**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1989**

УДК 531.55:521.2

Ю. Г. МАРКОВ

О ВРАЩЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ШАРА НА УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

В последнее время существенное место уделяется задачам динамики механических систем с распределенными параметрами вследствие их большого теоретического и прикладного значения [1–5]. В публикуемой статье рассматривается вращение вязкоупругого шара, центр масс которого движется по условно-периодической орбите в плоской ограниченной задаче трех тел. Методом разделения движений и усреднения [6] получены приближенные уравнения, описывающие вращательное движение шара в канонических переменных Андуайе. Исследована эволюция этого движения. Поскольку в полученных уравнениях содержатся силы, учитываемые в приливной теории движения планет, то они могут быть также использованы при изучении этих явлений.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Пусть движение центра масс C вязкоупругого однородного шара и двух точек M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 описывается в рамках плоской круговой ограниченной задачи трех тел. В инерциальной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, в которой точка O является барицентром двух притягивающих точек, радиус-векторы точек M_1 и M_2 есть

$$\mathbf{r}_i=r_i\mathbf{r}^0,\quad \mathbf{r}=\cos\vartheta\xi_1^0+\sin\vartheta\xi_2^0,\quad \vartheta=\omega_0 t$$

$$r_1=-am_2/m,\ r_2=am_1/m,\ m=m_1+m_2\ (i=1,2)$$

где ξ_i^0 — орт оси $O\xi_i$, ω_0 — орбитальная угловая скорость материальных точек M_1 и M_2, a — расстояние между точками M_1 и M_2. Далее, примем точку O за начало вращающейся относительно оси Oz барицентрической системы координат $Oxyz$ с осью Ox, направленной по линии точек M_1 и M_2, а осью Oz ортогональной плоскости $O\xi_1\xi_2$. Рассмотрим такую постановку задачи, когда влиянием вращения шара относительно центра масс на его орбитальное движение можно пренебречь. Будем считать, что центр масс C шара движется в системе координат $Oxyz$ по заданной условно-периодической орбите, частотный базис которой $\omega_1,\dots,\omega_m$. Предположим также, что в системе отсутствуют резонансы, т. е. ни при одном значении целого числа k_{m+1} не выполняется условие

$$k_0\omega_0+k_1\omega_1+\dots+k_m\omega_m+k_{m+1}\varphi_2^{\boldsymbol{\cdot}}=0 \tag{1.1}$$

где $\varphi_2^{\boldsymbol{\cdot}}$ — частота собственного вращения недеформированного шара вокруг одного из диаметров.

Пусть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты точки C в системе координат $Oxyz$, причем $z\equiv 0$. Введем в центре масс шара орбитальные системы координат $Cx_iy_iz_i$ $(i=1,2)$, в которых ось Cz_i совпадает с направлением радиус-вектора $\mathbf{R}_i$, проведенного из притягивающего центра M_i в точку C; ось Cy_i коллинеарна оси $O\xi_3$. Матрица перехода от системы осей Кенига $C\xi_1'\xi_2'\xi_3'$, движущейся поступательно, к орбитальным осям

$$\Gamma_0(\vartheta+g_i)=\begin{Vmatrix}-\sin(\vartheta+g_i) & \cos(\vartheta+g_i) & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \cos(\vartheta+g_i) & \sin(\vartheta+g_i) & 0\end{Vmatrix}$$

где g_i $(i=1, 2)$ — угол между осью Ox и вектором $\mathbf{R}_i$; $\cos g_i=(x-r_i)/R_i$, $\sin g_i=y/R_i$, $R_i^2=(x-r_i)^2+y^2$; r_i $(i=1, 2)$ — координаты точки M_i в системе осей $Oxyz$.

