

УДК 531.36

© 1989

В. И. ГУЛЯЕВ, В. Л. КОШКИН, Л. А. РЫРАХОВСКИЙ

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ, СОЕДИНЕННЫХ ШАРНИРОМ

Перспективы создания крупногабаритных составных орбитальных станций [1]<sup>1</sup> связаны с решением ряда задач динамики относительного движения и управления ориентацией систем твердых тел, соединенных идеальными и неидеальными связями [2–5]. Применение активных систем управления относительным движением систем твердых тел, большие размеры и массы последних приводят к необходимости построения и исследования оптимальных законов управления движением.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления пространственной ориентацией системы двух твердых тел, соединенных идеальным шарниром, при движении центра масс системы по круговой орбите в центральном силовом поле. Предполагается, что управление осуществляется при помощи реактивных моментов, создаваемых двигателями малой тяги. При построении математической модели управляемого движения применен предложенный в [6] подход, позволяющий объединить преимущество двух групп кинематических переменных — самолетных углов и параметров Родрига — Гамильтона.

С использованием численных методов решена задача об оптимальном по быстродействию управлении пространственным разворотом шарнирной связки двух тел относительно центра масс с учетом моментов сил гравитации. Показано, что эта задача является многоэкстремальной. Получено десять локально оптимальных программ управления. Проведен анализ кинематики маневров оптимальной переориентации.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух твердых тел, соединенных в точке  $C$  идеальным шарниром (фиг. 1).

Центр масс  $O$  этой системы движется по круговой траектории в гравитационном поле притягивающего центра  $P$ .

Введем следующие системы координат: инерциальную  $PXYZ$ ; орбитальную  $Oxyz$ , ось  $Oz$  которой является продолжением радиус-вектора  $R$  точки  $O$  в системе координат  $PXYZ$ , ось  $Ox$  направлена по трансверсали к траектории центра масс системы, ось  $Oy$  — по бинормали; жестко связанные с  $i$ -м (индекс  $i$  здесь и далее принимает значения 1 и 2) телом системы  $O_i x_i y_i z_i$ , где  $O_i$  — центр масс, а оси  $O_i x_i$ ,  $O_i y_i$ ,  $O_i z_i$  направлены вдоль главных центральных осей инерции  $i$ -го тела. Тело, с которым связана система координат  $O_1 x_1 y_1 z_1$ , назовем «несущим», другое тело — «несомым».

Примем обозначения:  $\mu$  — гравитационная постоянная;  $m_i$  — масса  $i$ -го тела;  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса системы;  $e = R/R$ ,  $\rho_i$  — радиус-вектор точки  $O_i$  в системе координат  $Oxyz$ ,  $s_i$  — радиус-вектор точки

<sup>1</sup> Белецкий В. В., Ковалева Е. Д. Оптимизация управления ориентацией солнечной космической электростанции. Ин-т прикл. матем. Препринт № 234. М., 1987.

$C$  в системе координат  $O_i x_i y_i z_i$ ,  $s$  — радиус-вектор точки  $O_2$  в системе координат  $O_1 x_1 y_1 z_1$ ,  $r_i$  — радиус-вектор точки  $O_i$  в системе координат  $PXYZ$ ,  $\omega_i$  — абсолютная угловая скорость  $i$ -го тела;  $a_i$  — абсолютное ускорение точки  $O_i$ ;  $a = a_2 - a_1$  (заметим, что  $a = s'' = s_1'' - s_2''$ );  $a_0$  — абсолютное ускорение точки  $O$ ;  $M_i$  и  $V_i$  — главный момент относительно полюса  $O_i$  и главный вектор гравитационных сил, действующих на  $i$ -е тело;  $V$  — главный вектор гравитационных сил, действующих на систему;  $M$  и  $M_0$  — главные моменты гравитационных сил, действующих на систему, относительно полюсов  $O_1$  и  $O$  соответственно;  $M_F$  — момент реакции  $F$  в шарнире  $C$  относительно центра масс несомого тела —  $O_2$ ;  $U_i$  — управляющий реактивный момент, приложенный к  $i$ -му телу;  $\Theta_i$  — тензор инерции  $i$ -го тела в точке  $O_i$ .

