

УДК 531.55 : 521.1

© 1989

А. Д. ГЕРМАН, М. Ю. ОВЧИННИКОВ, В. И. ПЕНЬКОВ,
В. А. САРЫЧЕВ

НЕРЕЗОНАНСНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ СТЕРЖНЯМИ В РЕЖИМЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ ОРИЕНТАЦИИ

Исследуются колебания трехосного гравитационно-ориентированного спутника, центр масс которого движется по круговой орбите с произвольным наклоном. Энергия собственных колебаний спутника рассеивается с помощью гистерезисных стержней из магнитомягкого материала. В пространстве параметров задачи выделены области, где реализуется экспоненциальный закон уменьшения амплитуды малых колебаний в предположении, что ни один из стержней не совпадает с главными осями инерции спутника. Исследовано установившееся движение спутника. Исходя из требований минимизации амплитуды этого движения, определено необходимое количество и взаимное расположение стержней.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Магнитные гистерезисные стержни, изготовленные из магнитомягких материалов, представляют собой наиболее простое и надежное устройство для успокоения собственных колебаний спутника с пассивными системами ориентации [1, 2]. Рассеяние энергии собственных колебаний, которые возникают в результате отделения от носителя и случайных возмущений в течение полета, происходит за счет гистерезисных потерь в стержнях при их перемагничивании в геомагнитном поле. Анализ динамики гравитационно-ориентированного спутника с гистерезисными стержнями, традиционно установленными вдоль главных осей инерции, показал [3], что эффективно демпфируются колебания спутника только относительно плоскости орбиты. Для эффективного демпфирования колебаний спутника в плоскости орбиты гистерезисных стержней оказывается недостаточно. Установленная на конце гравитационной штанги спиральная пружина обеспечила требуемую эффективность демпфирования этих колебаний. Отказ от традиционной схемы расположения стержней позволил заметно повысить эффективность демпфирования колебаний в плоскости орбиты [4]. В этом случае демпфирующий эффект проявляется, как и при наличии спиральной пружины, уже в линейном приближении. Представляется целесообразным обобщить эти результаты, рассмотрев пространственные движения спутника с гистерезисными стержнями, непараллельными его главным осям инерции.

Одна из основных трудностей при анализе динамики спутников с указанной системой демпфирования заключается в выборе адекватной модели гистерезиса. Наиболее распространенные модели описаны и проанализированы в [2, 5]. Используемая модель, с одной стороны, должна учитывать основные свойства гистерезиса, с другой — быть настолько простой, чтобы ее применение позволяло получить обозримые соотношения между параметрами спутника и характеристиками его движения.

Предполагаем, что перемагничивание стержней происходит в областях, достаточно удаленных от областей насыщения и нелинейности коэффициента магнитной проницаемости. Тогда в качестве упрощенной модели будем использовать модель параллелограмма, согласно которой петля гистерезиса аппроксимируется параллелограммом. Расстояния между верхней и нижней сторонами параллелограмма и их наклон фиксированы. Положение боковых сторон определяется точками переключения. В этих точках

меняется знак производной от перемещающегося стержень поля по времени. Модель параллелограмма отражает основные свойства гистерезисной зависимости, согласно которым потери энергии при перемещении пропорциональны площади петли гистерезиса и намагниченность стержня практически не зависит от модуля скорости изменения проекции на ось стержня внешнего поля, а зависит от знака скорости. Проверку правильности результатов, полученных на основании сделанных допущений относительно гистерезисной зависимости, проведем при помощи уточненной модели гистерезиса [6], с достаточной точностью описывающей явление гистерезиса.

Предположим, что спутник есть твердое тело с фиксированными в нем гистерезисными стержнями. Центр масс спутника движется по неподвижной в абсолютном пространстве круговой орбите. Геомагнитное поле аппроксимируем полем помещенного в центр Земли диполя, ось которого направлена вдоль ее оси вращения. Гравитационное поле — центральное, ньютоново. Взаимным влиянием гистерезисных стержней пренебрегаем.

Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс введем две правые прямоугольные системы координат.

$Ox_1x_2x_3$ — связанная со спутником система координат. Ее оси суть главные центральные оси инерции спутника. $OX_1X_2X_3$ — орбитальная система координат. Ось OX_3 направлена вдоль радиуса-вектора точки O относительно центра масс Земли. Ось OX_1 совпадает с касательной к орбите в точке O .

Положение связанной со спутником системы координат относительно орбитальной системы определим с помощью углов α, β, γ (фиг. 1). Элементы a_{kn} ($a_{kn} = \cos(X_k, x_n)$; $k, n = 1, 2, 3$) матрицы перехода имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha \cos \beta, & a_{12} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ a_{21} &= \sin \beta, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma \\ a_{31} &= -\sin \alpha \cos \beta, & a_{32} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ a_{13} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, & a_{33} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{aligned}$$

Отнесенный к μ_m/ρ^3 вектор \mathbf{H} напряженности геомагнитного поля в точке O задается проекциями H_{x_j} ($j = 1, 2, 3$) на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 , причем

