

УДК 531.36

© 1989

В. А. КОНОПЛЕВ

АГРЕГАТИВНЫЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ СО СТРУКТУРОЙ ДЕРЕВА

Предлагается новый эффективный метод компьютерного конструирования аналитических и независимо числовых форм моделей механики систем тел (кинематики, динамики и управления) со структурой дерева. К таковым, например, относятся манипуляционные системы (сварочные, сборочные и т. п.), шагающие и колесные аппараты, подводные и надводные технические средства освоения Мирового Океана (подводные лаборатории, полупогруженные буровые платформы, суда космической навигации и т. п.), элементы гибких автоматизированных производств и т. п.

В основу исследований положена методология системного анализа [1, 2]: матричные коэффициенты моделей механики системы тел по определенному правилу (заданному графом системы) формируются из аналогичных матричных коэффициентов тех же моделей отдельных твердых тел системы при активном использовании алгебраических модулей систем аналитических вычислений (САВ) [3].

1. Основные математические конструкции метода. 1. Числовой комплект векторного пространства винтов и группа его движений [4, 5]:

$$L(H.6) = \{L_t^\sigma : L_t^\sigma = T_t^\sigma [c_t^\sigma]; \sigma, t \in N\} \quad (1.1)$$

$$L_t^\sigma = L_{\sigma+1}^\sigma L_{\sigma+2}^{\sigma+1} \times \dots \times L_t^{\sigma+1}, \quad (L_t^\sigma)^{-1} = L_{\sigma}^t$$

$$T_t^\sigma = \begin{Bmatrix} E & 0 \\ \langle o_t^\sigma \rangle^\sigma & E \end{Bmatrix}, \quad [c_t^\sigma] = \begin{Bmatrix} c_t^\sigma & 0 \\ 0 & c_t^\sigma \end{Bmatrix}$$

где $\langle o_t^\sigma \rangle^\sigma$ — кососимметрическая матрица (3×3), порожденная вектором $o_t^{\sigma\sigma}$ параллельного переноса системы координат $E_t = (o_t, [e^t])$ с началом в точке o_t и ортонормированным базисом $[e^t] = (e_1^t, e_2^t, e_3^t)$ относительно системы координат $E_\sigma = (o_\sigma, [e^\sigma])$ в базисе $[e^\sigma]$. c_t^σ — матрица (3×3) вращения $[e^t]$ в $[e^\sigma]$; E — единичная матрица (3×3) [6].

Группа $L(H.6)$ удобна для матричной формализации многократно повторяющихся операций преобразования плюккеровых координат винтов $X \in H$ при переходе к новой системе координат: если X_σ^σ и X_t^t один и тот же винт $X \in H$ в E_σ и E_t и $L_t^\sigma : E_t \rightarrow E_\sigma$, то $X_\sigma^\sigma = L_t^\sigma X_t^t$, $X_t^t = L_\sigma^t X_\sigma^\sigma$.

2. Уравнение кинематики на группе $L(H.6)$:

$$L_t^\sigma = L_t^\sigma \Phi_t^{\sigma t}, \quad \Phi_t^{\sigma t} = \begin{Bmatrix} \langle \omega_t^\sigma \rangle^t & 0 \\ \langle v_t^\sigma \rangle^t & \langle \omega_t^\sigma \rangle^t \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Равенство (1.2) (обобщение кинематических уравнений Пуассона $c_t^\sigma = c_t^\sigma \langle \omega_t^\sigma \rangle^t$) является удобной для компьютерной реализации операции дифференцирования движений из $L(H.6)$; $v_t^{\sigma t}$, $\omega_t^{\sigma t}$ — векторы линейной и угловой скоростей E_t относительно E_σ в базисе $[e^t]$.

3. Рекуррентное кинематическое равенство

$$V_t^{\sigma t} = L_t^{\sigma+1, T} V_{\sigma+1}^{\sigma, \sigma+1} + V_t^{\sigma+1, t}$$

$$V_t^{\sigma t} = \|v_t^{\sigma t}, \omega_t^{\sigma t}\|^T \in R_6, \quad L_t^{\sigma+1} \in L(H.6)$$

4. Древовидный граф системы, ориентация которого определяется

шестеркой функций

$$r^{lk} = (s^{lk}, \theta^{lk}) \quad (1.4)$$

где $s^{lk} = \|s_1^{lk}, s_2^{lk}, s_3^{lk}\|^T$ — вектор параллельного переноса E_{lk} в $E_{\mu, k-1}$; $\theta^{lk} = (\theta_4^{lk}, \theta_5^{lk}, \theta_6^{lk})$ — углы ориентации $[e^{lk}]$ в $[e^{\mu, k-1}]$; l, μ — номера стволов графа, $\mu \leq l$, k — номер элемента в стволе.

Конструктивные (постоянные) переносы и углы ориентации обозначаются символами p и ψ соответственно. При переходе к главным центральным осям инерции $r_c^{lk} = (r_{c1}^{lk}, r_{c2}^{lk}, \dots, r_{c6}^{lk})$. При наличии двух конструктивных и одного переменного поворотов в кинематической паре $(\mu, k-1;$

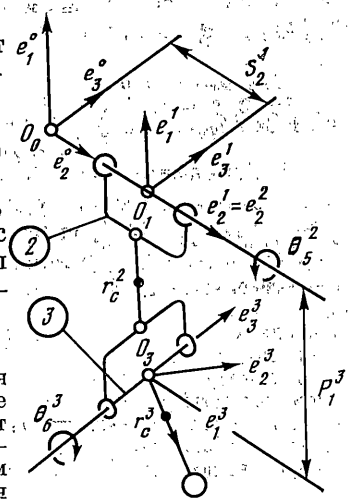
$lk)$ всегда принимается $\theta^{lk} = (\psi_4^{lk}, \psi_5^{lk}, \theta_6^{lk})$.

