МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1989

УДК 531.35

А. П. МАРКЕЕВ

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА НА ЕГО БЫСТРЫЕ ВРАЩЕНИЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Методом усреднения исследуется динамика вязкоупругого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. В недеформированном состоянии тело динамически симметрично. Во время движения оно совершает упругие колебания вдоль оси симметрии. Исследование проводится в рамках линейной теории упругости. Диссипативные силы, возникающие при деформировании тела, моделируются силами вязкого трения. Предполагается, что тело обладает большой жесткостью, а диссипативные силы малы по сравнению с упругими силами. Рассматривается влияние диссипации энергии при квазистатических упругих колебаниях тела на его быстрые вращения относительно центра масс. Найдена эволюция движения оси симметрии тела и его кинетического момента.

1. Пусть упругое тело движется в центральном ньютоновском гравитационном поле. Принимая обычное допущение о независимости движения центра масс тела от его движения относительно центра масс, будем считать, что центр масс O тела движется по кеплеровской орбите. Движение относительно центра масс представляет собой движение тела как целого вокруг точки O и его деформации.

Для описания движения относительно центра масс введем декартову прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой в недеформированном состоянии тела направлены вдоль его главных центральных осей инерции, а в процессе деформирования перемещаются в теле так, что в любой момент времени выполняются равенства

$$\int_v \mathbf{u}\, dm=0, \qquad \int_v \boldsymbol{\rho}\times\mathbf{u}\, dm=0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ — упругое смещение элемента dm тела, положение которого в недеформированном состоянии тела задается радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}=(x_1, x_2, x_3)$; интегрирование в (1.1) производится по недеформированному телу. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ нет смещений тела как абсолютно твердого [1]. Первое из условий (1.1) выполняется, если O — центр масс тела, деформированного или недеформированного.

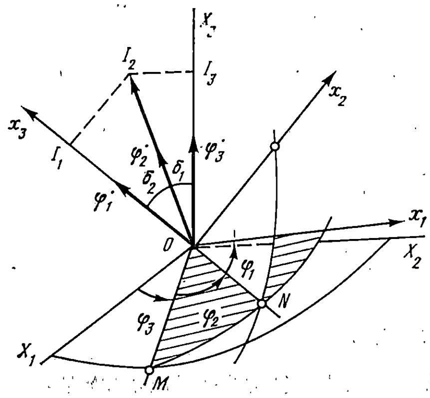
Положение элемента dm деформированного тела задается в системе координат $Ox_1x_2x_3$ радиусом-вектором $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}+\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}, t) \tag{1.2}$$

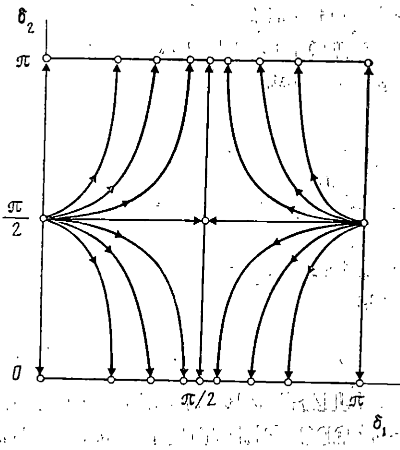
Упругое смещение представим в виде ряда

$$\mathbf{u}=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\,\mathbf{U}^{(n)}(\boldsymbol{\rho}) \tag{1.3}$$

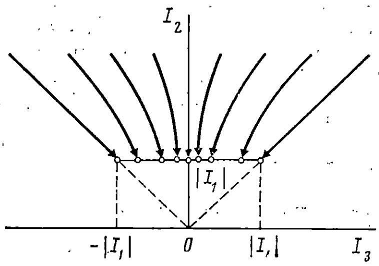
Здесь $\mathbf{U}^{(n)}=(U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, U_3^{(n)})$ — n-я собственная форма свободных упругих колебаний тела; формы колебаний удовлетворяют условию ортонор-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

мированности

$$\int\limits_V \mathbf{U}^{(n)}\cdot\mathbf{U}^{(k)}\,dm=\delta_{nk},$$

где δ_{nk} — символ Кронекера; q_n — соответствующая $\mathbf{U}^{(n)}$ обобщенная (нормальная) координата. При свободных упругих колебаниях тела функции $q_n(t)$ удовлетворяют уравнениям гармонических колебаний $\ddot{q}_n+\omega_n^2 q_n=0$ $(n=1, 2,\ldots)$, где ω_n — n-я частота свободных колебаний.