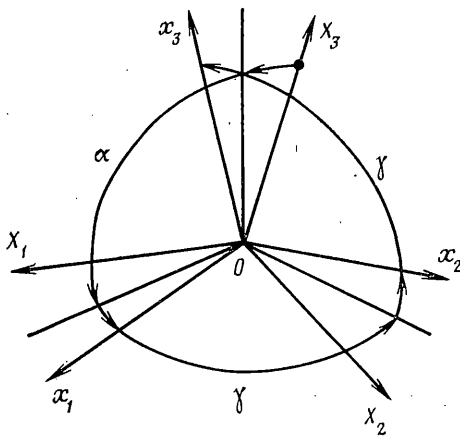
$$H_{x_j} = \sum_{n=1}^3 a_{nj} H_n$$

$$H_1 = \cos u \sin i, \quad H_2 = \cos i, \quad H_3 = -2 \sin u \sin i$$

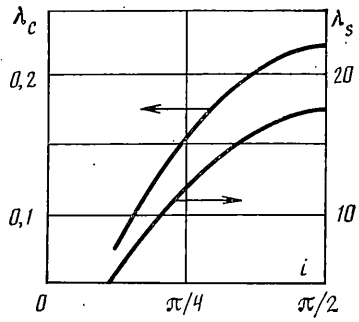
где ρ — радиус орбиты, u — аргумент широты, i — наклонение орбиты. Будем предполагать, что магнитный материал на спутнике представлен в виде стержней из магнитомягкого материала с большим удлинением. В этом случае вектор магнитной индукции в теле стержня направлен практически вдоль стержня [7], и для магнитного момента \mathbf{m} стержня можно записать, используя абсолютную электромагнитную систему единиц СГСМ, выражение $\mathbf{m} = \mu V \mu_m W(H_\tau) \mathbf{e} / (4\pi \rho^3)$, где μ — относительная магнитная проницаемость стержня, V — его объем, μ_m — магнитный момент Земли, \mathbf{e} — единичный вектор с проекциями e_1, e_2, e_3 на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 , направленный вдоль стержня

$$\begin{aligned} W(H_\tau) &= H_\tau - k \operatorname{sign}(dH_\tau/dt) / 2 \\ H_\tau &= \rho^3 \mathbf{H} \mathbf{e} / \mu_m \end{aligned} \quad (1.1)$$

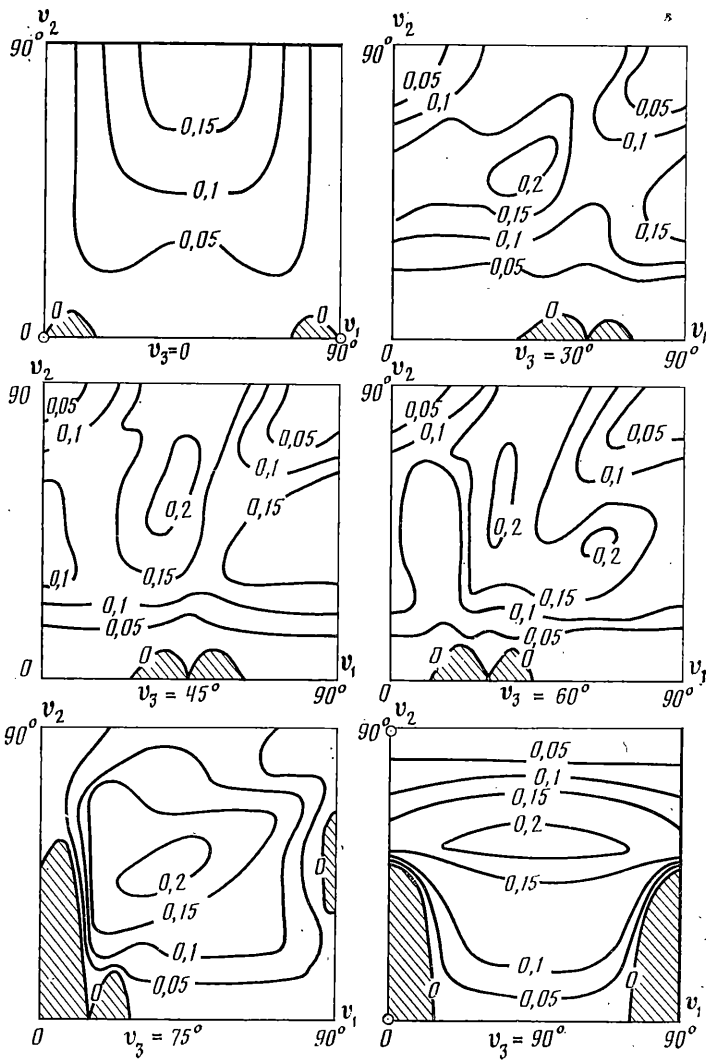
гистерезисная функция, реализующая модель параллелограмма, k — постоянная, характеризующая коэрцитивную силу стержня. При использовании уточненной модели гистерезиса функция $W(H_\tau)$ реализуется численно [6]. Пусть A, B, C — моменты инерции спутника относительно осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 ; $\omega_0 \Omega_1, \omega_0 \Omega_2, \omega_0 \Omega_3$ — проекции абсолютной угловой скорости спутника на эти оси; $\omega_0^2 = \mu_g / \rho^3$; μ_g — гравитационный параметр Земли. Тогда, обозначая $\Theta_A = A/B, \Theta_C = C/B, \varepsilon = \mu \mu_m^2 V \omega_0^2 / (4\pi \mu_g^2 B)$, запишем



