УДК 539.3

З. Н. ЛИТВИНЕНКОВА

ОБОБЩЕННАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА С ЛУНКООБРАЗНЫМ ВЫРЕЗОМ

В [1, 2] получено точное нелинейное решение задачи об обобщенной антиплоской деформации тела с лункообразным вырезом. В настоящей работе точное нелинейное решение рассматриваемой задачи дается для случая обобщенной плоской деформации тела.

При обобщенной плоской деформации декартовы координаты материальной точки тела до и после деформации связаны соотношениями $x_1=x_1(x_1^\circ, x_2^\circ)$, $x_2=x_2(x_1^\circ, x_2^\circ)$, $x_3=\lambda x_3^\circ$, $z=z(\zeta, \bar\zeta)$, $\zeta=x_1^\circ+ix_2^\circ$, $z=x_1+ix_2$, $\lambda=\text{const}$, где λ – кратность удлинений материальных волокон в направлении оси x_3°.

Рассмотрим упругий потенциал (σ^*, α – постоянные):

$$W=\sigma^*|\partial z/\partial\zeta|^2+\alpha|\partial z/\partial\bar\zeta|^2 \tag{1.1}$$

Как показано в [3, 4]:

$$\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\Sigma\}_1=2\sigma^*(\partial z/\partial\zeta), \quad \{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\Sigma\}_2=2\alpha(\partial z/\partial\bar\zeta)$$
$$\partial z/\partial\zeta=\Phi(\zeta), \quad \partial z/\partial\bar\zeta=\overline{\Psi(\zeta)}, \quad z=\int\Phi(\zeta)\,d\zeta+\int\overline{\Psi(\zeta)}\,d\bar\zeta \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{F}=(\partial x_\mu/\partial x_\nu^\circ)\mathbf{g}_\mu\mathbf{g}_\nu$ – градиент движения, Σ – тензор истинных напряжений, J – кратность изменения объема, $\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\Sigma\}_i$ ($i=1, 2$) – комплексные компоненты тензора номинальных напряжений $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ – неизвестные комплексные функции.

Комплексные компоненты тензора условных напряжений (подсчитанные в расчете на единицу площади поверхности недеформированного тела) выражаются через функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ следующим образом [3, 4]:

$$\Sigma_1^\circ=\sigma_{11}^\circ+\sigma_{22}^\circ=2\sigma^*[\Phi(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)}]^{1/2}$$
$$\Sigma_2^\circ=\sigma_{11}^\circ-\sigma_{22}^\circ+2i\sigma_{12}^\circ=2\alpha\overline{\Phi(\zeta)}\,\overline{\Psi(\zeta)}[\Phi(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)}]^{-1/2} \tag{1.3}$$

В свою очередь комплексные компоненты тензора истинных напряжений (подсчитанные в расчете на единицу площади поверхности деформированного тела) таковы:

$$\Sigma_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}=2\lambda^{-1}\Delta^{-1}[\sigma^*\Phi(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)}+\alpha\Psi(\zeta)\overline{\Psi(\zeta)}]$$
$$\Sigma_2=\sigma_{11}-\sigma_{22}+2i\sigma_{12}=2\lambda^{-1}\Delta^{-1}[(\sigma^*+\alpha)\Phi(\zeta)\Psi(\zeta)] \tag{1.4}$$
$$\Delta=|\partial z/\partial\zeta|^2-|\partial z/\partial\bar\zeta|^2$$

Функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ определяются из граничного условия

$$\sigma^*\Phi(\zeta)^{i\gamma^\circ}+\alpha\overline{\Psi(\zeta)}e^{-i\gamma^\circ}=e^{i\gamma^\circ}[\sigma_{\nu^\circ\nu^\circ}(s^\circ)+i\sigma_{\nu^\circ t^\circ}(s^\circ)] \tag{1.5}$$