Потенциальная и кинетическая энергии упругих деформаций в нормальных координатах определяются равенствами

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2 q_n^2,\qquad T=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n^2. \tag{1.4}$$

Пусть тело обладает внутренней вязкостью, а соответствующие ей обобщенные силы определяются при помощи функции Рэлея вида

$$\Psi=\chi b\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\dot{q}_n^2 \tag{1.5}$$

где b — положительная постоянная, а χ — безразмерный параметр.

Наличие внутренней вязкости приводит к затуханию собственных упругих колебаний тела и тем самым оказывает влияние на его движение относительно центра масс как целого. В данной работе излагаются результаты анализа эволюции быстрых вращений тела как целого относительно центра масс в предположении, что оно является динамически симметричным и совершает продольные упругие колебания вдоль оси симметрии. Некоторые вопросы динамики упругого тела в случае его плоских движений в ньютоновском гравитационном поле при наличии продольных колебаний и внутренней вязкости рассмотрены в [2].

2. Пусть центр масс тела движется по эллиптической орбите, e — эксцентриситет орбиты, ν — истинная аномалия

$$d\nu/dt=\omega_0(1-e^2)^{-3/2}(1+e\cos\nu)^2 \tag{2.1}$$

ω_0 — среднее движение центра масс. Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме уравнений Рауса [3].

Пусть $OX_1X_2X_3$ — система координат Кенига. Направление оси OX_1 совпадает с направлением от притягивающего центра к перицентру орбиты, а оси OX_2 — с направлением вектора скорости центра масс в перицентре, а ось OX_3 перпендикулярна плоскости орбиты. За гамильтонову часть переменных Рауса примем переменные Андуайе φ_i, I_i $(i=1, 2, 3)$. На фиг. 1 плоскость OMN перпендикулярна кинетическому моменту I_2 тела относительно центра масс; смысл угловых переменных φ_i ясен из фиг. 1; I_2 — модуль кинетического момента, I_1 и I_3 — его проекции на оси Ox_3 и OX_3 соответственно; $\cos\delta_1=I_3/I_2$, $\cos\delta_2=I_1/I_2$. Величины q_n $(n=1, 2,\ldots)$ примем за лагранжеву часть переменных Рауса.

Обозначим γ_i $(i=1, 2, 3)$ направляющие косинусы радиуса-вектора $\mathbf{r}_0$ центра масс тела относительно притягивающего центра в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Можно показать, что

$$\begin{gathered}\gamma_1=(\cos\beta\cos\varphi_2-\sin\beta\sin\varphi_2\cos\delta_1)\cos\varphi_1-[(\cos\beta\sin\varphi_2+\\+\sin\beta\cos\varphi_2\cos\delta_1)\cos\delta_2-\sin\beta\sin\delta_1\sin\delta_2]\sin\varphi_1\\ \gamma_2=-(\cos\beta\cos\varphi_2-\sin\beta\sin\varphi_2\cos\delta_1)\sin\varphi_1-[(\cos\beta\sin\varphi_2+\\+\sin\beta\cos\varphi_2\cos\delta_1)\cos\delta_2-\sin\beta\sin\delta_1\sin\delta_2]\cos\varphi_1\\ \gamma_3=(\cos\beta\sin\varphi_2+\sin\beta\cos\varphi_2\cos\delta_1)\sin\delta_2+\sin\beta\sin\delta_1\cos\delta_2\\ \beta=\varphi_3-\nu\end{gathered} \tag{2.2}$$