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

уравнения движения спутника с одним стержнем в виде [4]:

$$\begin{aligned}\Omega_1^* &= (\Theta_C - 1) (3a_{32}a_{33} - \Omega_2\Omega_3) / \Theta_A + (\varepsilon / \Theta_A) W(H_\tau) (e_2 H_{x3} - e_3 H_{x2}) \\ \Omega_2^* &= (\Theta_A - \Theta_C) (3a_{33}a_{31} - \Omega_3\Omega_1) + \varepsilon W(H_\tau) (e_3 H_{x1} - e_1 H_{x3}) \\ \Omega_3^* &= (1 - \Theta_A) (3a_{31}a_{32} - \Omega_1\Omega_2) / \Theta_C + (\varepsilon / \Theta_C) W(H_\tau) (e_1 H_{x2} - e_2 H_{x1}) \\ \alpha^* &= (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma) / \cos \beta - 1 \\ \beta^* &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma \\ \gamma^* &= \Omega_1 - (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma) \operatorname{tg} \beta\end{aligned}\quad (1.2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\omega_0 t$, с точностью до аддитивной постоянной совпадающему с аргументом широты u . Не теряя общности, эту постоянную будем считать равной нулю. При наличии нескольких гистерезисных стержней их взаимным влиянием пренебрегаем, и общий магнитный момент определяется суммой магнитных моментов всех стержней.

2. Система уравнений в стандартном виде. Будем рассматривать малые колебания спутника, моменты инерции которого подчиняются условию

$$1 > \Theta_A > \Theta_C \quad (2.1)$$

в окрестности положения равновесия

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad (2.2)$$

существующего при $\varepsilon = 0$. Систему (1.2) перепишем в виде¹

$$\begin{aligned}\alpha'' + k_1^2 \alpha &= \varepsilon f_1 + \dots; & \beta'' + n_2 \gamma' + k_2^2 \beta &= \varepsilon f_2 + \dots \\ \gamma'' + n_3 \beta' + k_3^2 \gamma &= \varepsilon f_3 + \dots\end{aligned}\quad (2.3)$$

где точками обозначены члены степени выше первой по α , β , γ , α' , β' , γ' , выражения для f_j ($j=1, 2, 3$) даны в¹ и введены обозначения

$$\begin{aligned}k_1^2 &= 3(\Theta_A - \Theta_C), & k_2^2 &= (1 - \Theta_A) / \Theta_C, & k_3^2 &= 4(1 - \Theta_C) / \Theta_A \\ n_2 &= -(\Theta_A + \Theta_C - 1) / \Theta_C, & n_3 &= (\Theta_A + \Theta_C - 1) / \Theta_A\end{aligned}$$

В дальнейшем считаем, что выполнены условия (2.1). Тогда k_1 , k_2 , k_3 — действительные числа и при $\varepsilon = 0$ система (2.3) имеет решение

$$\begin{aligned}\alpha &= A_1 \cos \psi_1, & \alpha' &= -A_1 \omega_1 \sin \psi_1 \\ \beta &= A_2 \kappa_2 \sin \psi_2 + A_3 \kappa_3 \sin \psi_3 \\ \beta' &= A_2 \kappa_2 \omega_2 \cos \psi_2 + A_3 \kappa_3 \omega_3 \cos \psi_3\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\gamma = A_2 \cos \psi_2 + A_3 \cos \psi_3$$

$$\gamma' = -A_2 \omega_2 \sin \psi_2 - A_3 \omega_3 \sin \psi_3$$

$$\psi_j = \omega_j u + \xi_j, \quad (j=1, 2, 3)$$

где $\omega_1 = k_1$, ω_2 и ω_3 — корни биквадратного уравнения

$$\begin{aligned}(\omega^2 - k_2^2)(\omega^2 - k_3^2) + \omega^2 n_2 n_3 &= 0 \\ \kappa_m &= (\omega_m^2 - k_3^2) / (\omega_m n_3) \quad (m=2, 3)\end{aligned}$$

амплитуды A_j и фазы ξ_j определяются начальными условиями движения. Рассматривая (2.4) как формулы перехода к новым переменным A_j и ξ_j , получаем следующую систему:

$$A_1^* = -\varepsilon f_1 \omega_1^{-1} \sin \psi_1, \quad \xi_1^* = -\varepsilon f_1 \omega_1^{-1} \cos \psi_1 \quad (2.5)$$

$$A_m^* = (-1)^m \varepsilon (\omega_2^2 - \omega_3^2)^{-1} [n_3 f_2 \cos \psi_m + (k_2^2 - \omega_m^2) \omega_m^{-1} f_3 \sin \psi_m]$$

$$\xi_m^* = (-1)^m \varepsilon (\omega_2^2 - \omega_3^2)^{-1} [-n_3 f_2 \sin \psi_m + (k_2^2 - \omega_m^2) \omega_m^{-1} f_3 \cos \psi_m] \quad (m=2, 3)$$

Следует отметить, что при выполнении условия (2.1) выражение

¹ Сарычев В. А., Пеньков В. И., Овчинников М. Ю., Герман А. Д. Исследование движений гравитационно-ориентированного спутника с гистерезисными стержнями. Нерезонансный случай: Препринт № 39. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1987.