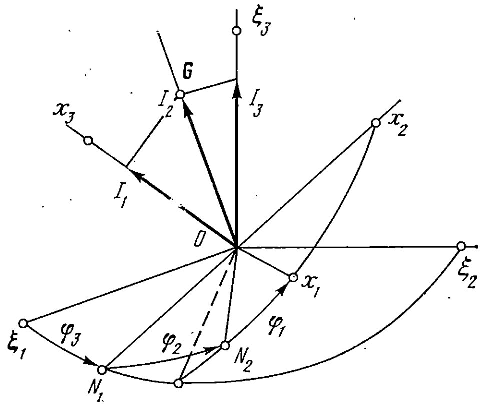
Проекции вектора $\mathbf{R}_i$ в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ есть

$$\mathbf{R}_i=R_i\mathbf{R}_i^0,\quad \mathbf{R}_i^0(\gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \gamma_{3i})=[\cos(\vartheta+g_i), \sin(\vartheta+g_i), 0] \tag{1.2}$$

Обозначим $\theta=g_2-g_1$ — угол между направлениями, задаваемыми векторами $\mathbf{R}_i$. Введем в точке C подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$, связанную с деформируемым шаром, согласно условию

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)=O(t)(\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)),\qquad \int\limits_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{u}\,dx=0$$

Здесь $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)$ — вектор из точки C в какую-нибудь точку деформированного шара ($\mathbf{r}\in\Omega$, где Ω — область, занимаемая шаром в недеформированном состоянии); $O(t)\in SO(3)$ — ортогональная матрица, задающая вращение трехмерного пространства. Далее, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — вектор перемещений точек шара при деформациях и предполагается, что величины $\partial u_i/\partial x_j$ $(i, j=1, 2, 3)$ малы $(|\partial u_i/\partial x_j|\ll 1)$ и деформированное состояние шара описывается классической теорией упругости малых деформаций [6].



Для описания вращения шара воспользуемся каноническими переменными Андуайе I_k, φ_k ($k=1, 2, 3$; фигура); $I_2=|\mathbf{G}|$ — величина кинетического момента, I_3 — проекция $\mathbf{G}$ на вертикаль $O\xi_3$, а I_1 — проекция $\mathbf{G}$ на ось Ox_3; переменные φ_1, φ_2, φ_3, сопряженные с I_1, I_2, I_3, являются углами, изменяющимися по модулю 2π. Расширенный функционал Рауса задачи представим в следующем виде:

$$R[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbf{u}]={}^1/{}_2(\mathbf{G}-\mathbf{G}_u, J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G}-\mathbf{G}_u))-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}2}\rho\,dx+\mathrm{E}[\mathbf{u}]+$$

$$+\Pi[\mathbf{u}]+\sum_{i=1}^{m}\omega_i P_{\theta_i} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{G}_u=\int\limits_\Omega(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}\rho\,dx,\qquad J^{-1}[\mathbf{u}]=J_0^{-1}-J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}]J_0^{-1}+\ldots,$$

$$J_0^{-1}=A^{-1}\operatorname{diag}\{1, 1, 1\}$$

Здесь P_{θ_i} — обобщенные импульсы, соответствующие переменным $\theta_i=\omega_i t$; $J^{-1}[\mathbf{u}]$ — оператор инерции в системе координат $Cx_1x_2x_3$, а $J_1[\mathbf{u}]$ — линейная по $\mathbf{u}$ компонента оператора инерции деформированного шара; A — момент инерции недеформированного шара относительно диаметра, а вектор кинетического момента шара $\mathbf{G}$ выражен через переменные Андуайе: $G=((I_2^2-I_1^2)^{1/2}\sin\varphi_1, (I_2^2-I_1^2)^{1/2}\cos\varphi_1, I_1)$. Потенциал гравитационных сил и сил инерции переносного движения определим с точностью до малых порядка $|\mathbf{u}|$ и R_i^{-3} $(i=1, 2)$ в виде

$$\Pi[\mathbf{u}]=-\sum_{i=1}^{2}\left\{M\mu_iR_i^{-1}+\mu_i\rho R_i^{-3}\int\limits_\Omega[3(O^{-1}\mathbf{R}_i^0, r)(O^{-1}\mathbf{R}_i^0, \mathbf{u})-(\mathbf{r}, \mathbf{u})]dx\right\} \tag{1.4}$$

где M — масса шара, $\mathbf{r}$ — координата частицы недеформированного шара в системе осей $Cx_1x_2x_3$. Матрица $O(t)$, определяющая переход от связанных осей к системе координат Кенига, имеет вид

$$O(t)=\Gamma_3(\varphi)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1),\ \cos\delta_1=I_3/I_2,\ \cos\delta_2=I_1/I_2$$

$$\Gamma_3(\beta)=\begin{Vmatrix}\cos\beta & -\sin\beta & 0\\ \sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},\quad \Gamma_1(\beta)=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \cos\beta\end{Vmatrix}$$

где $\mu_i=fm_i$ — гравитационный параметр притягивающего центра M_i ($i=1, 2$) (f — гравитационная постоянная). Тогда $O_i(t)=\Gamma_0(\vartheta+g_i)O(t)$ — есть матрица перехода от связанных осей к орбитальной системе координат $Cx_iy_iz_i$. Гравитационным взаимодействием частиц шара между собой будем пренебрегать.