Переменные функции из (1.4) составляют вектор δ^{lk} обобщенных координат кинематической пары $(\mu, k-1; lk)$, так что

$$r^{lk} = \|f^{lk}\| q^{lk} \quad (1.5)$$

где $\|f^{lk}\| = \|\dots, |f_\beta^{lk}|, \dots\|$ — матрица $(6 \times \dim q^{lk})$, столбцы которой — шестимерные орты $f_\beta^{lk} \in R_6$ с единицей на β -месте, $(\beta=1, \dots, 6)$. Эти векторы в дальнейшем называются ортами осей подвижности (lk) -тела в системе координат $E_{\mu, k-1}$.

Пример. На фигуре представлена кинематическая схема механизма с тремя степенями свободы. Первое фиктивное тело (с нулевой массой $m_1=0$) участвует в параллельном переносе вдоль орты $e_2^0 = e_2^1$ на величину s_2^1 , тело 2 (с массой m_2) — вращается с ортом $e_2^1 = e_2^2$ на угол θ_5^2 ; тело 3 (с массой m_3) вращается с ортом e_3^2 на угол θ_6^3 . В соответствии с (1.4) имеем: $r^1 = (0, s_2^1, 0, 0, 0, 0)$, $r^2 = (0, 0, 0, 0, \theta_5^2, 0)$, $r_c^2 = (r_{c1}^2, 0, 0, 0, 0, 0)$, $r^3 = (p_1^3, 0, 0, 0, 0, 0)$, $r_c^3 = (r_{c1}^3, 0, 0, 0, 0, 0)$.



5. Структурная матрица системы — основной объект теории, содержащий всю информацию о структуре и мгновенной конфигурации системы

$$S = \|f\|^T M^T L, \quad \|f\| = \text{diag}(\|f^{lk}\|), \quad M = \text{diag}(M_{lk}^{\mu, k-1}) \quad (1.6)$$

$M_{lk}^{\mu, k-1}$ — блочно-диагональная матрица (6×6) с блоками $(3 \times 3) c_{lk}^{\mu, k-1, T}$

и $\varepsilon_{lk}^{\mu, k-1}$ на главной диагонали.

$$c_{lk}^{\mu, k-1} = c_1(\theta_4^{lk}) c_2(\theta_5^{lk}) c_3(\theta_6^{lk}) \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{lk}^{\mu, k-1} = \|c_3^T(\theta_6^{lk}) c_2^T(\theta_5^{lk}) e_1^{lk} | c_3^T(\theta_6^{lk}) e_2^{lk} | e_3^{lk}\| \quad (1.8)$$

Здесь $c_{lk}^{\mu, k-1}$ — матрица (3×3) вращения $[e^{\mu, k-1}] \rightarrow [e^{lk}]$; $\varepsilon_{lk}^{\mu, k-1}$ — матрица (3×3) из кинематических уравнений Эйлера ($\omega_{lk}^{\mu, k-1; lk} = \varepsilon_{lk}^{\mu, k-1} q^{lk}$); $c_i(\theta_\beta^{lk})$ — матрица (3×3) простейшего вращения с ортом e_i^{lk} на угол θ_β^{lk} , $i=1, 2, 3$, $\beta=4, 5, 6$; L — блочная верхнетреугольная матрица $(6m \times 6m)$ с блоками (6×6) вида

$$L_{lk}^{\sigma t} \in L(H.6), \quad (lk) \in (\sigma t)_+; \quad L_{lk}^{\sigma t} = 0, \quad (lk) \notin (\sigma t)_+ \quad (1.9)$$

на пересечении (σt) -матричных $(6 \times 6m)$ строк и (lk) -матричных столбцов, m — количество тел в системе; $(\cdot)_+$ — множество достижимости (\cdot) -элемента графа.

Элементами матрицы S являются либо нулевые строки (1×6) , либо строки той же размерности вида

$$s_{lk}^{\sigma t - \alpha} = f_\alpha^{\sigma t, T} M_{\sigma t}^{\mu, t-1, T} L_{lk}^{\sigma t} \quad (1.10)$$

Любой винт X_{lk}^{lk} строкой $s_{lk}^{\sigma t - \alpha}$ как оператором последовательно преоб-

разуется из E_{lk} в $E_{\sigma t}$, из $E_{\sigma t}$ в систему обобщенных координат $q^{\sigma t}$ кинематической пары $(\mu, t-1; \sigma t)$ и затем умножением на орт $f_{\alpha}^{\sigma t, T}$ проектируется на α -направление этой системы координат $(\alpha=1, \dots, 6)$.