$\omega_2^2 - \omega_3^2$ не обращается в нуль ни при каких физически реализуемых значениях инерционных параметров Θ_A, Θ_C .

Уравнения (2.5) представляют собой систему в стандартной форме с малым параметром, удобной для применения метода усреднения [8]. Следует отметить, что правые части системы (2.5) разрывны в силу выбора вида зависимости $W(H_\tau)$ (1.1). Однако эти разрывы присущи лишь используемой модели параллелограмма и не адекватны физическому процессу в стержнях, поэтому будем считать, что реально функция $\text{sign } H_\tau$ в $W(H_\tau)$ аппроксимируется конечным отрезком ряда Фурье. В этом случае к системе (2.5) можно применить известные теоремы метода усреднения.

Перепишем уравнения (2.5) в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{x}) \quad (2.6)$$

где $\mathbf{x} = (A_1, A_2, A_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — фазовый вектор, \mathbf{X} — соответствующий ему вектор правых частей, $\boldsymbol{\Theta} = (u, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$, $\Theta_n = \omega_n u$ ($n=1, 2, 3$).

Функцию $\mathbf{X}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{x})$ можно представить в виде кратного ряда Фурье

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}} \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) e^{j\mathbf{l}\boldsymbol{\Theta}}$$

Здесь $\mathbf{l} = (l_0, l_1, l_2, l_3)$ — вектор с целочисленными компонентами, $j^2 = -1$, коэффициенты \mathbf{c}_1 находятся по формуле

$$\mathbf{c}_1(\mathbf{x}) = (16\pi^4)^{-1} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{X}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{x}) e^{-j\mathbf{l}\boldsymbol{\Theta}} du d\Theta_1 d\Theta_2 d\Theta_3$$

Будем предполагать, что $\mathbf{l}\boldsymbol{\omega} = 0$ только при $\mathbf{l} = 0$, где $\boldsymbol{\omega} = (1, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, т. е. рассматривается случай нерезонансного движения. Обозначим

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{c}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}_* = \sum_{\mathbf{l} \neq 0} \mathbf{c}_1(\mathbf{x}) e^{j\mathbf{l}\boldsymbol{\omega}u / (j\mathbf{l}\boldsymbol{\omega})}$$

Если $\boldsymbol{\zeta}$ — решение уравнения первого приближения

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \varepsilon \mathbf{X}_0(\boldsymbol{\zeta}) \quad (2.7)$$

то

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\zeta} + \varepsilon \mathbf{X}_*(u, \boldsymbol{\zeta}) \quad (2.8)$$

улучшенное первое приближение.

При анализе системы (2.5) в первую очередь представляют интерес скорость затухания собственных колебаний спутника и наибольшее отклонение от осей орбитальной системы координат в установившемся движении. Обе характеристики вполне определяются мгновенной амплитудой колебаний, поэтому в дальнейшем будем рассматривать, как правило, только те компоненты векторов \mathbf{x} и \mathbf{X} , которые относятся к амплитудам. Входящие в (2.8) слагаемые $\boldsymbol{\zeta}$ и \mathbf{X}_* можно интерпретировать следующим образом. Исследование эволюции величины $\boldsymbol{\zeta}$ дает информацию об устойчивости движения спутника с гистерезисными стержнями и о быстродействии системы в том случае, когда имеет место затухание колебаний. Анализ функции \mathbf{X}_* позволяет судить об амплитуде вынужденных колебаний спутника с рассматриваемой системой демпфирования.

3. Построение усредненного движения. Выполним вспомогательные преобразования. Представим H_τ в виде

$$\begin{aligned} H_\tau &= \Phi [d - \sin(u - u')] \sin i \\ \sin u' &= (e_x - 2e_z) / \Phi, \quad \cos u' = (e_x + 2e_z) / \Phi \\ d &= e_x \Phi^{-1} \text{ctg } i, \quad \Phi = [(e_x - 2e_z)^2 + (e_x + 2e_z)^2]^{1/2} > 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда при $\sin i > 0$ имеем

$$W(H_\tau) = H_\tau^{-1/2} k \text{sign}[d - \sin(u - u')] \quad (3.2)$$

Представляя второе слагаемое из (3.2) в виде ряда Фурье, получим выражение

$$\begin{aligned} W(H_\tau) &= e_x \sin i \cos u + e_x \cos i - 2e_z \sin i \cos u - \\ &- \frac{k}{\pi} \left[u_0 + \sum_{s=0}^{\infty} 2(2s+1)^{-1} \cos(2s+1)u_c \sin(2s+1)(u - u') + \right. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$+ \left. \sum_{s=1}^{\infty} s^{-1} \sin 2su_0 \cos 2s(u-u') \right]$$

$$e_x = e_1 - \beta e_2 + \alpha e_3, \quad e_y = \beta e_1 + e_2 - \gamma e_3$$

$$e_z = -\alpha e_1 + \gamma e_2 + e_3$$

$$H_\tau = e_x \sin i \cos u + e_y \cos i - 2e_z \sin i \sin u$$

Величина u_0 здесь введена таким образом, что $\sin u_0 = d$, $\cos u_0 > 0$. Выражения для u' , u_0 можно преобразовать к виду

$$\sin u' = \nu [-2e_3 + e_1 \nu^2 Q], \quad \cos u' = \nu [e_1 + 2e_3 \nu^2 Q] \quad (3.4)$$

$$u_0 = \nu (\beta e_1 + \gamma e_3) \operatorname{ctg} i$$

$$\cos u_0 = 1, \quad \nu = (e_1^2 + 4e_3^2)^{-1/2}$$

$$Q = 2\alpha (e_1^2 + e_3^2) - 2\beta e_2 e_3 - 2\gamma e_1 e_2 - 3\alpha e_1 e_3 - \beta e_1 e_2 + 4\gamma e_2 e_3$$