В пределе, при бесконечно большой жесткости шара, его деформации равны нулю ($\mathbf{u}\equiv0$) и невозмущенное движение есть равномерное вращение вокруг одного из диаметров с угловой скоростью $\varphi_2^{\cdot}=A^{-1}I_2$. В случае конечной жесткости упругого шара уравнения вращательного движения записываются в виде ($W_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева):

$$I_i^{\cdot}=-\nabla_{\varphi_i}R,\qquad \varphi_i^{\cdot}=\nabla_{I_i}R\qquad (i=1,2,3)\tag{1.5}$$

$$\int\limits_\Omega\left[\left(\frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{u}^{\cdot}}R-\nabla_{\mathbf{u}}R-\nabla_{\mathbf{u}^{\cdot}}D+\lambda_1\right)\delta\mathbf{u}+\lambda_2\operatorname{rot}\delta\mathbf{u}\right]dx=0$$

$$\forall\delta\mathbf{u}\in V,\ V=\{\mathbf{u}\colon \mathbf{u}\in(W_2^1(\Omega))^3\}\tag{1.6}$$

2. Построение решения для задачи о вязкоупругом шаре. Уравнение (1.6) записано в виде вариационного принципа Даламбера — Лагранжа и содержит два неопределенных множителя: λ_1 и λ_2. Полагая $\delta\mathbf{u}=\mathbf{a}\in E^3$ или $\delta\mathbf{u}=\delta\alpha\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})$, $\delta\alpha\in E^3$ (возможные перемещения соответствуют группе вращений), тогда $\lambda_1=\lambda_2=0$. Будем считать, что диссипативный функционал $D[\mathbf{u}^{\cdot}]$ пропорционален функционалу потенциальной энергии упругих деформаций $\mathrm{E}[\mathbf{u}]$, если в последнем компоненты тензора малых деформаций заменить на соответствующие компоненты тензора скоростей деформаций, т. е. $D[\mathbf{u}^{\cdot}]=\chi E[\mathbf{u}^{\cdot}]$ (χ — время релаксации, точкой вверху обозначается частная производная по времени).

Решение уравнения (1.6) будем искать в виде ряда по малому параметру ε, обратно пропорциональному модулю Юнга материала шара $\mathbf{u}=\varepsilon\mathbf{u}^{(1)}+\varepsilon^2\mathbf{u}^{(2)}+\ldots$, и ограничимся $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, поскольку в дальнейшем предполагается применение метода усреднения к уравнениям (1.5) [5]. Уравнение для вектора перемещений $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ принимает вид

$$-\varepsilon\nabla\mathrm{E}[\mathbf{u}^{(1)}+\chi\mathbf{u}^{\cdot(1)}]=A^{-2}\rho\mathbf{G}\times[\mathbf{G}\times\mathbf{r}]-2\rho\sum_{i=1}^{2}\mu_iR_i^{-3}\mathbf{r}-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}3\mu_iR_i^{-3}\rho O^{-1}\mathbf{R}_i^0\times[O^{-1}\mathbf{R}_i^0\times\mathbf{r}]\tag{2.1}$$

Граничные условия для функции $\mathbf{u}^{(1)}$ задаются в виде $\sigma\cdot\mathbf{n}=0$ на $\partial\Omega$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности шара. Так как уравнение (2.1), линейно, то его решение можно представить в виде суммы трех функций:

$$\mathbf{u}^{(1)}=\mathbf{u}_1(\mathbf{r})+\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t)+\mathbf{u}_3(\mathbf{r}, t)$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{gathered}-\varepsilon\nabla\mathrm{E}[\mathbf{u}_1]=A^{-2}\rho\mathbf{G}\times[\mathbf{G}\times\mathbf{r}]\\ -\varepsilon\nabla\mathrm{E}[\mathbf{u}_2+\chi\mathbf{u}_2^{\cdot}]=-2\rho\sum_{i=1}^{2}\mu_iR_i^{-3}\mathbf{r}\\ -\varepsilon\nabla\mathrm{E}[\mathbf{u}_3+\chi\mathbf{u}_3^{\cdot}]=-\sum_{i=1}^{2}3\mu_iR_i^{-3}\rho O^{-1}\mathbf{R}_i^0\times[O^{-1}\mathbf{R}_i^0\times\mathbf{r}]\end{gathered}\tag{2.2}$$

