервале $[-1, +1]$, то для всех $\lambda_i \neq 1$.

$$0 \leqslant (1+\nu)/(1-\nu) \leqslant (1+\lambda_i)/(1-\lambda_i) \leqslant (1+\varkappa)/(1-\varkappa)$$

Для доказательства неравенств (2.1) осталось воспользоваться формулами (2.3).

3. Обоснование гипотезы удара с трением. Укажем некоторые возможности физической реализации теории удара с трением, основанные на выполнении предельного перехода в полных уравнениях движения. Заодно будут найдены условия и границы применимости основных соотношений теории удара. С этой целью освободим механическую систему от связи $f \geqslant 0$ и введем в области $f < 0$ дополнительные потенциальные и диссипативные силы. Положим

$$V_N=\begin{cases} 0, & f\geqslant 0 \\ cNf^2/2, & f<0 \end{cases} \quad (c=\mathrm{const}>0) \tag{3.1}$$

Потенциал V_N порождает в полупространстве $f<0$ «упругое» поле сил $-cNf\partial f/\partial x_i$, направленное к поверхности Σ. Силы вязкого трения определяются диссипативной функцией Релея — неотрицательной квадратичной формой

$$\Phi_N=kN^{1/2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,x_i^{\cdot}x_j^{\cdot} \qquad (k=\mathrm{const}\geqslant 0) \tag{3.2}$$

В формулах (3.1) и (3.2) присутствует безразмерный параметр N, который затем будет устремлен к бесконечности.

С диссипативной функцией (3.2) связана билинейная форма

$$\langle \xi, \eta\rangle=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\eta_j$$

Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n=\{\mathbf{v}\}$ (относительно метрики (1.2)), причем $\mathbf{e}_1$ совпадает с вектором нормали $\mathbf{n}$ к поверхности Σ, а $\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ лежат в касательной плоскости к Σ. Предположим, что

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i\rangle=0 \tag{3.3}$$

для всех $i\geqslant 2$. Это условие накладывает ограничение на вид диссипативной функции Φ_N.

В области $f\geqslant 0$ движение механической системы описывается уравнениями (1.1), а в области $f<0$ — уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial x_i}=F_i-\frac{\partial V_N}{\partial x_i}-\frac{\partial \Phi_N}{\partial x_i^{\cdot}} \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{3.4}$$

При заменах обобщенных координат обе части этой системы уравнений преобразуются по ковариантному закону.

Условимся (для краткости записи), что $x_0=0$; следовательно, $f(0)=0$. Рассмотрим решение системы (3.4) с начальными данными $x(0)=0$, $x^{\cdot}(0)=\mathbf{v}$, причем

$$\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_0 v_i<0 \tag{3.5}$$

При достаточно малых $t>0$ точка $x(t)$ заведомо попадет в область $f(x)<0$. Оказывается, в момент времени $t_N\sim N^{-1/2}$ точка $x(t)$ снова выйдет на поверхность Σ в точке, близкой к $x=0$, причем при $N\to\infty$ скорость в момент выхода $\mathbf{v}'$ линейно зависит от $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}'=\Lambda\mathbf{v}$) и собственные значения оператора восстановления Λ можно выразить через физические параметры задачи.

Рассмотрим ковектор $\mathbf{p}$ с координатами $p_i=\partial f/\partial x_i(0)$. Пусть $(\cdot,\cdot)_*$ — метрика в двойственном пространстве $\mathbf{R}^n=\{\mathbf{p}\}$, определяемая матрицей, обратной к $g_{ij}(0)$. Положим $|\mathbf{p}|_*^2=(\mathbf{p},\mathbf{p})_*$. Пусть $\nu_1,\ldots,\nu_n$ — корни характеристического уравнения $|a_{ij}(0)-\nu g_{ij}(0)|=0$ и $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ — соответствующие собственные векторы матрицы $\|a_{ij}(0)\|$ относительно матрицы $\|g_{ij}(0)\|$. В силу условия (3.3) одним из собственных векторов является вектор нормали $\mathbf{n}$ к Σ в точке $x=0$. Будем считать, что $\mathbf{e}_1=\mathbf{n}$.