Для кинематических пар пятого и цилиндрических — четвертого классов равенство (1.10) упрощается

$$s_{lk}^{\sigma t - \alpha} = f_{\alpha}^{\sigma t, T} L_{lk}^{\sigma t}, \quad f_{\alpha}^{\sigma t, T} M_{\sigma t}^{\mu, t-1, T} = f_{\alpha}^{\sigma t, T} \quad (1.11)$$

Если инерционная внешняя среда и вращающиеся маховики на телах системы отсутствуют, то в формулах (1.10), (1.11) целесообразно перейти к главным центральным осям инерции E_{lhc} добавив в правых частях множитель $L_{lhc}^{lk} \in L(H.6)$.

Для механизма (фигуре) с учетом (1.11) получается: $s_1^{1-2} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $s_2^{1-2} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $s_3^{1-2} = (s\theta_6^3, c\theta_6^3, 0, 0, 0, 0)$, $s_2^{2-5} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $s_3^{2-5} = (0, 0, -(p_1^3 + r_c^3 c\theta_6^3), s\theta_6^3, c\theta_6^3, 0)$, $s_3^{3-6} = (0, r_c^3, 0, 0, 0, 1)$, где $s \equiv \sin$, $c \equiv \cos$.

2. Динамический агрегат системы. Построение указанного агрегата (уравнений движения системы в квазискоростях) начинается с выписывания аналогичного агрегата одиночного тела-элемента декомпозиции этой системы первого уровня с использованием принципа освобожденности от связей в виде [7, 8]:

$$A_{lk}^{lk} V_{lk}^{10, lk*} + B_{lk}^{lk} V_{lk}^{10, lk} = F_{lk}^{lk} \quad (2.1)$$

$$A_{lk}^{lk} = \Theta_{lk}^{lk} + \sum_{\beta} \sum_{\kappa=1}^{m(lk, \beta)} L_{\beta\kappa}^{lk} \Theta_{\beta\kappa}^{\beta\kappa} L_{\beta\kappa}^{lk, T} + \Lambda_{lk}^{lk}$$

$$B_{lk}^{lk} = \Phi_{lk}^{10, lk} A_{lk}^{lk} + A_{lk}^{lk*}$$

$$A_{lk}^{lk*} = \sum_{\beta} \sum_{\kappa=1}^{m(lk, \beta)} L_{\beta\kappa}^{lk} ([\langle e_3^{\beta\kappa} \rangle] \Theta_{\beta\kappa}^{\beta\kappa} - \Theta_{\beta\kappa}^{\beta\kappa} [\langle e_3^{\beta\kappa} \rangle]) L_{\beta\kappa}^{lk, T} \Psi_{\beta\kappa}^{lk*}$$

$$F_{lk}^{lk} = T_{lk}^{lk} + Y_{lk}^{lk} + U_{lk}^{lk} + N_{lk}^{lk} + R_{lk}^{lk}$$

$$T_{lk}^{lk} = P_{lk}^{lk} + \sum_{\beta} \sum_{\kappa=1}^{m(lk, \beta)} L_{\beta\kappa}^{lk} P_{\beta\kappa}^{\beta\kappa} - \sum_{\beta} \sum_{\kappa=1}^{m(lk, \beta)} (I_{\beta\kappa}^{lk} \Psi_{\beta\kappa}^{lk*} + J_{\beta\kappa}^{lk} \Psi_{\beta\kappa}^{lk*})$$

$$Z_{lk}^{lk} = Z_{lk}^{lk}(\mu, k-1; lk) - \sum_{\nu, k+1} L_{\nu, k+1}^{lk} Z_{\nu, k+1}^{\nu, k+1}(lk; \nu, k+1)$$

В уравнении (2.1) $L_{\beta\kappa}^{lk} \in L(H.6)$ матрица перехода от E_{lk} к системе координат $E_{\beta\kappa}$, неподвижно связанной с κ -маховиком из управляющего силового модуля, установленного на (lk) -теле для управления движением $(\nu, k+1)$ -тела по координате $q_{\beta}^{\nu, k+1}$, $\nu \geq l$; $\beta=1, \dots, 6$; $\Theta_{\beta\kappa}^{\beta\kappa}$, $e_3^{\beta\kappa}$, $\Psi_{\beta\kappa}^{lk}$, $m(lk, \beta)$ — матрица Мизеса [7], орт оси вращения, угол поворота указанного маховика и их количество на (lk) -теле; $Z_{lk}^{lk}(\mu, k-1; lk)$ — винт усилий (реакций в шарнирах — $Z=Y$, управляющих — $Z=U$, трения — $Z=N$ реакций тел внешней среды — $Z=R$), передаваемых на (lk) -тело с $(\mu, k-1)$ - и $(\nu, k+1)$ -тел.

Объединением равенств (2.1) для всех (lk) -индексов системы находится матричное уравнение движения системы тел в квазискоростях под действием активных внешних усилий, усилий управления, трения, реакций в шарнирах и со стороны тел внешней среды.

$$AV^* + BV = F \quad (2.2)$$

$$A = \text{diag}(A_{lk}^{lk}), \quad B = \text{diag}(B_{lk}^{lk})$$

$$F = \|\dots, F_{lk}^{lk}, \dots\|^T = T + Y + U + N + R$$

$$V = \|\dots, V_{lk}^{10, lk}, \dots\|^T, \quad Z = \|\dots, Z_{lk}^{lk}, \dots\|^T$$

Динамический агрегат системы твердых тел со структурой дерева получается умножением равенства (2.2) слева на структурную матрицу S (4.6):

$$SAV^* + SBV = ST + u + n + S_R R \quad (2.3)$$

$$SY = 0, \quad SU = u, \quad SN = n$$

$$u = \|\dots, u_{\alpha}^{\sigma t}, \dots\|^T, \quad n = \|\dots, n_{\alpha}^{\sigma t}, \dots\|^T$$

В равенстве (2.3) $u_{\alpha}^{\sigma t}, n_{\alpha}^{\sigma t} \in R_1$ — усилия управления и трения, передаваемые на (σt) -тело с $(\mu, t-1)$ -тела по α -координате ($\alpha=1, \dots, 6$); S_R — матрица из блочных столбцов матрицы S , соответствующих по индексам винтам $R_{lk}^{lk} \neq 0$ в (2.1).