откуда найдем [7]:

$$\mathbf{u}_1(r)=\rho A^{-2}I_2^2\Gamma_3^{-1}(\varphi_1)\Gamma_1^{-1}(\delta_2)\mathbf{u}^*(\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)\mathbf{r})$$

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{r},t)=-2\rho f(r^2)\left[\sum_{i=1}^{2}\mu_iR_i^{-3}\left(1+\frac{3\chi}{R_i}\frac{\partial R_i}{\partial t}\right)\right]\mathbf{r}$$

$$f(r^2)=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)}\left[r^2-\frac{3-\nu}{1+\nu}r_0^2\right],\quad R_i=R_i(t)$$

$$\mathbf{u}_3(\mathbf{r},t)=-\sum_{i=1}^{2}3\rho\mu_iR_i^{-3}\left(1+\frac{3\chi}{R_i}\frac{\partial R_i}{\partial t}\right)O_i^{-1}(t)\mathbf{u}^*(O_i(t)\mathbf{r})+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}3\chi\rho\mu_iR_i^{-3}\frac{\partial}{\partial t}\left[O_i^{-1}(t)\mathbf{u}^*(O_i(t)\mathbf{r})\right]\tag{2.3}$$

$$\mathbf{u}^*(r)=[(B_1\mathbf{r},\mathbf{r})B_2+(B_3\mathbf{r},\mathbf{r})B_4+B_5]\mathbf{r}$$

$$B_1=\mathrm{diag}\{b_1,b_1,b_2\},\quad B_2=\mathrm{diag}\{1,1,0\}$$

$$B_3=\mathrm{diag}\{a_1,a_1,a_2\},\quad B_4=\mathrm{diag}\{0,0,1\},\quad B_5=\mathrm{diag}\{c_1,c_1,c_2\}$$

$$b_1=-(4-3\nu-5\nu^2)\Psi(\nu),\quad b_2=-(9-8\nu-5\nu^2)\Psi(\nu)$$

$$a_1=2(3-\nu)\Psi(\nu),\quad a_2=(1+3\nu)\Psi(\nu)$$

$$\Psi(\nu)={}^1/_5(1+\nu)(1-\nu)^{-1}(5\nu+7)^{-1}$$

$$c_1=r_0^2\frac{12-8\nu-12\nu^2}{35-10\nu-25\nu^2},\qquad c_2=-r_0^2\frac{3+18\nu-3\nu^2-10\nu^3}{35-10\nu-25\nu^2}$$

где ν — коэффициент Пуассона. Заметим, что решение $\mathbf{u}_3(\mathbf{r},t)$ записано с точностью порядка χ. Функция $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$ описывает осесимметричную упругую деформацию шара (сжатие шара по оси вращения) под действием центробежных сил инерции, вызванных его вращением; функции $\mathbf{u}_2(\mathbf{r},t)$ соответствует сферически-симметричная деформация шара, обусловленная внешним гравитационным полем притягивающих центров M_1 и M_2; нестационарная деформация шара (гравитационные приливы), также вызванная внешним гравитационным полем, определяется функцией $\mathbf{u}_3(\mathbf{r},t)$. Далее, анализ выражений (1.3) и (1.4) показывает, что эволюция вращательного движения шара определяется членом

$$P_j=\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\int_{\Omega}(O^{-1}\mathbf{R}_i^0,\mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}_i^0,\mathbf{u}_j)\,dx,\qquad \alpha_i=-3\rho\mu_iR_i^{-3}\tag{2.4}$$

Можно показать, что сферически-симметричная деформация не вызывает эволюции вращательного движения шара. Структура выражений (2.3) и (2.4) позволяет установить два типа эволюционных процессов: быстрый, определяемый функцией $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$, и медленный, определяемый функцией $\mathbf{u}_3(\mathbf{r},t)$. Заметим, что деформация $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$ не сопровождается рассеиванием энергии, поэтому быстрая эволюция является консервативной; деформация, обусловленная функцией $\mathbf{u}_3(\mathbf{r},t)$, сопровождается рассеиванием энергии вращения шара, и наблюдается этап медленной диссипативной эволюции.