Предполагаем, что для всех стержней, установленных на спутнике, выполняется неравенство $e_1^2 + e_3^2 \neq 0$. Случай $e_1^2 + e_3^2 = 0$ требует отдельного рассмотрения. Перейдем к построению усредненного движения спутника. С учетом введенного выше предположения $1\omega \neq 0$ проведем независимое по u и всем ψ_j усреднение правой части системы (2.6) для получения уравнения (2.7) относительно ξ . С учетом выражения (3.3) найдем средние по явно входящему времени u значения

$$\langle W(H_\tau) \rangle_u = e_y \cos i - (k/\pi) u_0 \quad (3.5)$$

$$\langle W(H_\tau) \cos u \rangle_u = 1/2 e_x \sin i - (k/\pi) \sin u' \cos u_0$$

$$\langle W(H_\tau) \sin u \rangle_u = -e_z \sin i + (k/\pi) \cos u' \cos u_0$$

Используя выражения (3.5), нетрудно вычислить значения $\langle f_j \rangle_u$ усредненных по u функций f_j ($j=1, 2, 3$), входящих в правую часть системы (2.3). Полученные усреднением по u уравнения движения с гладкими правыми частями помимо дальнейшего усреднения по ψ_j могут быть использованы для анализа движения спутника с помощью стандартных программ численного интегрирования.

Остается усреднить правые части системы (2.5) по углам $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ($m=2, 3$):

$$\langle f_1 \sin \psi_1 \rangle_{u, \psi} = (8\pi^3)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f_1 \rangle_u \sin \psi_1 d\psi_1 d\psi_2 d\psi_3$$

$$\langle f_2 \cos \psi_m \rangle_{u, \psi} = (8\pi^3)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f_2 \rangle_u \cos \psi_m d\psi_1 d\psi_2 d\psi_3 \quad (3.6)$$

$$\langle f_3 \sin \psi_m \rangle_{u, \psi} = (8\pi^3)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f_3 \rangle_u \sin \psi_m d\psi_1 d\psi_2 d\psi_3$$

Уравнения первого приближения (2.7) после вычисления интегралов (3.6) запишутся в виде

$$A_j = -\lambda_j A_j, \quad \lambda_1 = 9\epsilon (2\pi)^{-1} k e_1^2 e_3^2 \nu^3 \sin i$$

$$\lambda_m = (-1)^{m+1} \epsilon (\omega_2^2 - \omega_3^2)^{-1} \{ (\Theta_A + \Theta_C - 1) [(\Theta_A + 1) (3/2 e_1 e_3 \sin i + 2\pi^{-1} k \nu (e_1^2 + e_3^2)) + 3/2 e_1 e_3 \sin i - 2\pi^{-1} k \nu] (2\Theta_A \Theta_C)^{-1} +$$

$$+ k e_3^2 \nu^3 (k_3^2 - \omega_m^2) (e_2^2 + \nu^{-2} \operatorname{ctg}^2 i) (2\pi \Theta_C)^{-1} +$$

$$+ k e_3^2 \nu^3 (k_2^2 - \omega_m^2) (16e_2^2 + \nu^{-2} \operatorname{ctg}^2 i) (2\pi \Theta_A)^{-1} \} \sin i \quad (j=1, 2, 3; m=2, 3) \quad (3.7)$$

Если хотя бы одно из λ_j обращается в нуль, требуется дополнительное исследование. Для движения по тангажу такое исследование требуется, когда стержень установлен вдоль оси Ox_1 или Ox_3 (этот случай был рассмотрен для плоского движения спутника по полярной орбите [4]). Если

же $\lambda_j \neq 0$, то движение спутника представляет собой колебания с экспоненциально изменяющейся амплитудой $A_j(u) = A_j(0) \exp(-\lambda_j u)$. Движение по тангажу всегда устойчиво ($\lambda_1 > 0$), а амплитуды колебаний по крену и рысканью убывают, если выполнено условие

$$\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 \quad (3.8)$$

Ввиду громоздкости выражений (3.7), проверку выполнения неравенств (3.8) приходится выполнять численно, но предварительно следует решить вопрос о минимально необходимом количестве стержней на спутнике и их взаимном расположении.