Рассмотрим неограниченное тело с лункообразным вырезом, ориентированным вдоль оси x_1° ($-a\leqslant x_1^\circ\leqslant a$). Для определения искомых функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ воспользуемся конформным отображением внешности лунки на внешность единичного круга. Отображающая функция $\zeta=\omega(\chi)$ и обратная ей функция $\chi=\varphi(\zeta)$ имеют, соответственно, вид

$$\zeta=\omega(\chi)=a(\chi_1^{1/k}+1)(\chi_1^{1/k}-1)^{-1}, \quad \chi=\varphi(\zeta)=(\zeta_1^k+1)/(\zeta_1^k-1)$$
$$\chi_1=(\chi+1)/(\chi-1), \quad \zeta_1=(\zeta+a)/(\zeta-a), \quad k=\pi/[2(\pi-\beta)] \tag{1.6}$$

где β – угол раствора лунки, a – ее полудлина.

Для того, чтобы обеспечить конечность напряжений, однозначность смещений и самоуравновешенность краевой нагрузки, примем

$$\Phi(\zeta)=a_0+\Phi_0(\zeta), \quad \Phi_0(\zeta)=a_{-2}/\zeta^2+a_{-3}/\zeta^3+\ldots$$
$$\Psi(\zeta)=b_0+\Psi_0(\zeta), \quad \Psi_0(\zeta)=b_{-2}/\zeta^2+b_{-3}/\zeta^3+\ldots \tag{1.7}$$

При этом согласно [3, 4]:

$$a_0=\bar a_0=(\sigma_{11}^{\circ\,\infty}+\sigma_{22}^{\circ\,\infty})/(2\sigma^*), \quad b_0=(\sigma_{11}^{\circ\,\infty}-\sigma_{22}^{\circ\,\infty}-i2\sigma_{12}^{\circ\,\infty})/(2\alpha) \tag{1.8}$$

где $\sigma_{ij}^{\circ\infty}$ – значения условных напряжений на бесконечности.

С учетом (1.7), граничное условие приводится к виду

$$\sigma^*\Phi_0^1(\sigma)\sigma\omega'(\sigma)+\alpha\overline{\Psi_0^{-1}(\sigma)}\bar\sigma\overline{\omega'(\sigma)}=-a_0\sigma^*\sigma\omega'(\sigma)-\alpha\bar b_0\bar\sigma\overline{\omega'(\sigma)} \tag{1.9}$$

Сопряженное ему уравнение имеет вид

$$\sigma^*\overline{\Phi_0^1(\sigma)}\bar\sigma\overline{\omega'(\sigma)}-\alpha\Psi_0^1(\sigma)\sigma\omega'(\sigma)=-\bar a_0\sigma^*\bar\sigma\overline{\omega'(\sigma)}-\alpha b_0\omega'(\sigma) \tag{1.10}$$

Здесь σ – точки единичной окружности; Φ_0, Ψ_0 – искомые функции, вводимые равенствами (1.7);

$$\Phi_0^1(\chi)=\Phi_0[\omega(\chi)], \quad \Psi_0^1(\chi)=\Psi_0[\omega(\chi)]$$

Интегрируя уравнения (1.8) и (1.10) по единичной окружности $|\sigma|=1$, предварительно умножив правые и левые части на ядро Коши и возвращаясь к прежней переменной ζ, получим

$$\Phi(\zeta)=\frac{k\alpha\bar{b}_0[(\zeta+a)^k-(\zeta-a)^k]^2-ka_0\sigma^*[(\zeta+a)^k+(\zeta-a)^k]^2}{\sigma^*(1-k)[(\zeta+a)^k-(\zeta-a)^k]^2-k\sigma^*[(\zeta+a)^k+(\zeta-a)^k]^2}$$

$$\Psi(\zeta)=\frac{ka_0\sigma^*[(\zeta+a)^k-(\zeta-a)^k]^2-\alpha b_0k[(\zeta+a)^k+(\zeta-a)^k]^2}{\alpha(1-k)[(\zeta+a)^k-(\zeta-a)^k]^2-\alpha k[(\zeta+a)^k+(\zeta-a)^k]^2} \quad (1.11)$$

При $k=1/2$ формулы (1.11) совпадают с формулами, полученными в [4] для прямолинейного разреза.