Движение системы относительно центра масс описывается уравнениями [7]:

$$\Theta_1 \cdot \omega_1' + \omega_1 \times (\Theta_1 \cdot \omega_1) + \Theta_2 \cdot \omega_2' + \omega_2 \times (\Theta_2 \cdot \omega_2) + m_2 s \times a_2 = M + U_1 + U_2 \quad (1.1)$$

$$\Theta_2 \cdot \omega_2' + \omega_2 \times (\Theta_2 \cdot \omega_2) = M_2 + M_F + U_2 \quad (1.2)$$

где уравнение (1.1) — уравнение вращения рассматриваемой системы тел относительно полюса  $O_1$ , а уравнение (1.2) описывает вращение несомого тела относительно его центра масс-точки  $O_2$ . Величину  $M$  найдем из соотношения

$$M = M_0 - m_2 s \times a_0 = \sum_{i=1}^2 (M_i + \rho_i \times V_i) - m_2 s \times a_0 \quad (1.3)$$

где в предположении малости размеров  $i$ -го тела по сравнению с  $r_i$  [7, 8]  $V_i = -\mu m_i r_i / r_i^3$ ,  $M_i = 3\mu r_i \times (\Theta_i \cdot r_i) / r_i^3$ . Приняв во внимание, что  $r_i = R + \rho_i$ , где  $\rho_1 = -m_2 s / (m_1 + m_2)$ ,  $\rho_2 = m_1 s / (m_1 + m_2)$ , разложим  $V_i$  и  $M_i$  по степеням  $1/R$ . Пренебрегая слагаемыми порядка малости  $1/R^4$  и выше, получим

$$V_i = m_i a_0 + (-1)^{i-1} \mu m [s - 3(e \cdot s)e] / R^3 \quad (1.4)$$

$$M_i = 3\mu e \times (\Theta_i \cdot e) / R^3 \quad (1.5)$$

После подстановки (1.4) в (1.3) найдем

$$M = M_1 + M_2 + 3\mu m (e \cdot s) (s \times e) / R^3 - m_2 s \times a_0 \quad (1.6)$$

Определим момент реакции  $F$  в шарнире  $C$  относительно полюса  $O_2$ :

$$M_F = s_2 \times (m_2 a_2 - V_2) = m s_2 \times a + m \mu s_2 \times [s - 3(e \cdot s)e] / R^3 \quad (1.7)$$

Подставив (1.5) — (1.7) в (1.1) и (1.2), после преобразований получим

$$\Theta_i \cdot \omega_i' + \omega_i \times (\Theta_i \cdot \omega_i) + (-1)^{i-1} m s_i \times \{a + \mu [s - 3(e \cdot s)e] / R^3\} - 3\mu e \times (\Theta_i \cdot e) / R^3 = U_i \quad (i=1, 2) \quad (1.8)$$

Поскольку  $s_i$  — постоянный вектор в системе координат  $O_i x_i y_i z_i$  [7], имеем

$$a = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} s_i'' = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} [\omega_i' \times s_i + \omega_i \times (\omega_i \times s_i)] \quad (1.9)$$

Заметим, что уравнения (1.8), (1.9) описывают пространственное движение шарнирной связки двух тел относительно центра масс, движущегося по произвольной эллиптической кеплеровской орбите.

С учетом справедливого для круговой траектории равенства  $\mu / R^3 = \omega_0^2$ , где  $\omega_0$  — угловая скорость центра масс системы, преобразуем (1.8), (1.9), введя безразмерные переменные  $l_i = s_i (s_1^2 + s_2^2)^{-1/2}$ ,  $\Omega_i = \omega_i / \omega_0$ ,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $l = l_1 - l_2$ ,  $Q_i = \Theta_i \cdot m^{-1} (s_1^2 + s_2^2)^{-1}$ ,  $u_i = U_i \cdot m^{-1} (s_1^2 + s_2^2)^{-1}$ ,  $b = a \omega_0^{-2} (s_1^2 + s_2^2)^{-1/2}$  и обозначив штрихом дифференцирование по  $\tau$ :

$$Q_i \Omega_i' + \Omega_i \times (Q_i \cdot \Omega_i) + (-1)^{i-1} l_i \times [b + l - 3(e \cdot l)e] - 3e \times (Q_i \cdot e) = u_i \quad (i=1, 2)$$

$$b = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} [\Omega_i' \times l_i + \Omega_i \times (\Omega_i \times l_i)] \quad (1.10)$$