4. Улучшенное первое приближение. Укажем путь построения обобщенных рядов Фурье для функций, стоящих в правой части системы (2.6). Из (3.4) легко выразить величину

$$u' = u'' + vQ \quad (4.1)$$

где u'' определяется соотношениями

$$\sin u'' = -2ve_3, \cos u'' = ve_1 \quad (4.2)$$

после чего следует найти выражения для $\sin nu''$, $\cos nu''$, $\sin nu_0$, $\cos nu_0$, входящих в (3.3). Подставив (4.1), (3.3) в f_j ($j=1, 2, 3$), а затем в (2.5), получим искомые Фурье-разложения. Их главный член представляет собой правую часть для уравнений первого приближения (2.7), а остальные слагаемые после интегрирования по u дадут выражение для X_* . Отметим здесь, что ряды Фурье в правой части (2.5) содержат в качестве слагаемых выражения вида (в этих произведениях может отсутствовать один сомножитель):

$$\left\{ \begin{array}{c} \cos nu \\ \sin nu \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \cos \psi_j \\ \sin \psi_j \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \cos \psi_m \\ \sin \psi_m \end{array} \right\} \quad (n, j, m=1, 2, 3)$$

Следовательно, частоты, для которых выполнено одно из соотношений $\omega_j = n$, $\pm \omega_j \pm \omega_m = n$, $\omega_j = \omega_m$ являются резонансными, и эти случаи требуют особого рассмотрения. При малых отклонениях наглядной характеристикой точности ориентации, которой можно добиться установкой на спутнике гистерезисных стержней, может служить вынужденное решение системы (2.3), где в функциях f_j учитываются только члены, не зависящие от углов ориентации спутника. Подставляя $W(H_\tau)$ из (3.3) в f_j и отыскивая решение системы (2.3) в виде формального ряда по целым степеням параметра ε ($\alpha = \varepsilon \alpha_1 + \dots$, $\beta = \varepsilon \beta_1 + \dots$, $\gamma = \varepsilon \gamma_1 + \dots$), можно получить для α_1 , β_1 , γ_1 довольно громоздкие выражения², имеющие следующую структуру:

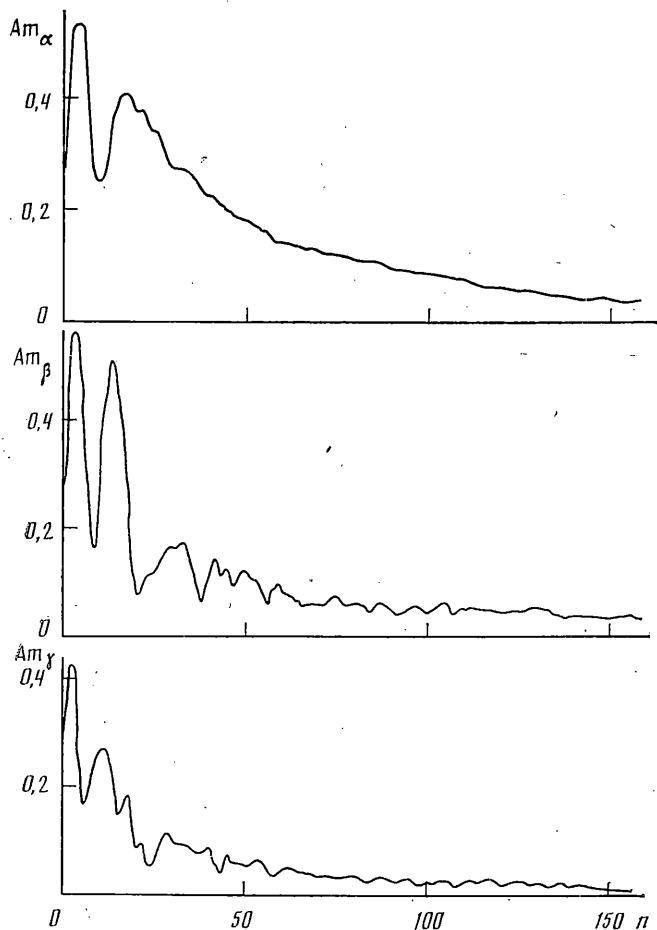
$$\alpha_1 = P_\alpha + kR_\alpha, \beta_1 = P_\beta + kR_\beta, \gamma_1 = P_\gamma + kR_\gamma \quad (4.3)$$

Здесь P_n , R_n ($n = \alpha, \beta, \gamma$) — коэффициенты, зависящие от наклона орбиты, ориентации стержня в теле спутника и инерционных параметров спутника. Так как у магнитомягкого материала обычно коэрцитивная сила невелика и, следовательно, k мало, то основной вклад в решение (4.3) вносят первые слагаемые. Устранить их влияние можно, установив на спутнике три взаимно ортогональных одинаковых стержня. В этом случае с учетом аддитивности решения системы (2.3) и соотношений $\Sigma^* e_n e_j = \delta_{nj}$ ($n, j=1, 2, 3$; знак Σ^* означает суммирование по всем установленным на спутнике стержням; δ_{nj} — символ Кронекера) получим для α , β , γ с точностью $O(\varepsilon^2)$:

$$\alpha = 2\pi^{-1} \varepsilon k \sin i \sum^* v \left\{ (e_1^2 + e_3^2) k_1^{-2} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} [3\beta e_1 e_3 \sin 2s(u-u'') + (e_1^2 + e_3^2) \cos 2s(u-u'')] / [(4s^2 - 1)(4s^2 - k_1^2)] \right\}$$

$$\beta = 2\pi^{-1} \varepsilon k \sum^* \left\{ -ve_2 e_3 (\Theta_c k_2^2)^{-1} \sin i + \cos i \sum_{s=1}^{\infty} [e_1 \Theta_c^{-1} [k_3^2 -$$