Не приводя довольно громоздких выкладок, выпишем окончательное выражение для функции Рауса системы:

$$R=H^{(0)}-\sum_{n=1}^{\infty}q_nQ_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dot q_n^{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2q_n^2+R_* \tag{2.3}$$

$$H^{(0)}=\frac{(I_2^2-I_1^2)}{2}\left(\frac{\sin^2\varphi_1}{A}+\frac{\cos^2\varphi_1}{B}\right)+\frac{I_1^2}{2C}+\frac{3\mu}{2r_0^3}(A\gamma_1^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2) \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}Q_n=\frac{\mu}{r_0^3}[H_{11}^{(n)}(3\gamma_1^2-1)+H_{22}^{(n)}(3\gamma_2^2-1)+H_{33}^{(n)}(3\gamma_3^2-1)+6H_{12}^{(n)}\gamma_1\gamma_2+\\ +6H_{13}^{(n)}\gamma_1\gamma_3+6H_{23}^{(n)}\gamma_2\gamma_3]+(I_2^2-I_1^2)\left(\frac{H_{22}^{(n)}+H_{33}^{(n)}}{A^2}\sin^2\varphi_1-\frac{H_{12}^{(n)}}{AB}\sin 2\varphi_1+\right.\\ \left.+\frac{H_{33}^{(n)}+H_{11}^{(n)}}{B^2}\cos^2\varphi_1\right)+I_1^2\frac{H_{11}^{(n)}+H_{22}^{(n)}}{C^2}-\\ -2I_1\sqrt{I_2^2-I_1^2}\left(\frac{H_{13}^{(n)}}{AC}\sin\varphi_1+\frac{H_{23}^{(n)}}{BC}\cos\varphi_1\right)\end{gathered} \tag{2.5}$$

где A, B и C — моменты инерции недеформированного тела относительно осей Ox_1, Ox_2 и Ox_3 соответственно, μ — произведение универсальной гравитационной постоянной на массу притягивающего центра

$$\mu/r_0^3=\omega_0^2(1-e^2)^{-3/2}(1+e\cos\nu)^3 \tag{2.6}$$

Величины $H_{ij}^{(n)}$ определяются равенствами

$$H_{ij}^{(n)}=\int_v x_iU_j^{(n)}\,dm \qquad (i,j=1,2,3;\ n=1,2,\ldots) \tag{2.7}$$

Из второго условия в (1.1) следует, что $H_{ij}^{(n)}=H_{ji}^{(n)}$ $(i, j=1, 2, 3; n=1, 2, \ldots)$. Символом $R*$ в (2.3) обозначена линейная по $q_n^{\cdot}$ квадратичная форма относительно q_n, $q_n^{\cdot}$ с коэффициентами, зависящими от переменных Андуайе и истинной аномалии. В пределах точности проводимого ниже асимптотического анализа движения тела явное выражение для $R*$ не потребуется.

Дифференциальные уравнения движения тела относительно центра масс запишутся в виде

$$\varphi_i^{\cdot}=\partial R/\partial I_i, \quad I_i^{\cdot}=-\partial R/\partial\varphi_i \ (i=1, 2, 3) \tag{2.8}$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_n^{\cdot}}+\frac{\partial R}{\partial q_n}=-\frac{\partial \Psi}{\partial q_n^{\cdot}} \quad (n=1,2,\ldots) \tag{2.9}$$

3. Будем считать, что вращение тела как целого относительно центра масс является быстрым по сравнению с движением самого центра масс по орбите, тело достаточно жесткое, а диссипативные силы малы по сравнению с упругими силами.

Опишем эти физические допущения более конкретно. Введем следующие промежутки времени, характеризующие быстроту протекания различных динамических процессов в движении тела: T — период движения центра масс по орбите, $T=2\pi/\omega_0$; T_1 — характерное время для вращения тела как целого относительно центра масс, $T_1=2\pi A/I_2^0$ (I_2^0 — начальное значение модуля кинетического момента); T_2 — характерное время затухания собственных упругих колебаний; T_3 — характерный период свободных упругих колебаний при отсутствии затухания, $T_3=2\pi/\omega_1$ (ω_1 — наименьшая частота колебаний). Принятые физические допущения означают, что выполняются неравенства

$$T_3\ll T_2\ll T_1\ll T \tag{3.1}$$

Пусть T_1 — величина порядка единицы измерения времени. Условие (3.1) позволяет ввести малые параметры μ и ε:

$$\mu=A\omega_0/I_2^0, \quad \varepsilon=I_2^0/A\omega_1 \tag{3.2}$$

Малым будет также параметр χ в диссипативной функции Релея (1.5).