Для описания ориентации триэдра осей  $O_1x_1y_1z_1$  в системе координат  $Oxyz$  введем две группы кинематических переменных: кватернион  $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ , где  $\lambda_j$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ) — параметры Родрига — Гамильтона и самолетные углы  $\theta_1, \psi_1, \varphi_1$ . Кинематические уравнения для несущего тела, заданные при помощи самолетных углов, имеют особенность, когда угол тангажа  $\theta_1$  равен  $\pi/2 + \pi n$ ,  $n$  — целое. Поэтому для записи кинематических уравнений для несущего тела прибегнем к параметрам Родрига — Гамильтона

$$2\Lambda' = \Lambda \circ \Omega_1^{(i)} - \Omega_0^{(i)} \circ \Lambda \quad (1.11)$$

где индекс  $(i)$  сверху означает, что вектор задается своими координатами в системе  $O_1x_1y_1z_1$ , символ  $\circ$  означает кватернионное умножение,  $\Omega_0^{(i)}(0, 1, 0)$ ,  $\Omega_1^{(i)}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ .

Поскольку параметры Родрига — Гамильтона связаны первым интегралом  $\sum \lambda_j = 1$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ), система оказывается управляемой лишь на интегральном многообразии. Преодолеть это затруднение позволяет задание конечной ориентации несущего тела нелинейными соотношениями, которые являются выражением самолетных углов  $\theta_1, \psi_1, \varphi_1$  через параметры Родрига — Гамильтона:

$$\theta_1(T) = f_1(\Lambda(T)), \quad \psi_1(T) = f_2(\Lambda(T)), \quad \varphi_1(T) = f_3(\Lambda(T)) \quad (1.12)$$

Таким образом, введение для несущего тела двух групп кинематических переменных [6] позволяет соединить наглядность геометрического представления вращений при помощи углов с удобствами использования регулярных переменных (параметров Родрига — Гамильтона).

В дальнейшем удобно от абсолютной угловой скорости несомого тела перейти к его скорости относительно несущего тела  $\Omega_2 = \Omega_1 + \Omega_{2r}$ , причем  $\Omega_{2r}^{(2)}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ . Ориентацию системы координат  $O_2x_2y_2z_2$ , связанной с несомым телом, относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$ , будем задавать при помощи самолетных углов  $\theta_2, \psi_2, \varphi_2$ . Ниже предполагается, что конструкция соединительного шарнира представляет собой двухстепенной карданный подвес, поэтому  $\theta_2(\tau) = 0$ ,  $\theta_2'(\tau) = 0$ . Кинематические уравнения для несомого тела примут вид

$$\psi_2' = \eta_2 / \cos \varphi_2, \quad \varphi_2' = \xi_2 \quad (1.13)$$

при этом  $\xi_2$  определяется из соотношения  $\xi_2 = -\eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ . Тензоры  $Q_i$  в (1.10) задаются своими компонентами в системах координат  $O_1x_1y_1z_1$ :  $Q_i^{(i)} = \operatorname{diag}\{A_i, B_i, C_i\}$ .

Целью управления являются изменения ориентации системы, первоначально находящейся в гравитационно-стабилизированном состоянии, с гашением угловой скорости в требуемом конечном положении. Управление производится малыми реактивными моментами, по величине сравнимыми с гравитационными. Приведенные управляющие моменты  $u_1$  и  $u_2$  задаются проекциями на оси систем координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$  соответственно:  $u_1^{(1)}(u_{11}, u_{12}, u_{13})$ ,  $u_2^{(2)}(u_{21}, u_{22}, 0)$ .

Сформулируем теперь следующую задачу оптимального управления: построить оптимальное программное управление  $u_1$  и  $u_2$ , обеспечивающее приведение системы (1.10), (1.11), (1.13) из состояния

$$\xi_1(0) = \xi_{10}, \quad \eta_1(0) = \eta_{10}, \quad \zeta_1(0) = \zeta_{10}, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}, \quad \eta_2(0) = \eta_{20} \quad (1.14)$$

$$\Lambda[\theta_1(0), \psi_1(0), \varphi_1(0)] = \Lambda_{10}, \quad \psi_2(0) = \psi_{20}, \quad \varphi_2(0) = \varphi_{20}$$

в состояние

$$\begin{aligned} \xi_1(T) &= \xi_{1T}, \quad \eta_1(T) = \eta_{1T}, \quad \zeta_1(T) = \zeta_{1T}, \quad \xi_2(T) = \xi_{2T} \\ \eta_2(T) &= \eta_{2T}, \quad \theta_1(\Lambda(T)) = \theta_{1T}, \quad \psi_1(\Lambda(T)) = \psi_{1T} \\ \varphi_1(\Lambda(T)) &= \varphi_{1T}, \quad \psi_2(T) = \psi_{2T}, \quad \varphi_2(T) = \varphi_{2T} \end{aligned} \quad (1.15)$$