Теорема 2. Предположим, что

$$c|\mathbf{p}|_*^2>k^2\nu_1^2 \tag{3.6}$$

Тогда: 1) в интервале времени $0<t<t_N$, $t_N=\pi N^{-1/2}\omega^{-1}+o(N^{-1/2})$, $\omega=$

$=(c|\mathbf{p}|_*^2-k^2\nu_1^2)^{1/2}$ функция $f(x(t))$ отрицательна и $x(t_N)\in\Sigma$; 2) существует

$$\lim_{N\to\infty}x^{\boldsymbol{\cdot}}(t_N)=\Lambda\mathbf{v} \tag{3.7}$$

где Λ — постоянный линейный симметричный оператор с собственными направлениями $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ и собственными значениями

$$\lambda_1=-\exp(-\pi k\nu_1/\omega),\quad \lambda_i=\exp(-2\pi k\nu_i/\omega)\quad (i\geqslant 2) \tag{3.8}$$

Левая часть соотношения (3.7) равна $\mathbf{v}'$ — скорости точки $x(t)$ после удара (см. п. 1). Таким образом, теорема дает физическое обоснование аксиоматической теории удара с трением. Если $k=0$ (диссипация отсутствует), то $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\ldots=\lambda_n=1$ и (3.7) является основным соотношением теории абсолютно упругого удара. При $c|\mathbf{p}|_*^2\leqslant k^2\nu_1^2$ не происходит отскока точки $x(t)$ от поверхности Σ; в этом случае удар будет абсолютно неупругим.

Доказательство. Введем полугеодезические координаты римановой метрики T. В этих переменных (снова обозначаемых $x_1,\ldots,x_n$) $f(x)\equiv x_1$ и $g_{1j}(x)\equiv 0$ для всех $j\geqslant 2$. В силу предположения (3.3) $a_{1j}(x)\equiv 0$, когда $j\geqslant 2$. Запишем уравнения (3.4) в полугеодезических координатах

$$\begin{gathered}g_{11}x_1^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+\sum_{k,l}\Psi_{kl}^1(x)x_k^{\boldsymbol{\cdot}}x_l^{\boldsymbol{\cdot}}=F_1-cNx_1-2kN^{1/2}a_{11}x_1^{\boldsymbol{\cdot}}\\ \sum_{j\geqslant 2}g_{ij}x_j^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+\sum_{k,l}\Psi_{kl}^i(x)x_k^{\boldsymbol{\cdot}}x_l^{\boldsymbol{\cdot}}=F_i-2kN^{1/2}\sum_{j\geqslant 2}a_{ij}x_j^{\boldsymbol{\cdot}}\quad (i\geqslant 2)\end{gathered} \tag{3.9}$$

Выполним замену времени $\tau=N^{1/2}t$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, получим: $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}=\varphi'N^{1/2}$, $\varphi^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=\varphi''N$. Вводя малый параметр $\varepsilon=N^{-1/2}$, перепишем уравнения (3.9):

$$\begin{gathered}g_{11}x_1''+2ka_{11}x_1'+cx_1=-\sum\Psi_{kl}^1x_k'x_l'+\varepsilon^2F_1\\ \sum_j g_{ij}x_j''+2k\sum_j a_{ij}x_j'=-\sum\Psi_{kl}^ix_k'x_l'+\varepsilon^2F_i\quad (i\geqslant 2)\end{gathered} \tag{3.10}$$

Выполним еще подстановку $x_i=\varepsilon z_i$ $(i=1,\ldots,n)$. В новых переменных z_i уравнения (3.10) примут следующий вид:

$$\begin{gathered}g_{11}{}^\circ z_1''+2ka_{11}{}^\circ z_1'+cz_1=\varepsilon\Theta_1(z,z',\tau,\varepsilon)\\ \sum_j g_{ij}{}^\circ z_j''+2k\sum_j a_{ij}{}^\circ z_j'=\varepsilon\Theta_i(z,z',\tau,\varepsilon)\quad (i\geqslant 2)\end{gathered} \tag{3.11}$$

где $g_{ij}{}^\circ=g_{ij}(0)$, $a_{ij}{}^\circ=a_{ij}(0)$, Θ_i — гладкие функции от $z_1,\ldots,z_n$, $z_1',\ldots,z_n'$, τ и ε. Так как в начальный момент нового времени $x_i(0)=0$, $x_i'(0)=\varepsilon x_i^{\boldsymbol{\cdot}}(0)=\varepsilon v_i$, то уравнения (3.11) надо решать с начальными данными

$$z_i(0)=0,\quad z_i'(0)=v_i \tag{3.12}$$

Теорема Пуанкаре о малом параметре гарантирует существование решений системы (3.11) в виде рядов по степеням малого параметра ε, причем решения невозмущенной линейной системы

$$g_{11}{}^\circ z_1''+2ka_{11}{}^\circ z_1'+cz_1=0,\quad \Sigma g_{ij}{}^\circ z_j''+2k\Sigma a_{ij}{}^\circ z_j'=0\quad (i\geqslant 2) \tag{3.13}$$

аппроксимируют решение $z(\tau,\varepsilon)$ полной системы (3.11) с точностью до $O(\varepsilon)$ на любом фиксированном конечном промежутке времени.