Из (2.3) и (2.9) имеем следующие уравнения для обобщенных координат q_n:

$$q_n^{\cdot\cdot}+2\chi b\omega_n^2 q_n^{\cdot}+\omega_n^2 q_n=Q_n+F_n \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

Здесь Q_n — функция (2.5), а $F_n=d(\partial R*/\partial q_n^{\cdot})/dt-\partial R*/\partial q_n$ — линейная однородная функция относительно q_i, $q_i^{\cdot}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Положив $\omega_n=\varepsilon^{-1}\lambda_n$, перепишем уравнения (3.3) в виде

$$\varepsilon^2 q_n^{\cdot\cdot}+2\chi b\lambda_n^2 q_n^{\cdot}+\lambda_n^2 q_n=\varepsilon^2(Q_n+F_n) \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

Если в (3.4) отбросить правые части, то получим уравнения, описывающие собственные затухающие упругие колебания тела. Характерное время затухания T_2 имеет порядок ε^2/χ. Условие (3.1) можно записать в виде

$$\chi\ll\varepsilon\ll 1\ll\mu^{-1} \quad (\chi\sim\delta^6, \ 1<\delta<2) \tag{3.5}$$

Асимптотическое решение уравнений (2.8), (3.4) можно получить при помощи известных [4] алгоритмов для систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Затухающие колебания соответствуют части асимптотического решения типа погранслоя. На интервалах времени порядка T_1 и бо́льших собственными затухающими колебаниями можно пренебречь и учитывать только регулярную часть асимптотического решения, отвечающую квазистатическим режимам движения тела относительно центра масс, когда его упругие колебания являются вынужденными колебаниями под действием гравитационных сил и сил инерции.

Регулярную часть асимптотического решения уравнений (3.4) можно получить в виде

$$q_n=\frac{\varepsilon^2}{\lambda_n^2}(Q_n-2\chi b Q_n^{\bullet})+O(\varepsilon^4) \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.6}$$

Величины Q_n — функции переменных Андуайе и времени (время входит в Q_n через истинную аномалию). Поэтому

$$Q_n^{\bullet}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial\varphi_i}\varphi_i^{\bullet}+\frac{\partial Q_n}{\partial I_i}I_i^{\bullet}\right)+\frac{\partial Q_n}{\partial t}$$

Заменив здесь производные $\varphi_i^{\bullet}$, $I_i^{\bullet}$ на правые части уравнений (2.8) и учтя, что, согласно (3.6), $q_n\sim\varepsilon^2$, найдем, что

$$Q_n^{\bullet}=(Q_n,H^{(0)})+\partial Q_n/\partial t+O(\varepsilon^2) \tag{3.7}$$

где $H^{(0)}$ — функция (2.4), а $(Q_n, H^{(0)})$ — скобка Пуассона.

Из (3.6) и (3.7) находим выражение обобщенных координат q_n через переменные Андуайе и время в квазистатическом режиме упругих колебаний тела:

$$q_n=\frac{\varepsilon^2}{\lambda_n^2}\left[Q_n-2\chi b(Q_n,H^{(0)})-2\chi b\frac{\partial Q_n}{\partial t}\right]+O(\varepsilon^4) \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.8}$$

Подставив q_n из (3.8) в правые части уравнений (2.8), получим уравнения, описывающие квазистатические режимы движения тела как целого. Эти уравнения имеют форму, близкую к гамильтоновой и могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered}
\varphi_i^{\bullet}=\frac{\partial H}{\partial I_i}+2\chi\varepsilon^2 b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{\partial Q_n}{\partial I_i}\left[(Q_n,H^{(0)})+\frac{\partial Q_n}{\partial t}\right]+O(\varepsilon^4)\\
I_i^{\bullet}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi_i}-2\chi\varepsilon^2 b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{\partial Q_n}{\partial\varphi_i}\left[(Q_n,H^{(0)})+\frac{\partial Q_n}{\partial t}\right]+O(\varepsilon^4), \qquad (i=1,2,3)
\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$H=H^{(0)}-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n^2}{\lambda_n^2} \tag{3.10}$$

Если решение системы (3.9) получено, то деформации тела могут быть найдены из (3.8) и (1.2). Поэтому основные трудности математического исследования квазистатических режимов движения тела связаны с анализом системы (3.9).