за минимальное время  $T \rightarrow \min$  при наличии ограничений на управляющие реактивные моменты вида:

$$|u_{1j}(\tau)| \leq W_{1j} \quad (j=1, 2, 3), \quad |u_{2i}(\tau)| \leq W_{2i} \quad (i=1, 2) \quad (1.16)$$

и кинематических (фазовых) ограничений, обусловленных конструкцией соединительного шарнира:

$$|\varphi_2(\tau)| \leq \Phi, \quad |\psi_2(\tau)| \leq \Psi \quad (1.17)$$

**2. Методика решения задачи оптимального управления.** В сформулированной задаче оптимального управления размерность вектора состояния  $x = \text{col}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \psi_2, \varphi_2)$  равна  $n=11$ , размерность вектора управления  $u = \text{col}(u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22})$  равна  $r=5$ .

Методика, применяемая ниже при построении оптимального программного управления, основана на последовательной линеаризации уравнений состояния, краевых условий и ограничений и построении улучшающих вариаций управляющих функций с использованием модификации метода проекции градиента [6, 9]. Контроль ограничений неравенств на отрезке  $(0, T)$  производился с шагом  $\Delta\tau = T/N$ . В проведенных расчетах число узлов принимало значение  $N=100 \div 200$ .

Для исключения вариаций переменных состояния из линеаризованных терминальных условий и фазовых ограничений применялась формула Коши

$$\delta x(v) = \gamma \int_0^v K(v, s) f_u \delta u(s) ds + \int_0^v K(v, s) f ds \delta \gamma \quad (2.1)$$

где  $f = f(x, u)$  — правая часть системы нелинейных дифференциальных уравнений состояния, представленных в нормальной форме;  $v$  — приведенное время ( $\tau = \gamma v$ );  $\gamma$  — варьируемый масштабный множитель;  $f_u = \partial f / \partial u$ ;  $K(v, s) = [X(s)X^{-1}(v)]^T$  — матрица Коши (индекс  $T$  обозначает транспонирование);  $X(s)$  — фундаментальная матрица системы уравнений, сопряженной к системе уравнений в вариациях.

При реализации методики приведение уравнений состояния к нормальному виду и их линеаризация осуществлялись численно с использованием специальных векторно-матричных процедур.

В процессе градиентного спуска осуществлялась проверка множителей Лагранжа ограничений — неравенств «активного набора» [10], что исключало эффект «прилипания» градиента к ограничениям [14]. Процедура оптимизационного поиска прекращалась при выполнении с заданной точностью необходимых условий оптимальности в форме Куна — Таккера [10]. Интегрирование системы уравнений состояния и сопряженной системы уравнений осуществлялось методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

**3. Анализ локально оптимальных программ управления.** Рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию программном изменении ориентации механической системы, состоящей из двух одинаковых твердых тел, соединенных двухступенным идеальным кардановым подвесом.

Тензоры  $Q_i$  в уравнениях (1.10) и векторы  $l_i$ , определяющие положение оси подвеса, заданы своими компонентами в системах координат  $O_i x_i y_i z_i$ :

$$Q_i^{(i)} = \text{diag}\{1, 5, 2; 1, 6; 1, 2\}, \quad l_i^{(i)} = (0; 0; (-1)^{i-1} \sqrt{2}/2) \quad (i=1, 2)$$

Предположим, что в начальный момент времени система гравитационно стабилизирована, т. е.  $\xi_{10} = \xi_{10} = \xi_{20} = \eta_{20} = 0$ ,  $\eta_{10} = 1$ ,  $\theta_{10} = \psi_{10} = \varphi_{10} = \psi_{20} = \varphi_{20} = 0$ .

Необходимо за минимальное время  $T = T_{\min}$  развернуть систему и стабилизировать ее в требуемом конечном состоянии, определяемом условиями

$$\begin{aligned} \xi_{1T} = \xi_{1T} = \xi_{2T} = \eta_{2T} = 0, \quad \eta_{1T} = 1 \\ \theta_{1T} = \varphi_{1T} = \psi_{2T} = \varphi_{2T} = 0, \quad \psi_{1T} = \pi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ограничения на управляющие реактивные моменты (1.16) и кинематические ограничения (1.17) задаются следующими константами  $W_{ij} = W_{2i} = 3,2 \cdot 10^{-6}$  ( $i=1, 2; j=1, 2, 3$ ),  $\Phi = 0,4\pi$  ограничения на угол  $\psi_2(\tau)$  не накладываются.