Доказательство равенства (2.3) достигается в два этапа (на двух уровнях декомпозиции и агрегатирования системы).

Сначала, вслед за (2.1), конструируются динамические агрегаты элементов декомпозиции второго уровня — всех поддеревьев основного дерева с корневыми (lk) -телами (множества $(lk)_+$ достижимости (lk) -элементов системы):

$$S_+^{lk} A_+^{lk} V_+^{lk*} + S_+^{lk} B_+^{lk} V_+^{lk} = F_+^{lk} \quad (2.4)$$

$$F_+^{lk} = S_+^{lk} T_+^{lk} + u_+^{lk} + n_+^{lk} + S_{R+}^{lk} R_+^{lk}$$

$$S_+^{lk} = \|f^{lk}\|^T M_{lk}^{\mu, k-1, T} \|E | L_{\nu, k+1}^{lk} | L_{\xi, k+2}^{lk} | \dots\|$$

$$Z_+^{lk} = \|Z_{lk}^{lk}, Z_{\nu, k+1}^{\nu, k+1}, Z_{\xi, k+2}^{\xi, k+2}, \dots\|^T$$

$$u_+^{lk} = \|u^{lk}, u^{\nu, k+1}, u^{\xi, k+2}, \dots\|^T, \quad n_+^{lk} = \|n^{lk}, n^{\nu, k+1}, n^{\xi, k+2}, \dots\|^T$$

где $Z_{lk}^{lk} = A_{lk}^{lk} V_{lk}^{10, lk*}, = B_{lk}^{lk} V_{lk}^{10, lk}, = T_{lk}^{lk}$ или $= R_{lk}^{lk}$; u^{lk}, n^{lk} — векторы управляющих усилий и усилий трения, действующих в шарнире $(\mu, k-1; lk)$ -кинематической пары ($\dim u^{lk} = \dim n^{lk} = \dim q^{lk}$ с учетом возможных нулевых координат). Точками обозначены матрицы и векторы, соответствующие остальным телам системы.

Формирование агрегатов (2.4) выполняется с использованием рекуррентной процедуры, суть которой состоит в следующем. Динамические агрегаты (1.2) почек (последних $(\eta\theta)$ -элементов всех стволов дерева, для которых $Y_{\eta, \theta+1}^{\eta, \theta+1}(\mu, \theta; \eta, \theta+1) = U_{\eta, \theta+1}^{\eta, \theta+1}(\mu\theta; \eta, \theta+1) = N_{\eta, \theta+1}^{\eta, \theta+1}(\mu\theta; \eta, \theta+1) = 0$)

умножением на матрицы $L_{\eta\theta}^{\mu, \theta-1} \in L(H.6)$ преобразуются в системы координат $E_{\mu, \theta-1}$ $(\mu, \theta-1)$ -тел, следующих за $(\eta\theta)$ -телами вниз по стволам ($\mu \leq \theta$) и складываются с агрегатами (2.1) тех же тел.

При этом динамические винты усилий реакций управления и трения, действующие в шарнирах $(\mu, \theta-1; \eta\theta)$ -пар тел исчезают (в соответствии с третьим законом Ньютона). Умножением слева на матрицу $M_{\mu, \theta-1}^{\xi, \theta-2, T}$, $\xi \leq \mu$, (4.7), полученные равенства преобразуются в системы обобщенных координат $q^{\mu, \theta-1}$ тех же пар тел, что приводит к отделению ненулевых координат в векторах (6×1) сил управления (трения) и реакций в шарнирах (там, где нулевые одни, ненулевые другие и наоборот). Умножением равенства слева на матрицы ортов осей подвижности $\|j^{\mu, \theta-1}\|^T$ обнуляются векторы усилий реакций и выделяются векторы усилий управления и трения в шарнирах $(\xi, \theta-2; \mu, \theta-1)$ -пар тел. Указанный процесс повторяется для $(\xi, \theta-2)$ -тел, $(\gamma, \theta-3)$ -тел, $\gamma \leq \xi$ и т. д. и заканчивается на корне (lk) поддерева.

Конструирование динамического агрегата (2.3) всей системы тел (элемента декомпозиции третьего уровня) завершается объединением в матричной форме записи агрегатов элементов декомпозиции второго уровня, т. е. уравнений (2.4) при условии дополнения матричных строк S_+^{lk} нулями до нужной размерности.

3. Кинематический агрегат системы. Построение указанного агрегата начинается с выписывания аналогичного агрегата одиночной системы коор-

динат E_{lk} с учетом (1.5–1.8):

$$V_{lk}^{\mu, k-1; lk} = M_{lk}^{\mu, k-1} \|f\| q^{lk} \quad (3.1)$$

являющегося матричной записью обобщенных кинематических уравнений Эйлера E_{lk} в движении относительно $E_{\mu, k-1}$ в базе $[e^{lk}]$.