3. Эволюция вращений вязкоупругого шара. Уравнения, описывающие быструю консервативную эволюцию вращений упругого шара, имеют вид

$$I_i^{\boldsymbol{\cdot}}=-\left\langle\frac{\partial P_1}{\partial\varphi_i}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta,\theta_1,\ldots,\theta_m},\quad \varphi_i^{\boldsymbol{\cdot}}=\left\langle\frac{\partial P_1}{\partial I_i}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta,\theta_1,\ldots,\theta_m}\quad(i=1,2,3)\tag{3.1}$$

$$P_1=\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\alpha\int_{\Omega}(O^{-1}\mathbf{R}_i^0,\mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}_i^0,\mathbf{u}_1)\,dx$$

Вычисляя частные производные по переменным Андуайе и усредняя, в отсутствие резонанса вида (1.1), по быстрой переменной φ_2, найдем

$$\left\langle\frac{\partial P_1}{\partial\varphi_1}\right\rangle_{\varphi_2}=\left\langle\frac{\partial P_1}{\partial\varphi_2}\right\rangle_{\varphi_2}=\left\langle\frac{\partial P_1}{\partial I_1}\right\rangle_{\varphi_2}=0,\qquad\langle\cdot\rangle_{\varphi_2}\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\cdot)\,d\varphi_2$$

$$\left\langle\frac{\partial P_1}{\partial\varphi_3}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta,\theta_1,\ldots,\theta_m}=-3\varepsilon\rho^2D_2(I_2^2-I_3^2)\left[(F_1-F_3)\sin 2\varphi_3-2F_2\cos 2\varphi_3\right]$$

$$\left\langle\frac{\partial P_1}{\partial I_3}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta,\theta_1,\ldots,\theta_m}=-6\varepsilon\rho^2D_2I_3(F_2\sin 2\varphi_3-F_1\sin^2\varphi_3-F_3\cos^2\varphi_3)\tag{3.2}$$

$$F_j=\langle Q_j\rangle_{\vartheta,\theta_1,\ldots,\theta_m}=\frac{1}{(2\pi)^{m+1}}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}Q_j\,d\vartheta\,d\theta_1\ldots d\theta_m\qquad(j=1,2,3)$$

$$Q_1=\sum_{i=1}^{2}\mu_iR_i^{-3}\gamma_{1i}^2,\qquad Q_2=\sum_{i=1}^{2}\mu_iR_i^{-3}\gamma_{1i}\gamma_{2i},\qquad Q_3=\sum_{i=1}^{2}\mu_iR_i^{-3}\gamma_{2i}^2$$

$$D_2=A^{-2}[(a_2-b_1)f_1+(2a_1-b_1-b_2)f_2+(c_2-c_1)f_3]$$

$$f_1=\int\limits_\Omega x^4\,dx,\qquad f_2=\int\limits_\Omega x^2y^2\,dx,\qquad f_3=\int\limits_\Omega x^2\,dx$$

Коэффициенты F_j определяются формой орбиты центра масс шара. В отсутствие резонанса (1.1) интегрирование по быстрой переменной ϑ выполняется независимо от интегрирования по $\theta_1,\ldots,\theta_m$. Усредняя выражения (3.2) по ϑ, найдем

$$F_1=F_3=\frac{1}{2(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\mu_1}{R_1^3}+\frac{\mu_2}{R_2^3}\right)d\theta_1\ldots d\theta_m,\qquad F_2=0$$

$$\varphi_1^{\boldsymbol\cdot}=0,\quad I_i^{\boldsymbol\cdot}=0\quad(i=1,\,2,\,3)\tag{3.3}$$

$$\varphi_3^{\boldsymbol\cdot}=-kI_3,\quad k=-3\varepsilon\rho^2D_2F>0,\quad F=2F_1$$

Из уравнений (3.3) следует, что возмущенное движение упругого шара в процессе быстрой эволюции состоит из вращения вокруг постоянного по величине вектора кинетического момента **G**, а сам вектор **G** прецессирует с постоянной угловой скоростью $\varphi_3^{\boldsymbol\cdot}$ вокруг нормали к плоскости движения тел M_1 и M_2, описывая при этом круговой конус с неизменным углом при вершине $2\delta_1$. Угловая скорость прецессии $\varphi_3^{\boldsymbol\cdot}$ зависит от формы траектории центра масс шара.