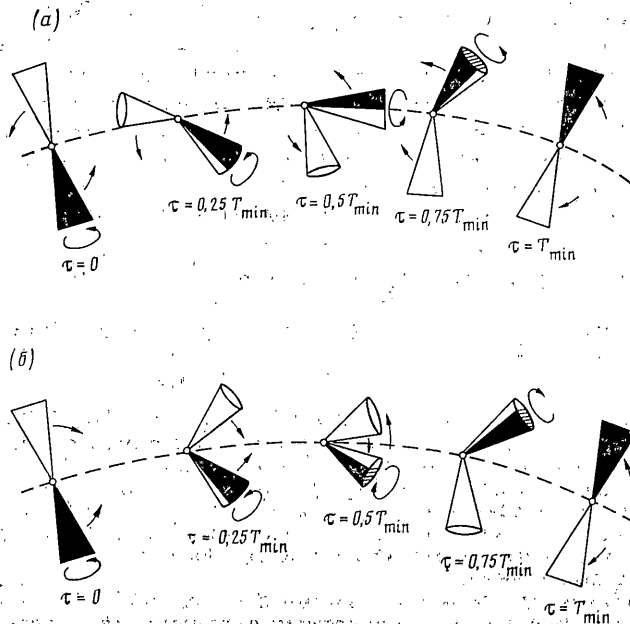
$N$	$\theta_{1T}, \psi_{1T}, \varphi_{1T}, \psi_2, \varphi_{2T}$	$T_{\min}$
1	$\theta_{1T} = \pi, \psi_{1T} = 0, \varphi_{1T} = \pi, \psi_2(\tau) = 4\beta(\tau), \varphi_{2T} = 0$	2,732
2	$\theta_{1T} = \pi, \psi_{1T} = 0, \varphi_{1T} = \pi, \psi_2(\tau) = 4\beta(\tau), \varphi_{2T} = 3\beta(\tau)$	2,814
3	$\theta_{1T} = 0, \psi_{1T} = \pi, \varphi_{1T} = 0, \psi_{2T} = -2\pi, \varphi_{2T} = 0$	2,909
4	$\theta_{1T} = \pi, \psi_{1T} = 0, \varphi_{1T} = \pi, \psi_{2T} = -2\pi, \varphi_{2T} = 0$	3,024
5	$\theta_1(\tau) = 3\beta(\tau), \psi_{1T} = \pi, \varphi_1(\tau) = 2\beta(\tau), \psi_2(\tau) = 4\beta(\tau), \varphi_{2T} = 0$	3,054
6	$\theta_{1T} = \pi, \psi_{1T} = 0, \varphi_{1T} = \pi, \psi_{2T} = 0, \varphi_{2T} = 0$	3,092
7	$\theta_{1T} = 2\pi, \psi_{1T} = \pi, \varphi_{1T} = 0, \psi_{2T} = -2\pi, \varphi_{2T} = 0$	3,572
8	$\theta_{1T} = 2\pi, \psi_{1T} = \pi, \varphi_{1T} = 0, \psi_{2T} = 0, \varphi_{2T} = 0$	3,590
9	$\theta_{1T} = 0, \psi_{1T} = \pi, \varphi_{1T} = 0, \psi_{2T} = 0, \varphi_{2T} = 0$	3,712
10	$\theta_{1T} = 0, \psi_{1T} = \pi, \varphi_{1T} = 0, \psi_{2T} = -4\pi, \varphi_{2T} = 0$	3,846