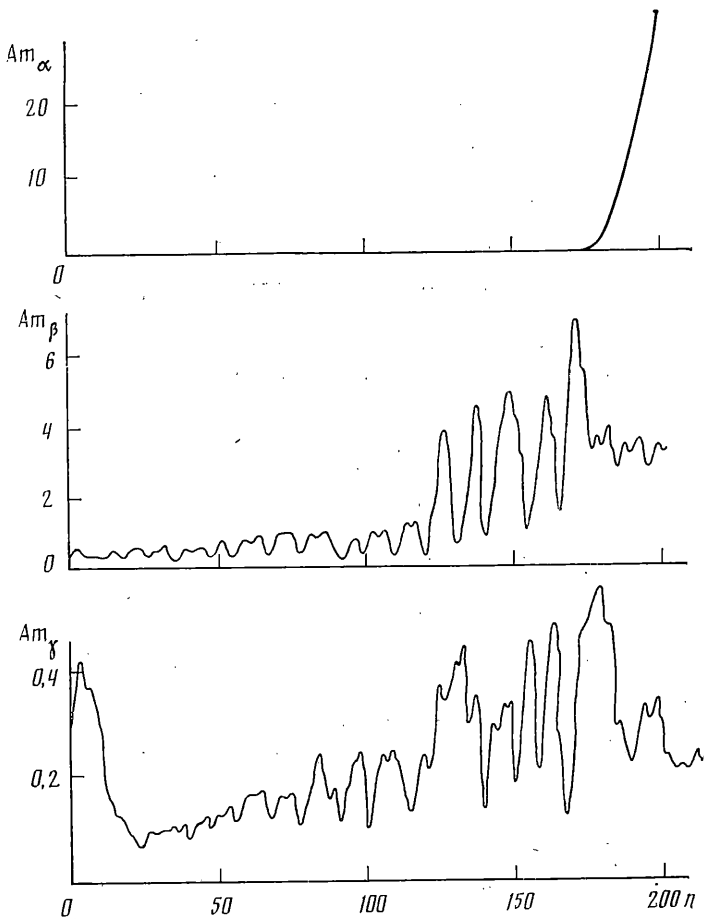
² См. указ. публ. с. 6.



Фиг. 4

$$\begin{aligned}
 &= (2s+1)^2 \left[\sin(2s+1)(u-u'') + e_3 n_2 \Theta_A^{-1} (2s+1) \cos(2s+1)(u-u'') \right] q_{2s+1} + \\
 &+ 2ve_2 \sin i \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ se_1 [2n_2 \Theta_A^{-1} - (k_3^2 - 4s^2) \Theta_C^{-1}] \sin 2s(u-u'') + \right. \\
 &+ e_3 [(k_3^2 - 4s^2) \Theta_C^{-1} - 8s^2 n_2 \Theta_A^{-1}] \cos 2s(u-u'') \left. \right\} (2s+1)^{-1} q_{2s} \} \\
 \gamma = &2\pi^{-1} \varepsilon k \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -ve_1 e_2 (\Theta_A k_3^2)^{-1} \sin i - \cos i \sum_{s=1}^{\infty} [e_3 \Theta_A^{-1} [k_2^2 - \right. \\
 &- (2s+1)^2 \left. \right] \sin(2s+1)(u-u'') + e_1 n_2 \Theta_C^{-1} (2s+1) \cos(2s+1)(u-u'') \left. \right] q_{2s+1} + \\
 &+ 2ve_2 \sin i \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ [4se_3 \Theta_A^{-1} (k_2^2 - 4s^2) + 2n_2 e_1 \Theta_C^{-1}] \sin 2s(u-u'') + \right. \\
 &+ [e_1 \Theta_A^{-1} (k_2^2 - 4s^2) - 8sn_2 \Theta_C^{-1}] \cos 2s(u-u'') \left. \right\} (2s+1)^{-1} q_{2s} \} \\
 q_r = &\{(2s+1) [(k_2^2 - r^2)(k_3^2 - r^2) + r^2 n_2 n_3]\}^{-1}
 \end{aligned}$$

Таким образом, при наличии на спутнике трех одинаковых взаимно ортогональных стержней главная часть вынужденного решения системы (2.3) пропорциональна εk . Анализ показывает, что и слагаемое X_* в улучшенном первом приближении (2.8) содержит εk в качестве коэффициента пропорциональности. Правые части уравнений (3.7) в этом случае представляют собой сумму соответствующих выражений, полученных для каж-



Фиг. 5

дого стержня. Коэффициенты λ_j ($j=1, 2, 3$) в (3.7) определяются по формуле

$$\lambda_j = \sum^* \lambda_j \quad (4.4)$$

где λ_j , стоящие под знаком \sum^* , определяются для каждого стержня по формуле (3.7).