С использованием рекуррентного равенства (1.3) и уравнений (3.1) получают кинематические агрегаты элементов декомпозиции системы второго уровня – в отличие от $(lk)_+$ (2.4), множеств $(lk)_-$ контрдостижимости элементов декомпозиции первого уровня, т.е. систем координат E_{lk} (всех кинематических цепей с первым элементом E_{10} и последним E_{lk})

$$V_{lk}^{10, lk} = L_{lk}^{lk, T} V_{lk}^{lk, T} = L_{lk}^{lk, T} M_{lk}^{-lk} \|f\|_{lk} q_{lk}^{lk}, \quad L_{lk}^{lk, T} = \|L_{lk}^{v1, T} | L_{lk}^{\xi 2, T} | \dots | E\| \quad (3.2)$$

$$V_{lk}^{-lk} = \|V_{v1}^{10, v1}, V_{\xi 2}^{v1, \xi 2}, \dots, V_{lk}^{\mu, k-1; lk}\|^T, \quad M_{lk}^{-lk} = \text{diag}(M_{v1}^{10}, M_{\xi 2}^{v1}, \dots, M_{lk}^{\mu, k-1})$$

$$\|f\|_{lk} = \text{diag}(\|f^{v1}\|, \|f^{\xi 2}\|, \dots, \|f^{lk}\|), \quad q_{lk}^{-lk} = \|q^{v1}, q^{\xi 2}, \dots, q^{lk}\|^T, \quad v \leq \xi \leq \mu \leq l$$

Конструирование кинематического агрегата всей системы (элемента декомпозиции третьего уровня) завершается объединением кинематических агрегатов (3.2) в векторной записи с дополнением (как и в (2.4)) строк $L_{lk}^{lk, T}$ нулевыми матрицами (6×6) до нужной размерности

$$V = S^T q^*, \quad q^* = \|q^{11}, q^{v, 2^*}, \dots\|^T, \quad V = \|\dots, V_{lk}^{10, lk}, \dots\|^T \quad (3.3)$$

Производная вектора (3.3) имеет вид

$$V^* = S^T q^{**} + S^{T*} q^*, \quad S^{T*} = (L^T M + L^T M^*) \|f\| \quad (3.4)$$

Матрицы L и M в (3.4) получаются из матриц L и M заменой их блоков $L_{lk}^{\sigma t}$ на $L_{lk}^{\sigma t} = L_{lk}^{\sigma t} \Phi_{lk}^{\sigma t, lk}$, (1.2) и $M_{lk}^{\mu, k-1}$, (1.7) на $M_{lk}^{\mu, k-1}$:

$$M_{lk}^{\mu, k-1} = \begin{vmatrix} \langle \omega_{lk}^{\mu, k-1} \rangle^{lk, T} c_{lk}^{\mu, k-1, T} & 0 \\ 0 & e_{lk}^{\mu, k-1} \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

$$e_{lk}^{\mu, k-1} = \|(\langle e_s^{lk} \rangle^T c_s^s (\theta_s^{lk}) c_2^T [\theta_s^{lk}] \theta_6^{lk} + c_s^T (\theta_s^{lk}) c_2^T [\theta_s^{lk}] \langle e_2^{lk} \rangle^T \theta_5^{lk}) e_1^{lk} \times$$

$$\times | \langle e_s^{lk} \rangle^T c_s (\theta_s^{lk}) \theta_6^{lk} e_{2l}^{lk} | 0\|$$

Для кинематических пар пятого класса и пар четвертого класса цилиндрических вслед за (1.11) получается

$$s_{lk}^{\sigma t - \alpha} = f_\alpha^{\sigma t, T} L_{lk}^{\sigma t}, \quad f_\alpha^{\sigma t, T} M_{\sigma t}^{\mu, t-1; T} = 0 \quad (3.6)$$

Производную S^T иногда проще вычислять прямым дифференцированием элементов матрицы S .

В примере (фиг. 1) получается: $V_1^{01} = s_1^{1-2, T}$, $s_2^{1*} = \|0, s_2^{1*}, 0, 0, 0, 0\|^T$, $V_2^{02} = \|0, s_2^{1*}, 0, 0, 0, \theta_5^{2*}, 0\|^T$, $V_3^{03} = \|s_2^{1*} s \theta_6^3, s_2^{1*} c \theta_6^3 + r_c c_1^3 \theta_6^3, -(p_1^3 + r_c c_1^3 \theta_6^3) \theta_5^{2*}, c \theta_6^3 \theta_5^{2*}, \theta_5^{3*}\|^T$.

4. Агрегативная форма уравнений движения системы. Указанные уравнения получаются исключением из динамического агрегата (2.3) вектора квазискоростей V с помощью кинематического агрегата (3.3):

$$A(q) q^{**} + B(q, q^*) q^* = Q \quad (4.1)$$

$$A(q) = SAS^T, \quad B(q, q^*) = SBS^T + SAS^{T*}$$

$$Q = ST + u + n + Q_R, \quad Q_R = S_R R$$

Второе слагаемое левой части (4.1) в случае необходимости может быть представлено в виде

$$B(q, q^*) q^* = b(q, q^*) = SBV + SAS^{T*} q^* \quad (4.2)$$

Уравнения (4.1) с учетом (4.2) в некоторых случаях удобнее записать в следующем виде

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{Q} \\ A(\mathbf{q}) &= ZS^T, \quad \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = SW + ZS^T \dot{\mathbf{q}} \\ Z &= SA, \quad W = BV, \quad W = \|\dots, W_{lk}^{i_0, lk}, \dots\|^T \end{aligned}$$

Согласно (4.1) матрицы $A(\mathbf{q})$ и $B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ произвольной системы тел со структурой дерева синтезируются из аналогичных матриц A_{lk}^{lk}, B_{lk}^{lk} составляющих ее тел при помощи структурной матрицы S и ее производной S^T .