Отметим, что терминальным условиям (3.1) кинематически эквивалентны условия

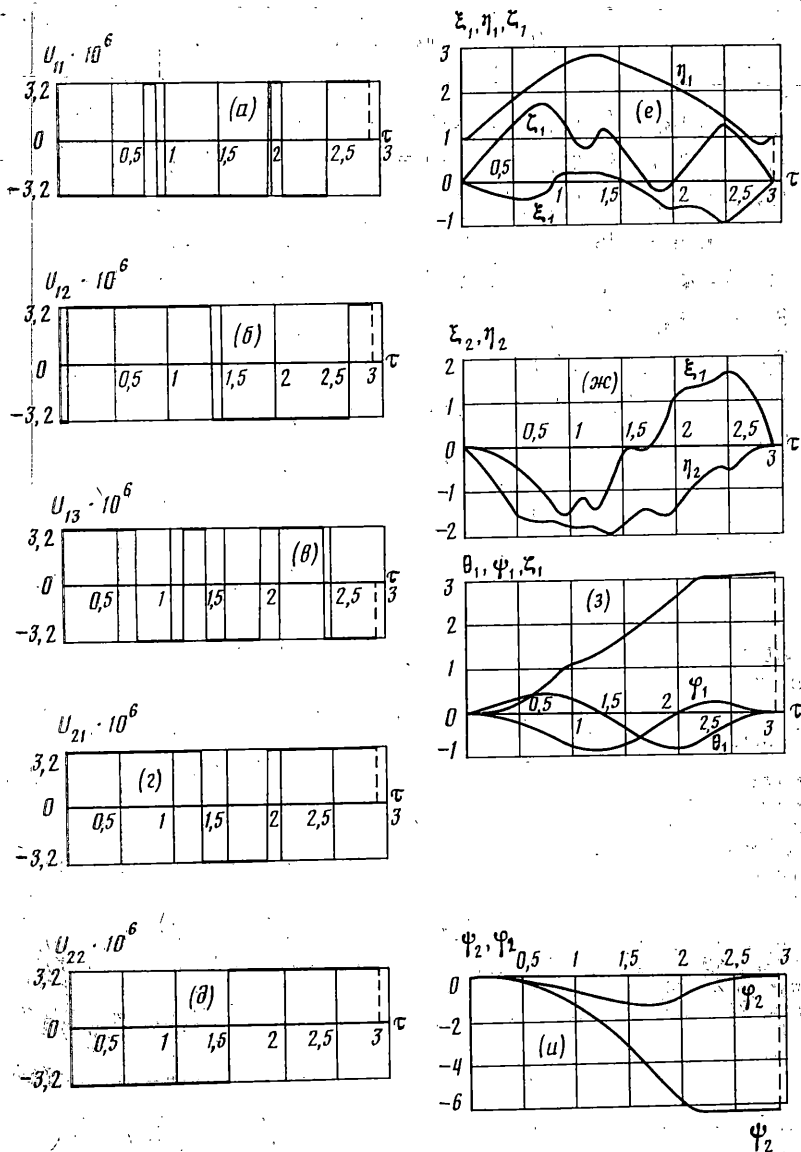
$$\theta_{1T} = \varphi_{1T} = \pi, \quad \psi_{1T} = \psi_{2T} = \varphi_{2T} = 0 \quad (3.2)$$

Кроме того, к одному или нескольким углам, определяющим конечное положение системы тел, можно прибавить величину, кратную  $2\pi$ , что будет соответствовать совершению несущим (несомым) телом одного или нескольких полных оборотов в процессе переориентации.

При построении оптимальных программ управления была проведена серия расчетов, отличающихся начальными приближениями. Результаты расчетов приведены в таблице. В первом столбце таблицы указан номер варианта  $N$ . Во втором столбце выписаны законы изменения углов ориентации, принятые при построении начального приближения ( $\beta(\tau) = \frac{1}{24\pi} [1 - \cos(24\pi\tau/T)]$ ). Углы ориентации, для которых выписаны лишь значения в момент времени  $\tau = T$ , задавались при помощи кубических сплайнов, коэффициенты которых вычислялись из краевых условий (1.14), (1.15) при некотором априорно заданном значении  $T$ . Программа управления, обеспечивающая заданную траекторию движения, строилась путем подстановки зависимостей  $\theta_i(\tau), \psi_i(\tau), \varphi_i(\tau), \psi_2(\tau), \varphi_2(\tau)$  в уравнения движения. Если при этом управляющие функции  $u_{1j}(\tau)$  ( $j=1, 2, 3$ ),  $u_{2i}(\tau)$  ( $i=1, 2$ ) не удовлетворяли ограничениям