Изложенный алгоритм получения приближенной математической модели, описывающей квазистатические движения упругого тела при наличии внутреннего демпфирования в основных своих чертах близок к соответствующим построениям работы [5] [1]. Его обоснование может быть дано методами теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, аналогично тому, как это сделано в [6] при обосновании алгоритма работы [5].

Для анализа системы (3.9) могут быть применены различные методы теории возмущений, например, метод усреднения. Для определенности последующих оценок будем считать, что

$$\varepsilon\sim\mu^6, \quad \chi\sim\mu^7 \tag{3.11}$$

4. Пусть в недеформированном состоянии тело динамически симметрично ($A=B$), а упругие деформации представляют собой продольные колебания вдоль оси симметрии Ox_3. Тогда среди величин (2.7) только величины $H_{33}^{(n)}$ ($n=1, 2, \ldots$) могут быть отличными от нуля, а ось Ox_3 будет осью динамической симметрии и при наличии деформаций.

[1] См. также: *Сидоренко В. В.* Эволюция быстрых вращений упругого кольца в гравитационном поле: Препринт № 93. М.: ИПМ АН СССР им. М. В. Келдыша, 1987.

Вычисления показывают, что функция Рауса (2.3) не зависит от φ_1. Поэтому, согласно (2.8), имеет место интеграл

$$I_1=\mathrm{const} \tag{4.1}$$

Исследуем влияние продольных квазистатических колебаний тела на эволюцию его движения как целого относительно центра масс. Орбиту центра масс считаем круговой.

Уравнения для φ_i, I_i ($i=2$, 3) в (3.9) образуют замкнутую систему уравнений, содержащую I_1 в качестве параметра. Выпишем эти уравнения. При $A=B$ и $H_{ij}^{(n)}=0$ (i, $j\neq3$, $n=1$, $2,\ldots$) из (2.4)–(2.6) получаем

$$H^{(0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)I_1^2+\frac{1}{2A}I_2^2+\frac{3}{2}\omega_0^2(C-A)\gamma_3^2 \tag{4.2}$$

$$Q_n=[\omega_0^2(3\gamma_3^2-1)+(I_2^2-I_1^2)/A^2]H_{33}^{(n)} \tag{4.3}$$

В правой части (4.2) отброшена несущественная постоянная $^3/_2A\omega_0^2$. Из (4.3) и (2.2), (3.2) следует, что производная $\partial Q_n/\partial I_2$ имеет порядок единицы, а производные Q_n по φ_2, φ_3, I_3 — малые величины порядка μ^2; кроме того

$$\begin{gathered}(Q_n,H^{(0)})=6\omega_0^2H_{33}^{(n)}\frac{(2A-C)}{A^2}I_2\gamma_3\frac{\partial\gamma_3}{\partial\varphi_2}\sim\mu^2\\ \partial Q_n/\partial t=-6\omega_0^3H_{33}^{(n)}\gamma_3\partial\gamma_3/\partial\beta\sim\mu^3\end{gathered} \tag{4.4}$$