В уравнениях (4.1) указанные матрицы определены с помощью блочных матриц. Во многих задачах эти матрицы удобнее определять алгоритмами конструирования их элементов, стоящих на пересечении $(\sigma t - \alpha)$ -строки и $(lk - \beta)$ -столбцов.

$$A_{lk-\beta}^{\sigma t-\alpha} = \sum_{p \in (\sigma t, lk)_+} s_p^{\sigma t-\alpha} A_p^{\sigma t-\alpha} s_p^{lk-\beta T} \quad (4.3)$$

$$B_{lk-\beta}^{\sigma t-\alpha} = \sum_{p \in (\sigma t, lk)_+} (s_p^{\sigma t-\alpha} A_p^{\sigma t-\alpha} c_p^{lk-\beta} + s_p^{\sigma t-\alpha} K_p^{lk, p} s_p^{lk-\beta, T}) \quad (4.4)$$

$$c_p^{lk-\beta} = L_p^{lk, T} M_{lk}^{lk, k-1} f_p^{lk}, \quad K_p^{lk, p} = B_p^p + A_p^p \Phi_p^{lk, p, T}$$

$$(\sigma t, lk)_+ = (\sigma t)_+ \cap (lk)_+ \neq \emptyset$$

$$A_{lk-\beta}^{\sigma t-\alpha} = B_{lk-\beta}^{\sigma t-\alpha} = 0, \quad (\sigma t, lk)_+ = \emptyset$$

Для кинематических пар пятого класса и четвертого класса цилиндрических пар в силу (1.11), (3.6) $c_p^{lk-\beta} = 0$, $s_p^{\sigma t-\alpha} = f_{\alpha}^{\sigma t, T} L_p^{\sigma t}$ и поэтому формулы (4.3), (4.4) принимают симметричный вид

$$A_{lk-\beta}^{\sigma t-\alpha} = \sum_{p \in (\sigma t, lk)_+} s_p^{\sigma t-\alpha} A_p^{\sigma t-\alpha} s_p^{lk-\beta, T}, \quad B_{lk-\beta}^{\sigma t-\alpha} = \sum_{p \in (\sigma t, lk)_+} s_p^{\sigma t-\alpha} K_p^{lk, p} s_p^{lk-\beta, T} \quad (4.5)$$

При выводе уравнения (4.1) индексами были перенумерованы тела системы. Можно этими же индексами перенумеровать системы координат, участвующие только в одном простейшем движении (переносе или вращении), введя для соответствующих индексов фиктивные безынерционные тела (как это сделано в примере). В этом случае элементы матриц $A(\mathbf{q})$ и $B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ для систем с произвольными кинематическими парами будут конструироваться также с помощью простых алгоритмов (4.5) и (4.6). Целесообразность выбора указанных систем координат не очевидна. С одной стороны, указанные алгоритмы проще для программирования, с другой стороны, возрастает количество матричных сомножителей в матрицах $L_p^{p-1} \in L(H.6)$ и, следовательно, в матрицах $s_p^{\sigma t-\alpha}$ и $c_p^{lk-\beta}$. В каждом частном случае (структура графа, количество кинематических пар произвольного класса) вопрос требует отдельного исследования.

Уравнения (4.1) необходимо дополнить уравнениями связей. Пусть на систему тел наложено m_1 голономных и m_2 неголономных внешних связей

$$f(\mathbf{q}) = 0, \quad Z\dot{\mathbf{q}} + \gamma = 0 \quad (4.6)$$

Тогда, в соответствии с общей теорией [9] для вектора обобщенных реакций Q_R имеем

$$Q_R = S_R R = D_\lambda \lambda, \quad D_\lambda = \|(df/dq)^T | Z^T\| \quad (4.7)$$

Уравнения (4.1) замыкаются равенством

$$D_\lambda^T \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.8)$$

Уравнения (4.1) и (4.8) эквивалентны $\dim \mathbf{q} + m_1 + m_2$ скалярным уравнениям с таким же количеством неизвестных координат векторов \mathbf{q} и λ .

Эффективность агрегативных моделей механики систем твердых тел со структурой древовидного графа и алгоритмов их компьютерного конструирования обеспечивается следующим:

1. Не требуются затраты труда и времени на конструирование символьных выражений для кинетической и потенциальной энергий, функций Гаусса, Апеля и т.п.

2. В коэффициентах моделей не используются операторы дифференцирования (матрицы Якоби, гессианы, трехиндексные индексы Больцмана, символы Кристоффеля первого и второго рода и т.п.), что позволяет при их символьном конструировании обойтись без использования дифференцирующих модулей САВ.

3. Алгоритмы универсальны: позволяют независимо конструировать символьные и числовые формы моделей механики систем тел.