Фиг. 2



Фиг. 3

(1.16), то предварительно решалась задача минимизации штрафного функционала

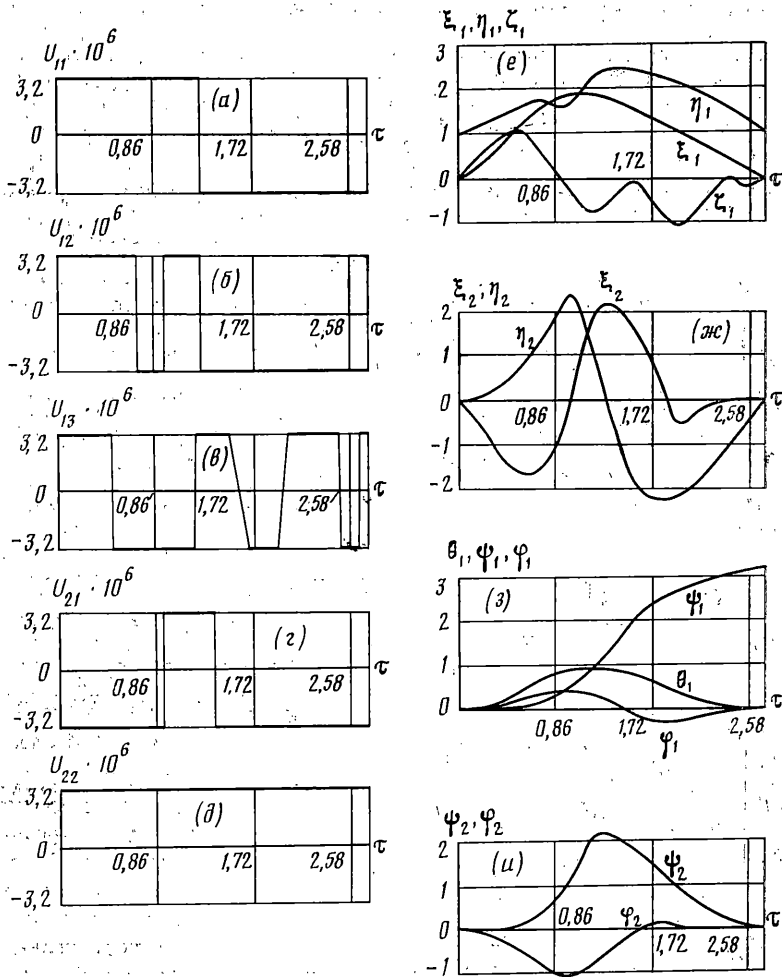
$$G = \int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^3 g_{1j} (u_{1j} - W_{1j})^2 + \sum_{j=1}^2 g_{2j} (u_{2j} - W_{2j})^2 \right\} dt$$

$$g_{ij} = \begin{cases} g_0 \gg 1, & |u_{ij}(\tau)| > W_{ij} \\ 0 & |u_{ij}(\tau)| \leq W_{ij} \end{cases} \quad (i=1, 2; j=1, 2, 3)$$

либо увеличивалось начальное значение времени переориентации  $T$ . В третьем столбце таблицы приведено значение  $T_{\min}$ , соответствующее локально оптимальному решению, полученному при указанном начальном приближении. Как видно из таблицы, рассматриваемая задача оптимального управления является многоэкстремальной. Сходимость итерационной процедуры к тому или иному локально-оптимальному решению существенно зависит от выбора начального приближения. В таблице приведены результаты лишь тех вариантов расчета, которые привели к различным локально-оптимальным решениям.

За исключением вариантов 1 и 6 законы локально-оптимальных управлений носят релейный характер. Фазовые ограничения работают активно в вариантах 2, 3, 4, 8 и 10.

Все найденные локально оптимальные программы управления можно разбить на



Фиг. 4

2 группы. К первой группе относятся решения, в которых несомое тело не совершает вращательного движения относительно несущего (варианты 6 и 9). В варианте 6 несущее тело совершает пространственный разворот, а в варианте 9 — плоский разворот в плоскости орбиты. В варианте 6 управление содержит участок особого управления, остальные управления являются релейными. В обоих вариантах программы управления симметричны относительно момента времени  $\tau = T/2$ .

Для второй группы локально-оптимальных решений характерно то, что несущее тело совершает пространственный разворот, а несомое вращается относительно несущего (варианты 1–5, 7, 8, 10). Из всех решений этой группы лишь программы управления в варианте 7 симметричны относительно  $\tau = T/2$ .