Рассмотрим медленную диссипативную эволюцию вращений вязкоупругого шара, описываемых уравнениями движения:

$$I_i^{\boldsymbol\cdot}=-\left\langle\frac{\partial P_3}{\partial\varphi_i}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta,\theta_1,\ldots,\theta_m},\qquad\varphi_i^{\boldsymbol\cdot}=\left\langle\frac{\partial P_3}{\partial I_i}\right\rangle_{\varphi_2,\vartheta,\theta_1,\ldots,\theta_m}\qquad(i=1,2,3)\tag{3.4}$$

$$P_3=\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\int\limits_\Omega(O^{-1}\mathbf{R}_i^0,\mathbf{r})\,(O^{-1}\mathbf{R}_i^0,\mathbf{u}_3)\,dx$$

Опуская члены, не дающие вклада в правые части уравнений (3.4), перепишем P_3 в виде

$$P_3=\varepsilon\chi\sum_{i=1}^{2}\left\{-\alpha_i^2D_5(\varkappa_{1i}\varkappa_{3i}g_{2i}+\varkappa_{2i}\varkappa_{3i}g_{3i})+\alpha_1\alpha_2\left[\frac{3}{R_i}\frac{\partial R_i}{\partial t}(D_4-D_3)d_{3i}^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-D_5(d_{1i}d_{3i}g_{2i}+d_{2i}d_{3i}g_{3i})\right]\right\}$$

$$D_3=\int\limits_\Omega [b_1(x^2+y^2)+b_2z^2+c_1]x^2\,dx, \qquad D_4=\int\limits_\Omega [a_1(x^2+y^2)+a_2z^2+c_2]z^2\,dx$$

$$D_5=\int\limits_\Omega \{[(b_1-a_1)(x^2+y^2)+(b_2-a_2)z^2+c_1-c_2]\times$$

$$\times(x^2+z^2)+2(a_1-a_2+b_1-b_2)x^2z^2\}\,dx$$

g_{2i}, g_{3i} $(i=1,\,2)$ — элементы кососимметрической матрицы

$$S_i=O_i^{\cdot}O_i^{-1}=\begin{Vmatrix} 0 & g_{1i} & g_{2i}\\ -g_{1i} & 0 & g_{3i}\\ -g_{2i} & -g_{3i} & 0\end{Vmatrix}$$

характеризующей угловую скорость вращения шара Ω_i^* относительно системы координат $Cx_iy_iz_i$:

$$g_{1i}=\varphi_2^{\cdot}\sin\delta_1(-\gamma_{1i}\sin\varphi_3+\gamma_{2i}\cos\varphi_3), \qquad g_{2i}=-g_i^{\cdot}-(\omega_0-\varphi_2^{\cdot}\cos\delta_1)$$

$$g_{3i}=\varphi_2^{\cdot}\sin\delta_1(\gamma_{1i}\cos\varphi_3+\gamma_{2i}\sin\varphi_3), \qquad g_i^{\cdot}+\omega_0=-\gamma_{1i}^{\cdot}/\gamma_{2i}=\gamma_{2i}^{\cdot}/\gamma_{1i}$$

где $\varkappa$ и d с индексами являются направляющими косинусами векторов $\mathbf{e}_{zi}$ и $\mathbf{e}_1$.

Выражение (2.3) хорошо аппроксимирует функцию $\mathbf{u}_3(\mathbf{r},\,t)$ при условии $\chi|\Omega_i^*|\ll 1$, что и предполагается в дальнейшем. Частные производные в уравнениях (3.4) следует вычислять только от выражений

$$\mathbf{e}_{z_i}(\varkappa_{1i},\varkappa_{2i},\varkappa_{3i})=O_iO^{-1}\mathbf{R}_i^0 \qquad (i=1,2)$$

$$\mathbf{e}_1(d_{11},\,d_{21},\,d_{31})=O_1O^{-1}\mathbf{R}_2^0, \quad \mathbf{e}_2(d_{12},\,d_{22},\,d_{32})=O_2O^{-1}\mathbf{R}_1^0$$