5. Результаты анализа. Неравенства (3.8) для случая трех стержней исследовались численно. Ориентация ортогонального триэдра, образованного гистерезисными стержнями, в связанной системе координат задавалась углами $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ аналогично углам α, β, γ (Фиг. 1). Система уравнений (1.2) не изменяет своего вида при замене $e \rightarrow -e$, поэтому достаточно исследовать область $0 \leq \vartheta_j \leq \pi$, $j=1, 2, 3$. Представляют интерес следующие величины, характеризующие быстродействие системы: $\lambda_* = (\varepsilon k)^{-1} \min_{j=1, 2, 3} \lambda_j$, $\lambda_{**} = (\varepsilon k)^{-1} \min_{m=2, 3} \lambda_m$. Здесь λ_* представляет собой степень устойчивости, вычисленную с учетом (4.4) на множестве всех корней характеристического уравнения системы (3.7); λ_{**} — степень устойчивости, вычисленная на множестве корней характеристического уравнения той части системы (3.7), которая описывает амплитуды движений относительно плоскости орбиты. Линия $\lambda_* = 0$ определяет границу области устойчивости. Анализ расчетов, проведенных для различных значений инерционных параметров спутника, показывает, что чем ближе распределение масс спутника к пластине, тем меньше зоны неустойчивости в конфигурационном пространстве углов $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ и выше быстродействие системы. В качестве примера на плоскости $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ для ряда значений ϑ_3 показаны изолинии $\lambda_* = \text{const}$ при $\vartheta_A = 0,9$, $\vartheta_C = 0,4$, $i = \pi/2$ (Фиг. 2). Участки, где $\lambda_* < 0$, заштрихованы. Жирными линиями выделены значения углов, при которых один из стержней триэдра располагается параллельно оси Ox_2 . Максимальная степень устойчивости $\lambda_* = 0,22$ достигается при

$$\vartheta_1 = 44^\circ, \vartheta_2 = 36^\circ, \vartheta_3 = 31^\circ \quad (5.1)$$

причем, с изменением наклона орбиты i оптимальная по быстродействию ориентация стержней практически не меняется. Зависимости $\lambda_c = \max_{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3} \lambda_*$ и $\lambda_{**} =$

$\approx \max \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \lambda^{**}$ для указанных выше инерционных параметров спутника от наклона орбиты показаны на фиг. 3. Сравнение λ^* и λ^{**} показывает, что в большей части зоны устойчивости быстродействие по каналам крена и рыскания существенно превышает быстродействие по тангажу, причем оптимальная ориентация стержней для демпфирования колебаний относительно плоскости орбиты отличается от (5.1).

Проверка результатов, полученных на основании усредненных уравнений (3.7), проводилась численным интегрированием системы нелинейных уравнений (1.2) с использованием как упрощенной, так и уточненной [6] моделей гистерезиса. Пример переходного режима для спутника с параметрами $\Theta_A=0,9$, $\Theta_C=0,4$, $\varepsilon=0,25$, $k=0,1$, $i=\pi/2$ и углами ориентации стержней (5.1) приведен на фиг. 4. Пример переходного режима для спутника с параметрами $\Theta_A=0,9$, $\Theta_C=0,8$, $\varepsilon=0,25$, $k=0,1$, $i=\pi/2$, $\varphi_1=30^\circ$, $\varphi_2=25^\circ$, $\varphi_3=60^\circ$, принадлежащим области неустойчивости, приведен на фиг. 5. При ориентации стержней, близкой к оптимальной, времена переходных процессов сравнимы по всем трем каналам. Если же углы, определяющие ориентацию стержней, принадлежат области неустойчивости, то спутник совершает колебания с возрастающей амплитудой по крену и рысканию, а затем переходит во вращение по тангажу.

Проведенное исследование пространственных движений гравитационно-ориентированного спутника с гистерезисными стержнями показало, что для уменьшения амплитуды вынужденных колебаний в установившемся режиме, на спутнике необходимо установить три одинаковых взаимно ортогональных стержня (или набора стержней). Если ни один из них не направлен вдоль главных осей спутника, то изменение амплитуды малых колебаний носит почти всегда экспоненциальный по времени характер. В пространстве параметров выделены зоны асимптотически устойчивого движения, определена оптимальная ориентация стержней, обеспечивающая максимальное быстродействие системы ориентации. Проведенный анализ служит примером усреднения многочастотной колебательной системы в нерезонансном случае с дальнейшей проверкой численными расчетами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники. Сер.: Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. 223 с.
2. Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники. Сер.: Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 23. 104 с.
3. Вандерслайс Дж. Л. Анализ динамики спутника с гравитационно-градиентной системой стабилизации и пассивным демпфированием // В кн.: Проблемы ориентации искусственных спутников Земли / Под ред. Сингера С. Ф. М., Наука, 1966. С. 66–105.
4. Сарычев В. А., Пеньков В. И., Овчинников М. Ю., Герман А. Д. Движение гравитационно-ориентированного спутника с гистерезисными стержнями в плоскости полярной орбиты // Космич. исслед. 1988. Т. XXIV. № 5. С. 654–668.
5. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
6. Сарычев В. А., Пеньков В. И., Овчинников М. Ю. Математическая модель гистерезиса, основанная на магнитомеханической аналогии // Математическое моделирование, 1989. Т. I. № 4. С. 122–133.
7. Mager A. Stabilisierung von erd-satelliten mit weichmagnetischen // Z. Angew. Phys., 1967. V. 23. No 3. P. 164–170.
8. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике // Киев. Наук. думка, 1971. 440 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.VIII.1988