Следует отметить, что не все решения второй группы получены из начальных приближений с пространственной траекторией движения системы. Так, в варианте 3 движение системы, описываемое начальным приближением, происходило в плоскости орбиты, в то время как оптимальная траектория является пространственной. На фиг. 2, а показана последовательность положений системы в различные моменты времени, а на фиг. 3, а–и — локально-оптимальная программа управления, соответствующая варианту 3 начального приближения.

Заметим, что вращение несомого тела относительно несущего существенно уменьшает  $T_{\min}$ . Так, наименьшее значение времени быстрого действия для локально-оптимальных траекторий первой группы на 10% больше, чем наименьшее значение времени быстрого действия для траекторий второй группы.

Как видно из таблицы, в вариантах 4, 5, 6 получены близкие значения  $T_{\min}$ . Однако кинематически траектории движения системы в каждом из этих случаев различны. В варианте 4 несомое тело совершает полный оборот относительно несущего в направлении, противоположном направлению вращения несущего тела. В варианте 5 несомое тело поворачивается относительно несущего в направлении, совпадающем с направлением вращения несущего тела, на угол, примерно равный  $\pi/2$ , затем возвращается в исходное положение. И, наконец, в варианте 6 несомое тело непо-

движно относительно несущего, т. е. система совершает пространственный поворот как твердое тело.

Изменение в начальном приближении конечного значения одного или нескольких углов на величину, кратную  $2\pi$ , влияет на время быстродействия. Замечено, что замена  $\psi_{2T}=0$  на  $\psi_{2T}=-2\pi$  при одинаковых законах изменения остальных углов в начальном приближении приводит к уменьшению  $T_{\min}$  (варианты 9 и 3, 8 и 7, 6 и 4), замена  $\psi_{2T}=0$  на  $\psi_{2T}=-4\pi$  приводит к увеличению  $T_{\min}$  (варианты 9 и 10). Вариант 7 отличается от варианта 3 тем, что вместо  $\theta_{1T}=0$  задано  $\theta_{1T}=2\pi$ , что привело к увеличению  $T_{\min}$ . Однако имеется случай, когда такая замена приводит к уменьшению  $T_{\min}$  (варианты 9 и 8). Это связано с тем, что в варианте 9 траектория движения системы является плоской, в то время как в варианте 8 система совершает пространственный разворот.

В заключение отметим характерные особенности наилучшей (в смысле быстродействия) из полученных локально-оптимальных программ управления (вариант 1). Оптимальная траектория движения системы для этого случая схематично представлена на фиг. 2, б. Все управления, кроме  $u_{13}$ , изменяются по релейному закону (фиг. 4, а, б, г, д). Функция  $u_{13}(\tau)$  (фиг. 4, е) имеет непродолжительный участок неэкстремального управления. Законы изменения угловых скоростей и углов ориентации изображены на фиг. 4, е — и. Угол тангажа  $\theta_1$  возрастает до значения  $\pi/4$ , затем убывает до 0. Угол крена  $\phi_1$  незначительно отклоняется от 0 на протяжении всей траектории движения. Несомое тело поворачивается относительно несущего в направлении, совпадающем с направлением вращения несущего тела на угол  $\psi_2=2\pi/3$ , затем возвращается в исходное положение. На участке  $2/3 T < \tau < T$  угол крена несомого тела  $\phi_2$  близок к 0.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джерри Грей. Космическая станция преодолевает все препятствия // Аэрокосмическая техника. № 1. 1988. С. 159—163.
2. Виттенбург И. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
3. Задачи стабилизации составных спутников./Сб. статей под ред. В. В. Белецкого. М.: Мир, 1975. 205 с.
4. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Исследование космического пространства. Т. 11. ВИНТИ. 1978. 223 с.
5. Мохамед Э. А., Смольников Б. А. Свободное движение парной связи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. № 5. 1987. С. 28—34.
6. Гуляев В. И., Кошкин В. Л., Савилова И. В. Оптимальное по быстродействию управление трехосной ориентацией твердого тела при ограниченных параметрах управления // Изв. АН СССР. МТТ. № 5. 1986. С. 14—15.
7. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. 824 с.
8. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
9. Баженов В. А., Гуляев В. И., Кошкин В. Л., Савилова И. В. Алгоритм численного решения задачи Майера для нелинейной динамической системы // Вычислительная и прикладная математика. № 56. Киев: Вища школа, 1985. С. 107—113.
10. Численные методы условной оптимизации/Под ред. Ф. Гилда, У. Мюрера. М.: Мир, 1977. 290 с.
11. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.

Киев

Поступила в редакцию  
30.XII.1988