4. Анализ линейной системы. В линейной системе (3.13) уравнения для переменных z_1 и $z_2,\ldots,z_n$ разделяются и их можно решать отдельно. Из (3.6) вытекает, что $cg_{11}{}^\circ-(ka_{11}{}^\circ)^2>0$. Кроме того, $v_1=|\mathbf{v}_n|$. Следовательно, искомое решение первого уравнения (3.13) имеет следующий вид:

$$z_1=|\mathbf{v}_n|\omega^{-1}e^{-\mu\tau}\sin\omega\tau,\quad \omega=[cg_{11}{}^\circ-(ka_{11}{}^\circ)^2]^{1/2}/g_{11}{}^\circ,\quad \mu=ka_{11}{}^\circ/g_{11}{}^\circ>0$$

Из этой формулы и теоремы Пуанкаре вытекает, что за время $t_N=\pi N^{-1/2}/\omega+o(N^{-1/2})$ точка $x(t)$ снова выйдет на поверхность Σ. Если $\mathbf{v}_n'$ —

нормальная составляющая скорости в момент выхода, то

$$\mathbf{v}_n'=\lim_{N\to\infty}\mathbf{v}_n'(t_N)=-\mathbf{v}_n\exp(-\pi\mu/\omega)$$

Следовательно, $\mathbf{v}_n'=\lambda_1\mathbf{v}_n$, $\lambda_1=-\exp(-\pi\mu/\omega)$, $-1\leqslant\lambda_1<0$.

Решим теперь уравнения для $z_2,\ldots,z_n$. Так как матрица $G=\|g_{ij}{}^0\|$ положительно определена, а матрица $A=\|a_{ij}{}^0\|$ симметрична, то линейной заменой переменных $(z_2,\ldots,z_n)\to(y_2,\ldots,y_n)$ матрица G приводится к единичной, а A — к диагональной $\mathrm{diag}\,[\mu_2,\ldots,\mu_n]$. Ясно, что μ_i являются корнями характеристического уравнения $|A-\mu G|=0$. Так как функция Релея Φ_N неотрицательна, то все $\mu_j\geqslant0$. В новых переменных y уравнения (3.13) разделяются: $y_i''+2k\mu_iy_i'=0$ $(i\geqslant2)$. Решая их с начальными условиями $y_i(0)=0$, $y_i'(0)=u_i$, получим

$$y_i=u_i(2k\mu_i)^{-1}[1-\exp(-2k\mu_i\tau)]\quad(i\geqslant2)$$

Следовательно, значение скорости y_i' в момент времени $\tau=\pi/\omega$ (когда координата z_1 снова обращается в нуль) равно $u_i\exp(-2\pi k\mu_i/\omega)$. Ясно, что числа $\lambda_i=\exp(-2\pi k\mu_i/\omega)$, $0<\lambda_i\leqslant1$ $(i\geqslant2)$ являются собственными числами ограничения оператора Λ на касательную плоскость к Σ в точке $x=0$. Теорема 2 доказана.

5. Биллиард в окружности с трением. Теорема 2 дает возможность исследования движения механических систем с ударами на больших интервалах времени с помощью дифференциальных уравнений. Для этого надо перейти к пределу при $N\to\infty$ в решениях уравнений (3.4). Поясним эту идею на примере эволюции движения точки по инерции внутри окружности в случае, когда коэффициенты восстановления ударов с трением близки к единице. Положим для простоты массу точки и радиус окружности равными единице. В соответствие с рассмотрениями п. 3 введем в области $x^2+y^2\geqslant1$ поле упругих сил с потенциалом $V_N=cN(x^2+y^2)/2$ ($c=$ $=\mathrm{const}>0$) и диссипативные силы с функцией Релея $\Phi_N=\varepsilon kN^{1/2}(av_\tau{}^2+bv_n{}^2)$, где $k=\mathrm{const}>0$, a, b — безразмерные положительные постоянные, $\varepsilon>0$ — малый параметр, v_n и v_τ — радиальная и касательная составляющие вектора скорости. При $\varepsilon=0$ будем иметь невозмущенную интегрируемую задачу с двумя степенями свободы — центральное движение материальной точки по плоскости. Ее первыми интегралами будут полная механическая энергия H и кинетический момент K точки относительно начала координат. Составим уравнения движения (1.1) и (3.4) и перейдем к переменным действие — угол невозмущенной задачи. Так как невозмущенная задача невырождена, то можно воспользоваться принципом усреднения и усреднить правые части возмущенных уравнений по обоим быстрым угловым переменным. При $N\to\infty$ усредненные уравнения медленных переменных H и K принимают следующий вид:

$$K^{\bullet}=-\varepsilon gaK,\quad H^{\bullet}=-\varepsilon g[(-a-b/2)K^2+bH]$$
$$g=2\pi kc^{-1/2}H(2H-K^2)^{-1/2}>0 \tag{5.1}$$

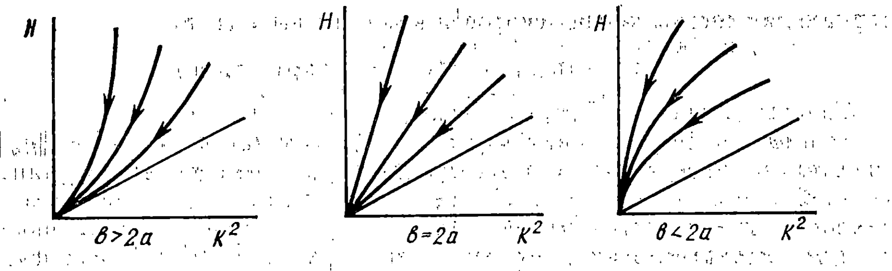
В переменных H, K^2 получим фазовый портрет линейной системы дифференциальных уравнений, у которой положение равновесия $H=K=0$ является устойчивым узлом (поскольку a, $b>0$).

Особенно просто система (5.1) выглядит в случае, когда $b=2a$: функция H/K^2 является ее первым интегралом. Этот факт эквивалентен постоянству угла отскока точки от границы биллиарда.

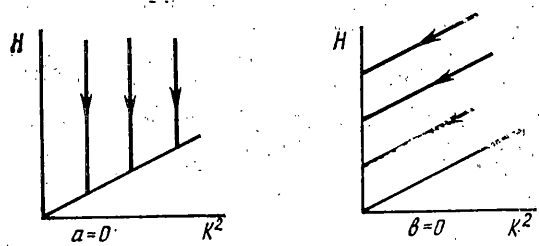
Коэффициенты восстановления можно выразить через параметры задачи с помощью формул (3.8). Действительно, для коэффициента восстановления по нормали λ_n имеем

$$\nu_n=b\varepsilon,\quad\omega=c^{1/2}+O(\varepsilon) \tag{5.2}$$

Из (3.8) и (5.2) получаем, что $\lambda_n=-1+\pi kbc^{-1/2}\varepsilon+o(\varepsilon)$. Для коэффициента восстановления по касательной получаем аналогичную формулу: $\lambda_\tau=1-2\pi kac^{-1/2}\varepsilon+o(\varepsilon)$. Если $b=2a$, то $\lambda_\tau=-\lambda_n+o(\varepsilon)$. В случае равенства $|\lambda_\tau|=|\lambda_n|$, очевидно, угол падения равен углу отражения.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фазовой плоскости переменных K^2, H движение может происходить в области $2H>K^2\geqslant 0$. Эта область инвариантна относительно фазового потока системы (5.1). Фазовые портреты изображены на фиг. 1. Все траектории входят в начало координат $K=H=0$. Если $b>2a$, то они касаются прямой $2H=K^2$, а при $b<2a$ – оси $K=0$.

На фиг. 2 изображены фазовые портреты системы (5.1) в вырожденных случаях, когда один из параметров a, b равен нулю. Если $a=0$, то через конечное время точка будет двигаться по окружности $x^2+y^2=1$ с постоянной скоростью. Если $b=0$, то точка будет асимптотически стремиться к движению по диаметру этой окружности.