Вводя локальную полярную систему координат с полюсом в угловой точке выреза ρ, θ и используя формулы (1.3), (1.4), получим асимптотические представления

$$\Phi\sim k(2a)^{2k}(-\sigma_{22}^{\circ\,\infty}+i\sigma_{12}^{\circ\,\infty})[\sigma^*(A+iB)]^{-1}$$

$$\Psi\sim k(2a)^{2k}(\sigma_{22}^{\circ\,\infty}+i\sigma_{12}^{\circ\,\infty})[\alpha(A+iB)]^{-1} \quad (1.12)$$

$$A=-2^{k+1}\rho^ka^k\cos k\theta+(1-2k)(2a)^{2k}, \quad B=-2^{k+1}\rho^ka^k\sin k\theta \quad (1.13)$$

Используя формулы (1.3) и (1.4), (1.12), (1.13), находим

$$\sigma_{11}^\circ=2k(2a)^{2k}[(\sigma_{22}^{\circ\,\infty})^2+(\sigma_{12}^{\circ\,\infty})^2]^{1/2}B^2(A^2+B^2)^{-3/2} \quad (1.14)$$

$$\sigma_{22}^\circ=2k(2a)^{2k}[(\sigma_{22}^{\circ\,\infty})^2+(\sigma_{12}^{\circ\,\infty})^2]^{1/2}A^2(A^2+B^2)^{-3/2}$$

$$\sigma_{12}^\circ=-2k(2a)^{2k}[(\sigma_{22}^{\circ\,\infty})^2+(\sigma_{12}^{\circ\,\infty})^2]^{1/2}AB(A^2+B^2)^{-3/2}$$

$$\sigma_{11}=2\alpha\sigma^*(\sigma_{12}^{\circ\,\infty})^2[\lambda(\alpha-\sigma^*)]^{-1}[(\sigma_{22}^{\circ\,\infty})^2+(\sigma_{12}^{\circ\,\infty})^2]^{-1} \quad (1.15)$$

$$\sigma_{22}=2\alpha\sigma^*(\sigma_{22}^{\circ\,\infty})^2[\lambda(\alpha-\sigma^*)]^{-1}[(\sigma_{22}^{\circ\,\infty})^2+(\sigma_{12}^{\circ\,\infty})^2]^{-1}$$

$$\sigma_{12}=2\alpha\sigma^*\sigma_{12}^{\circ\,\infty}\sigma_{22}^{\circ\,\infty}[\lambda(\alpha-\sigma^*)]^{-1}[(\sigma_{22}^{\circ\,\infty})^2+(\sigma_{12}^{\circ\,\infty})^2]^{-1}$$

При $\sigma_{12}^{\circ\,\infty}=0$ формулы (1.15) принимают вид:

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=0, \quad \sigma_{22}=\lambda^{-1}2\sigma^*/(\alpha-\sigma^*)$$

Таким образом, убеждаемся, что истинные напряжения, в отличие от условных, не зависят от параметра k, характеризующего геометрию выреза и совпадают с найденными в [4] истинными напряжениями для прямолинейного разреза.

Это обстоятельство еще раз (см. [3, 4]) доказывает целесообразность использования в нелинейной теории упругости в качестве наиболее рациональной пары тензоров «обобщенная сила – обобщенное смещение» тензора условных напряжений – тензора кратности удлинений.

Полученное решение, учитывающее большие деформации и повороты вблизи угловых точек выреза, могут быть использованы в нелинейной теории разрушения при формулировке адекватного критерия прочности тела с «телесной» трещиной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литвиненкова З. Н.* Нелинейная антиплоская деформация тела, ослабленного вырезом в виде лунки // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 3. С. 578–580.
2. *Литвиненкова З. Н.* Большая антиплоская деформация несжимаемого упругого тела с вырезом и жестким включением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 136–140.
3. *Новожилов В. В., Черных К. Ф.* Об истинных мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике деформируемого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 73–79.

Ленинград

Поступила в редакцию 29.VI.1988