причем

$$\frac{\partial}{\partial p}\mathbf{e}_{z_i}=O_i\frac{\partial}{\partial p}O^{-1}\mathbf{R}_i^0, \qquad \frac{\partial}{\partial p}\mathbf{e}_1=O_1\frac{\partial}{\partial p}O^{-1}\mathbf{R}_2^0$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\mathbf{e}_2=O_2\frac{\partial}{\partial p}O^{-1}\mathbf{R}_1^0, \qquad p\in\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,I_1\}$$

Выполняя дифференцирование и усредняя независимо по быстрым переменным φ_2 и ϑ, получим

$$\varphi_1^{\cdot}=0, \quad I_1^{\cdot}=(I_1/I_2)I_2^{\cdot}, \quad \Rightarrow(\cos\delta_2)^{\cdot}=0$$

$$I_2^{\cdot}=(I_3/I_2)I_3-n_2I_2^{-1}(I_2^2-I_3^2), \quad I_3^{\cdot}=-n_1(I_3-A\omega_0)+n_3 \tag{3.5}$$

$$n_1=k_1A^{-1}\langle E_1+E_2\rangle_{\theta_1,\ldots,\theta_m}, \quad n_2={}^1/_2k_1A^{-1}\langle E_3\rangle_{\theta_1,\ldots,\theta_m}$$

$$n_3=\langle k_1(E_1g_1^{\cdot}+E_2g_2^{\cdot})-k_2E_4(R_1^{\cdot}/R_1-R_2^{\cdot}/R_2)\rangle_{\theta_1,\ldots,\theta_m}$$

$$k_1=9\varepsilon\chi\rho^2D_5, \quad k_2=27\varepsilon\chi\rho^2(D_4-D_3)$$

$$E_1=\frac{\mu_1^2}{R_1^6}+\frac{\mu_1\mu_2}{R_1^3R_2^3}\cos 2\theta, \qquad E_2=\frac{\mu_2^2}{R_2^6}+\frac{\mu_1\mu_2}{R_1^3R_2^3}\cos 2\theta$$

$$E_3=\frac{\mu_1^2}{R_1^6}+\frac{\mu_2^2}{R_2^6}+\frac{\mu_1\mu_2}{R_1^3R_2^3}(1+\cos 2\theta), \qquad E_4=\frac{\mu_1\mu_2}{R_1^3R_2^3}\sin 2\theta$$

Интегрируя уравнения (3.5), найдем

$$I_1(t)=I_2(t)\cos\delta_2(0) \tag{3.6}$$

$$I_3(t)=[I_3(0)-I]e^{-n_1t}+I, \quad I=A\omega_0+n_3/n_1$$

$$I_2^2(t)=[I+(I_3(0)-I)e^{-n_1t}]^2+[I_2^2(0)-I_3^2(0)]e^{-2n_2t}$$

Здесь $I_2(0)$, $I_3(0)$, $\delta_2(0)$ — значения переменных I_2, I_3, δ_2 в начальный момент времени. Стационарное движение системы будет $I_2=I_3=I$. Из уравнений в вариациях

$$\delta I_3^{\boldsymbol\cdot}=-n_1\delta I_3,\quad \delta I_2^{\boldsymbol\cdot}=-n_2\delta I_2+(n_2-n_1)\delta I_3,\quad n_1>0,\ n_2>0$$

$$I_3=I(1+\delta I_3),\quad I_2=I(1+\delta I_2)$$

следует его асимптотическая устойчивость.

Таким образом, если центр масс вязкоупругого шара движется по произвольной условно-периодической орбите в плоской круговой ограниченной задаче трех тел, то в процессе медленной диссипативной эволюции ось вращения шара, оставаясь неподвижной в системе координат, связанной с недеформированным шаром, стремится занять положение по нормали к плоскости движения его центра масс. При этом угловая скорость вращения шара вокруг центра масс стремится к фиксированной величине, определяемой, согласно выражениям (3.6), орбитальной угловой скоростью обращения притягивающих центров и формой траектории центра масс шара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф. Л.* О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 22–26.
2. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 124 с.
3. *Журавлев В. Ф.* К динамике упругого твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 93–97.
4. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
5. *Вильке В. Г.* Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1983. № 5. С. 54–59.
6. *Вильке В. Г., Копылов С. А., Марков Ю. Г.* Эволюция вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49. № 1. С. 25–34.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.1988