6. Некоторые обобщения. В области $f\geqslant 0$ снова зададим потенциальное силовое поле с потенциалом (3.1) и дополнительные силы

$$\Phi_N^i=-2kN^{1/2}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)x_j^{\cdot} \quad (k=\mathrm{const};\ i=1,\ldots,n) \tag{6.1}$$

линейные по скоростям. Матрица $\|a_{ij}\|$ уже не предполагается симметричной. Силы (6.1) будем считать диссипативными: $\Sigma\Phi_N^i x_i^{\cdot}\leqslant 0$. Это условие, очевидно, эквивалентно неравенству

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}\geqslant 0$$

Если матрица $\|a_{ij}\|$ симметрична, то силы (6.1) можно задать с помощью функции Релея (3.2).

В области $f\geqslant 0$ движение системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial x_i}=F_i-\frac{\partial V_N}{\partial x_i}+\Phi_N^i \quad (i=1,\ldots,n) \tag{6.2}$$

Рассмотрим решение $x(t)$ системы (6.2) с начальными данными $x(0)=0$, $x^{\cdot}(0)=\mathrm{v}$, удовлетворяющими неравенству (3.5). Вводя полугеодезические координаты $x_1,\ldots,x_n$ ($f\equiv x_1$) и выполняя подстановки $t=\varepsilon\tau$, $x_i=\varepsilon z_i$ ($\varepsilon=N^{-1/2}$), получим систему уравнений, обобщающую (3.11):

$$\begin{gathered} g_{11}^{\circ}z_1''+2k\sum_j a_{1j}^{\circ}z_j'+cz_1=\varepsilon\Theta_1(z',z,\tau,\varepsilon) \\ \sum_j g_{ij}z_j''+2k\sum_j a_{ij}^{\circ}z_j'=\varepsilon\Theta_i(z',z,\tau,\varepsilon) \quad (i\geqslant 2) \end{gathered} \tag{6.3}$$

Здесь снова $g_{ij}^{\circ}=g_{ij}(0)$, $a_{ij}^{\circ}=a_{ij}(0)$.

Рассмотрим сначала случай, когда

$$a_{1j}^{\circ}=0 \quad (j\geqslant 2), \quad a_{i1}^{\circ}=0 \quad (i\geqslant 2) \tag{6.4}$$

В этом случае невозмущенные линейные уравнения для z_1 и $z_2, \ldots, z_n$ разделяются. Если $cg_{11}^{\circ}>(ka_{11}^{\circ})^2$, то для z_1 получим соотношения (4.1)—(4.2). Можно проверить выполнение предельного соотношения (3.7), причем оператор Λ переводит касательную плоскость к Σ в себя и в этой инвариантной плоскости он задается матрицей $\exp(-2\pi k\omega^{-1}G^{-1}A)$, где $A=\|a_{ij}^{\circ}\|$, $G=\|g_{ij}^{\circ}\|$ $(i, j=2, \ldots, n)$. Так как матрица A в общем случае несимметрична, то $\Lambda^T\neq\Lambda$.

Если вместо (6.4) потребовать лишь выполнения равенств $a_{1j}^{\circ}=0$ $(j\geqslant 2)$, то оператор Λ уже не будет переводить касательную плоскость Σ в себя, хотя по-прежнему вектор нормали $\mathbf{n}$ будет его собственным вектором. В самом общем случае (когда $a_{1j}^{\circ}\neq 0$) при выполнении определенных условий будет справедливо предельное соотношение (3.7), однако при этом вектор нормали $\mathbf{n}$ к поверхности Σ уже не будет собственным вектором оператора восстановления.

В заключение отметим одно обстоятельство. При нарушении условий (6.4) для некоторых скоростей $\dot{x}(0)=\mathbf{v}$, удовлетворяющих неравенству (3.5), произойдет абсолютно неупругий удар (в пределе, когда $N\to\infty$), причем одновременно будут существовать направления скорости $\mathbf{v}$, подчиняющейся (3.5), при которых точка $x(t)$ мгновенно отразится от поверхности Σ. Это явление имеет место уже для $n=2$, когда $g_{ij}=\delta_{ij}$, а $a_{21}=0$, $a_{12}\neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. I. М.: Наука: 1983. 463 с.
2. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
3. *Болотов Е. А.* О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением. М.: Университетская тип., 1906. 147 с.
4. *Кобринский А. А., Кобринский А. Е.* Двумерные виброударные системы. М.: Наука, 1981. 335 с.

Москва

Поступила в редакцию 30.V.1988