Введя вместо φ_3 новую переменную β, определяемую последним из равенств (2.2), исключим время из правых частей уравнений (3.9). Учитывая еще соотношения (3.11) и (4.4), уравнения для φ_i, I_i ($i=2$, 3) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\varphi_2^{\boldsymbol\cdot}&=\frac{\partial\Gamma}{\partial I_2}+\chi\varepsilon^2\omega_0^2\varkappa\frac{I_2^2}{3A^2}\gamma_3\frac{\partial\gamma_3}{\partial\varphi_2}+O(\mu^{22})\\ \beta^{\boldsymbol\cdot}&=\frac{\partial\Gamma}{\partial I_3}+\chi\varepsilon^2\omega_0^4\varkappa I_2\gamma_3^2\frac{\partial\gamma_3}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\gamma_3}{\partial I_3}+O(\mu^{24})\\ I_2^{\boldsymbol\cdot}&=-\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi_2}-\chi\varepsilon^2\omega_0^4\varkappa I_2\left(\gamma_3\frac{\partial\gamma_3}{\partial\varphi_2}\right)^2+O(\mu^{24})\\ I_3^{\boldsymbol\cdot}&=-\frac{\partial\Gamma}{\partial\beta}-\chi\varepsilon^2\omega_0^4\varkappa I_2\gamma_3^2\frac{\partial\gamma_3}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\gamma_3}{\partial\beta}+O(\mu^{24})\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\Gamma=\frac{1}{2A}I_2^2-\omega_0I_3+\frac{3}{2}\omega_0^2(C-A)\gamma_3^2-\frac{\varepsilon^2\sigma}{2}\left[\omega_0^2(3\gamma_3^2-1)+\frac{(I_2^2-I_1^2)}{A^2}\right]^2 \tag{4.6}$$

$$\varkappa=72b\frac{(2A-C)}{A^2}\sigma,\qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_{33}^{(n)})^2}{\lambda_n^2} \tag{4.7}$$

Переменные φ_2 и β в системе (4.5) изменяются со скоростями порядка 1 и μ соответственно, а переменные I_2, I_3 — со скоростями порядка μ^2.

5. Правые части уравнений (4.5) являются суммами гамильтоновых и диссипативных составляющих (первые задаются частными производными функции Γ, а вторые пропорциональны параметру χ). Гамильтоновы составляющие не дают эволюции медленных переменных I_2, I_3, их эволюция определяется диссипативными составляющими в правых частях последних двух уравнений системы (4.5).

Опираясь на метод усреднения и современную теорию возмущений гамильтоновых систем [7], можно показать[2], что решения системы уравнений

$$\begin{aligned}I_2^{\boldsymbol\cdot}&=-\chi\varepsilon^2\omega_0^4\varkappa I_2\langle(\gamma_3\partial\gamma_3/\partial\varphi_2)^2\rangle\\ I_3^{\boldsymbol\cdot}&=-\chi\varepsilon^2\omega_0^4\varkappa I_2\langle\gamma_3^2(\partial\gamma_3/\partial\varphi_2)(\partial\gamma_3/\partial\beta)\rangle\end{aligned} \tag{5.1}$$

[2] См. указ. публ. с. 42.

где угловыми скобками обозначена операция двойного усреднения по переменным φ_2 и β, аппроксимируют функции I_2, I_3 с погрешностью $\sim\mu$ на интервале времени $\sim\varepsilon^2\chi\mu^4$ (или, если учесть (3.11), на интервале $\sim\mu^{-23}$).

Проведя указанное в (5.1) усреднение, получим, что эволюция переменных I_2, I_3 определяется уравнениями

$$\begin{aligned} I_2' &= -{}^1/_{64} I_2^{-7}(I_2^2-I_1^2)\left[(3I_2^4+2I_2^2I_3^2+3I_3^4)(I_2^2-I_1^2)+\right.\\ &\left.+4I_1^2(I_2^2+3I_3^2)(I_2^2-I_3^2)\right] \\ I_3' &= -{}^1/_{16} I_2^{-6}(I_2^2-I_1^2)I_3\left[(I_3^2+I_2^2)(I_2^2-I_1^2)+4I_1^2(I_2^2-I_3^2)\right] \end{aligned} \tag{5.2}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной $\tau=\chi\varepsilon^2\omega_0^4\varkappa t$.