4. При использовании многопроцессорного компьютера структура полученных алгоритмов обеспечивает высокий уровень распараллеливания процессов вычисления.

5. Вычислительная трудоемкость алгоритмов (кинематическая цепь с вращательными парами пятого класса без учета инерционности внешней среды) имеет вид $N_M = 2m^3 + 37m^2 - 17m - 10$, ($m=6$, $N_M=1652$); $N_A = 1,7m^3 + 25,5m^2 - 12,17m - 14$, ($m=6$, $N_A=1191$), где N_M , N_A — количество операции умножения и сложения соответственно.

6. Символьное или числовое конструирование векторов $V_{lk}^{10, lk} \cdot V_{lk}^{\sigma t, lk}$, используемых для составления матриц $\Phi_{lk}^{10, lk}$, $\Phi_{lk}^{\sigma t, lk}$, выполняется с помощью кинематического агрегата (3.3). По (σt) -строке $(6 \times 6m)$ имеем $V_{\sigma t}^{\alpha, k-1; \sigma t} = s_{\sigma t}^{\alpha k - \alpha, T} q_{\alpha}^{\alpha k} + V_{\sigma t}^{\alpha k, \sigma t}$, $k=t, t-1, \dots, 1$.

7. Уравнения (4.1) легко декомпозируются. В результате получают уравнения движения отдельных подсистем и учетом слагаемых взаимного влияния, что облегчает использование теории векторных функций Ляпунова [10].

8. Допускают последовательное многоярусное символьное конструирование элементов матричных коэффициентов средствами алгебраических модулей САВ с использованием одного и того же массива оперативной памяти компьютера при условии вывода на печать (или записи во внешнюю память) результатов каждого яруса.

Например, для вычисления ненулевых элементов матрицы $A(q)$ механизма (фиг. 1) получается:

$$\text{I ярус: } s_{1,2}^{1-2} = 1, s_{2,2}^{1-2} = 1, s_{3,1}^{1-2} = s\theta_6^3; s_{3,2}^{1-2} = c\theta_6^3, s_{2,5}^{2-5} = 1, s_{3,3}^{2-5} = -(D_1^3 + r_{c1}^3 c\theta_6^3);$$

$$s_{3,4}^{2-5} = s\theta_6^3, s_{3,5}^{2-5} = c\theta_6^3, s_{3,2}^{3-6} = r_{c1}^3, s_{3,6}^{3-6} = 1;$$

$$\text{II ярус: } z_{2,2}^{1-2} = s_{2,2}^{1-2} m_2, z_{3,1}^{1-2} = s_{3,1}^{1-2} m_3, z_{3,2}^{1-2} = s_{3,2}^{1-2} m_3, z_{2,5}^{2-5} = I_{55}^2, z_{3,3}^{2-5} = s_{3,3}^{2-5} m_3; z_{3,4}^{2-5} = s_{3,4}^{2-5} I_{44}^3, z_{3,5}^{2-5} = s_{3,5}^{2-5} I_{55}^3, z_{3,2}^{3-6} = s_{3,2}^{3-6} m_3, z_{3,6}^{3-6} = s_{3,6}^{3-6} I_{66}^3;$$

$$\text{III ярус: } A_{1-2}^{1-2} = z_{2,2}^{1-2} z_{3,1}^{1-2} + z_{3,1}^{1-2} z_{3,2}^{1-2}, A_{3-6}^{1-2} = z_{3,2}^{1-2} z_{3,3}^{2-5}, A_{2-5}^{2-5} = z_{2,5}^{2-5} z_{2,5}^{2-5} + z_{3,3}^{2-5} z_{3,3}^{2-5} + z_{3,4}^{2-5} z_{3,4}^{2-5} + z_{3,5}^{2-5} z_{3,5}^{2-5}; A_{3-6}^{3-6} = z_{3,2}^{3-6} z_{3,2}^{3-6} + z_{3,6}^{3-6} z_{3,6}^{3-6}$$

где $m_2, m_3, I_{55}^2, I_{44}^3, I_{55}^3, I_{66}^3$ — массы и моменты инерции тел, $s_{t,i}^{k-\alpha}, z_{t,i}^{k-\alpha}$ — ненулевые i -координаты строк $s_t^{k-\alpha}, z_t^{k-\alpha}, i=1, \dots, 6, q = \|s_2^1, \theta_5^2, \theta_6^3\|^T$ — вектор обобщенных координат системы.

Для вычисления вектора получается:

$$\text{I ярус: } V_{2,2}^{0,2} = s_{2,2}^{1-2} s_2^1, V_{2,5}^{0,2} = s_{2,5}^{2-5} \theta_5^2, V_{3,1}^{0,3} = s_{3,1}^{1-2} s_1^2; V_{3,2}^{0,3} = s_{3,2}^{1-2} s_2^1 + s_{3,2}^{3-6} \theta_6^3, V_{3,3}^{0,3} = s_{3,3}^{2-5} \theta_5^2; V_{3,4}^{0,3} = s_{3,4}^{2-5} \theta_5^2, V_{3,5}^{0,3} = s_{3,5}^{2-5} \theta_5^2, V_{3,6}^{0,3} = s_{3,6}^{3-6} \theta_6^3, \text{ где } V_{p,i}^{0p} - i\text{-я координата вектора } V_p^{0p};$$

$$\text{II ярус: } W_{3,1}^{0,3} \equiv 0, W_{3,1}^{0,3} = m_3 (V_{3,3}^{0,3} V_{3,5}^{0,3} - V_{3,2}^{0,3} V_{3,6}^{0,3}); W_{3,2}^{0,3} = m_3 (V_{3,3}^{0,3} V_{3,4}^{0,3} - V_{3,1}^{0,3} V_{3,6}^{0,3}); W_{3,3}^{0,3} = m_3 (V_{3,2}^{0,3} V_{3,4}^{0,3} - V_{3,1}^{0,3} V_{3,5}^{0,3}); W_{3,4}^{0,3} = (I_{66}^3 - I_{55}^3) V_{3,5}^{0,3} V_{3,6}^{0,3}; W_{3,5}^{0,3} = (I_{44}^3 - I_{66}^3) V_{3,4}^{0,3} V_{3,6}^{0,3}; W_{3,6}^{0,3} = (I_{55}^3 - I_{44}^3) V_{3,4}^{0,3} V_{3,5}^{0,3};$$

$$\text{III ярус: } b_{11}^1(q, q') = s_{3,1}^{1-2} W_{3,1}^{0,3} = s_{3,1}^{1-2} W_{3,1}^{0,3} + s_{3,2}^{1-2} W_{3,2}^{0,3}; b_{21}^1(q, q') = s_{3,3}^{2-5} W_{3,3}^{0,3} + s_{3,4}^{2-5} \times W_{3,4}^{0,3} + s_{3,5}^{2-5} W_{3,5}^{0,3}; b_{31}^1(q, q') = s_{3,6}^{3-6} W_{3,6}^{0,3};$$

$$\text{IV ярус: } s_{3,1}^{1-2} = c\theta_6^3 \theta_6^3, s_{3,2}^{1-2} = -s\theta_6^3 \theta_6^3; s_{3,3}^{2-5} = r_{c1}^3 s\theta_6^3 \theta_6^3, s_{3,4}^{2-5} = c\theta_6^3 \theta_6^3, s_{3,5}^{2-5} = -s\theta_6^3 \theta_6^3;$$

$$\text{V ярус: } b_{12}^2(q, q') = 0; b_{22}^2(q, q') = (z_{3,3}^{2-5} s_{3,3}^{2-5} + z_{3,4}^{2-5} s_{3,4}^{2-5} + z_{3,5}^{2-5} s_{3,5}^{2-5}) \theta_5^2; b_{32}^2(q, q') = z_{3,2}^{3-6} s_{3,2}^{3-6} \theta_6^2.$$

Таким образом, уравнения движения механизма (фиг. 1) имеют вид

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3) s_2^{1**} + r_{c1}^3 c \theta_6^3 m_3 \theta_6^{3**} - r_{c1}^3 m_3 s \theta_6^3 (\theta_6^{3**})^2 = Q_1 \\ [(p_1^3 + r_{c1}^3 c \theta_6^3)^2 + I_{44}^3 s^2 \theta_6^3 + I_{55}^3 c^2 \theta_6^3 + I_{55}^2] \theta_5^{2**} + \\ + [2(I_{44}^3 - I_{55}^3) s \theta_6^3 c \theta_6^3 - 2(p_1^3 + r_{c1}^3 c \theta_6^3) m_3 r_{c1}^3 s \theta_6^3] \theta_5^{2**} \theta_6^{3**} = Q_2 \\ m_3 c \theta_6^3 r_{c1}^3 s_2^{1**} + [(r_{c1}^3)^2 m_3 + I_{66}^3] \theta_6^{3**} + [(p_1^3 + r_{c1}^3 c \theta_6^3) r_{c1}^3 \times \\ \times m_3 s \theta_6^3 + (I_{55}^3 - I_{44}^3) s \theta_6^3 c \theta_6^3] (\theta_5^{2**})^2 = Q_3 \end{aligned}$$

в чем нетрудно убедиться, получив их с использованием алгоритма Лагранжа второго рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Месарович М., Такагара Д. Общая теория систем: Математические основы. М.: Мир, 1978. 311 с.
2. Денисов А. А., Колесников Д. Н. Теория больших систем управления. Л.: Энергоиздат, 1982. 284 с.
3. Герд В. П., Тарасов О. В., Широков Д. В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложениях к физике и математике // Успехи физических наук. 1980. Т. 130. Вып. 1. С. 113-147.
4. Коноплев В. А. Группа движений векторного пространства винтов и уравнение кинематики на ней // Изв. ВУЗ. Математика. 1987. № 12. С. 48-51.
5. Юань М., Фрейденштейн Ф. Кинематический анализ пространственных механизмов с помощью винтовых координат. Ч. I. Винтовые координаты // Конструирование и технология машиностроения. 1971. Т. 93. № 1. С. 57-63.
6. Коноплев В. А. Исследование кинематики сложного движения тела с помощью матричных методов // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 9. С. 130-131.
7. Коноплев В. А. Матричные формы уравнений движения свободного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 42-46.
8. Коноплев В. А. Уравнения движения носителя динамически несбалансированных и асимметричных маховиков в инерционной среде // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 763-766.
9. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
10. Абдуллин Р. Э., Анапольский Л. Ю., Воронов А. А., Земляков А. С. и др. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости // Под редакцией Воронова А. А., Матросова В. М. М.: Наука, 1987. 312 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.III.1988