Вместо (5.2) удобнее исследовать систему уравнений для углов δ_1 и δ_2 кинетического момента с нормалью к плоскости орбиты и с осью симметрии тела (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \delta_1' &= {}^1/_{64}\sin\delta_1\cos\delta_1\sin^2\delta_2[\sin^2\delta_2(1+3\cos^2\delta_1)+12\sin^2\delta_1\cos^2\delta_2] \\ \delta_2' &= -{}^1/_{64}\sin\delta_2\cos\delta_2[\sin^2\delta_2(3\cos^4\delta_1+2\cos^2\delta_1+3)+ \\ &\quad +4\sin^2\delta_1\cos^2\delta_2(1+3\cos^2\delta_1)] \end{aligned} \tag{5.3}$$

Постоянная I_1 содержится в (5.2) (и в (5.3)) как параметр. Рассмотрим качественно различные случаи $I_1=0$ и $I_1\neq0$. Пусть сначала $I_1=0$, т. е. быстрое вращение тела происходит вокруг оси, перпендикулярной его оси симметрии. Тогда $\delta_2=\pi/2$, а δ_1 удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\delta_1' = {}^1/_{64}\sin\delta_1\cos\delta_1(1+3\cos^2\delta_1) \tag{5.4}$$

Это уравнение имеет три особых точки: $\delta_1=0$, π — неустойчивые и $\delta_1=\pi/2$ — асимптотически устойчивую. Для значений δ_1, отличных от 0, $\pi/2$, π, из (5.4) имеем ($c>0$ — постоянная интегрирования):

$$\frac{\cos^8\delta_1}{\sin^2\delta_1(1+3\cos^2\delta_1)^3} = ce^{-\tau/8} \tag{5.5}$$

Из (5.5) видно, что с возрастанием времени угол δ_1 стремится к $\pi/2$. Отсюда следует, что если в начальный момент времени тело быстро закручено вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии и не совпадающей с нормалью к плоскости орбиты, то с возрастанием времени мгновенная ось вращения тела остается перпендикулярной оси симметрии и стремится расположиться в плоскости орбиты.

При $I_1\neq0$ система уравнений (5.3) имеет однопараметрические семейства особых точек: $\delta_2=0$, π, $\delta_1=\delta_1^*$ — произвольная величина ($0\leqslant\delta_1^*\leqslant\pi$). Особые точки из этих семейств асимптотически устойчивы по отношению к переменной δ_2 и просто устойчивы по отношению к переменной δ_1.

Фазовый портрет системы (5.3) для $0\leqslant\delta_i\leqslant\pi$ ($i=1, 2$) показан на фиг. 2. Для случая $I_1\neq0$ соответствующий фазовый портрет в плоскости I_3, I_2 представлен на фиг. 3. Угол δ_2 с возрастанием времени стремится к значению 0 или π, а δ_1 — к некоторому значению δ_1^*, зависящему от начальных условий. Следовательно, при $I_1\neq0$ направление оси симметрии тела стремится совпасть с направлением кинетического момента, сам же кинетический момент стремится составить в пределе угол δ_1^* с нормалью к плоскости орбиты ($\delta_1^*=\arccos(I_3^*/|I_1|)$, где I_3^* — предельное значение величины I_3).

Описанная диссипативная эволюция переменных I_2, I_3 имеет характерный масштаб времени $\sim\mu^{-23}$. На небольших промежутках времени (например, $\sim\mu^{-2}$) величины I_2, I_3 существенно не изменятся, кинетический момент составляет с нормалью к плоскости орбиты угол $\delta_1=\arccos(I_3/I_2)$ и прецессирует вокруг нее. Приближенное значение средней угловой скорости прецессии отвечает эволюции кинетического момента абсолютно твердого динамически симметричного тела под действием гравитационных моментов [8]:

$$\varphi_3^{\bullet}={}^3/_6\omega_0^2(C-A)(I_2^2-3I_1^2)I_3I_2^{-4}$$

Здесь $I_1=\text{const}$, а I_2, I_3 удовлетворяют дифференциальным уравнениям (5.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Докучаев Л. В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987, 231 с.
2. *Shrivastava S. K., Maharana P. K.* Longitudinal Vibration of Gravity – Stabilized, Large, Damped Spacecraft Modeled as Elastic Continua // Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1985. V. 8. No 6. P. 689–696.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966, 300 с.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, ГФМЛ, 1973, 272 с.
5. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978, Т. 42. № 1. С. 34–42.
6. *Черноусько Ф. Л., Шамаев А. С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 33–42.
7. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. 1985. Т. 3. 304 с.
8. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.X.1988