МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1989

УДК 531.383

С. С. РИВКИН

К ДИНАМИКЕ ГИРОТАХОМЕТРА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Получены общие формулы для динамических погрешностей гиротахометра (ГТ), предназначенного для измерения угловой скорости качки корабля при гармоническом и случайном законах ее изменения. Приведенные формулы позволяют производить расчет погрешностей ГТ при заданной его структуре и известных характеристиках измеряемого полезного сигнала, а также осуществлять предварительный выбор параметров прибора, исходя из точностных требований. Установлена математическая связь между погрешностями ГТ при регулярной и нерегулярной качке корабля. Показано, что для приближенных расчетов погрешностей ГТ можно качку корабля полагать регулярной. При более точном расчете погрешностей ГТ и при выборе их параметров, особенно для приборов прецизионного типа, следует пользоваться формулами, полученными для условий нерегулярного волнения моря. Сказанное справедливо не только для ГТ, но и для других измерительных приборов рассматриваемого типа. Вследствие существенной зависимости динамических погрешностей измерительных приборов от вида аппроксимации спектральной плотности входного полезного сигнала всестороннее теоретическое и экспериментальное исследование вероятностных характеристик случайных колебаний объектов является актуальной задачей.

1. В различных областях техники широкое применение получили приборы, которые служат для измерения некоторых переменных величин, имеющих колебательный характер. По классификации Крылова [1] эти приборы предназначены для записи именно «возмущающей силы». Обычно к ним предъявляются весьма высокие точностные требования. Среди погрешностей этих приборов наиболее существенными являются динамические погрешности, возникающие при измерении параметров, характеризующих колебательное движение объекта (качка корабля, колебания летательного аппарата и др.). В связи с этим целью статьи является исследование динамических погрешностей рассматриваемого типа измерительных приборов, получение для них расчетных формул, которые могут быть использованы при решении прикладных задач.

2. В качестве примера определим динамические погрешности гироскопического измерителя угловой скорости — гиротахометра (ГТ), который получил широкое применение в системах управления подвижными объектами, а также в бесплатформенных системах навигации и стабилизации [2, 3]. Рассмотрим ГТ с «электрической» пружиной [4, 5], где чувствительный элемент представляет собой двухстепенной гироскоп на поплавковом подвесе [6]. Предположим, что ГТ измеряет угловую скорость бортовой качки корабля $u_x=\theta^{\cdot}$ (θ — угол бортовой качки). Уравнение ГТ, пренебрегая влиянием возмущающих воздействий, можно записать в виде [4, 5]:

$$J_0\beta^{\cdot\cdot}+b\beta^{\cdot}+c\beta=Hu_x \tag{2.1}$$

Здесь H — кинетический момент гироскопа, J_0 — момент инерции поплавкового гироузла относительно оси его вращения, β — угол поворота поплавка, b — коэффициент демпфирования, c — коэффициент жесткости электрической пружины.

Вводя обозначения:

$$T=\left(\frac{J_0}{c}\right)^{1/2}=\frac{1}{n},\qquad n=\left(\frac{c}{J_0}\right)^{1/2},\qquad \zeta=\frac{b}{2(J_0c)^{1/2}},\qquad k=\frac{H}{c}\tag{2.2}$$

перепишем уравнение (2.1) в виде

$$T^2\beta^{\cdot\cdot}+2\zeta T\beta^{\cdot}+\beta=ku_x\tag{2.3}$$

где T — постоянная времени ГТ, ζ — относительный коэффициент затухания, k — передаточный коэффициент, $n=1/T$ — частота собственных незатухающих колебаний.

Заметим, что уравнение типа (2.3) характеризует колебательные процессы, происходящие во многих механических и электрических системах [7, 8]. Поэтому приводимые далее расчетные формулы справедливы для различных измерительных приборов рассматриваемого типа.

В положении статистического равновесия при $u_x=\mathrm{const}$ показания ГТ будут

$$\beta_s=ku_x\tag{2.4}$$

3. Определим динамическую погрешность ГТ при изменении угловой скорости $u_x(t)$ по гармоническому закону

$$u_x(t)=a_x\sin\omega t\tag{3.1}$$

где a_x — амплитуда, ω — круговая частота.

Вводя (3.1) в уравнение (2.3), для вынужденных колебаний ГТ получим зависимость

$$\beta(t)=a_xA(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)]\tag{3.2}$$

где амплитудная $A(\omega)$ и фазовая $\varphi(\omega)$ частотные характеристики ГТ определяются формулами

$$A(\omega)=\frac{k}{[(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2T^2\omega^2]^{1/2}},\qquad \varphi(\omega)=-\mathrm{arctg}\frac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}\tag{3.3}$$

Амплитуда вынужденных колебаний ГТ будет

$$\beta_0=a_xA(\omega)=ka_x\gamma\tag{3.4}$$

$$\gamma=\beta_0/\beta_s=[(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2T^2\omega^2]^{-1/2}\tag{3.5}$$

— коэффициент динамичности, который для уменьшения динамических искажений в показаниях прибора по амплитуде в заданном диапазоне частот ω колебаний объекта должен быть близким к единице [1].

Динамическая погрешность ГТ определяется соотношением

$$e(t)=\beta(t)/k-u_x(t)\tag{3.6}$$

или, учитывая (3.2) и (3.1),

$$e(t)=a_xk^{-1}A(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)]-a_x\sin\omega t\tag{3.7}$$

Погрешность e характеризуется двумя величинами: амплитудной погрешностью

$$e_a=(\gamma-1)100\%\tag{3.8}$$

и погрешностью из-за фазового сдвига e_Φ, наибольшее значение которой e_0 при $A(\omega)/k=\gamma\approx1$ и при малом $\varphi(\omega)$ [1] согласно (3.7) определяется формулой

$$e_0=a_x\sin\varphi(\omega)\tag{3.9}$$

При малом $\varphi(\omega)$ и $T^2\omega^2\ll1$ в силу (3.3) и (2.2) имеем (знак минус опускаем)

$$e_0=2a_x\zeta T\omega=a_xb\omega/c\tag{3.10}$$

Пример 1. Вычислить динамические погрешности ГТ поплавкового типа с параметрами [6] $H=100{,}03\cdot10^{-5}$ Н·м·с (10,2 гс·см·с), $J_0=0{,}343\cdot10^{-5}$ Н·м·с² (0,035 гс·см·с²), $c=4845\cdot10^{-5}$ Н·м/рад (494 гс·см/рад), $b=50\cdot10^{-5}$ Н·м·с (5,1 гс·см·с). ГТ измеряет угловую скорость бортовой качки корабля $u_x=\theta^{\cdot}$; примем [4]: $\theta_0=10°$, $T_\theta=8$ с, $\omega=0{,}8$ с$^{-1}$; тогда $u_{x\,0}=\theta_0^{\cdot}=a_x=0{,}14$ с$^{-1}$.

С помощью приведенных выше формул находятся основные характеристики ГТ $n=119$ с$^{-1}$, $T=0{,}0084$ с, $k=0{,}0206$ с, $\zeta=0{,}613$, $\beta_s=9{,}92'$, $\gamma=1{,}00002$, $\varphi(\omega)=-28'20''$.

По формулам (3.8) и (3.10) определяются динамические погрешности ГТ $e_a=0{,}002\%$, $e_0=11{,}56\cdot10^{-4}$ с$^{-1}$.

Из примера следует, что амплитудная погрешность ГТ e_a мала. Погрешность ГТ e_0 из-за фазового сдвига является существенной. Возможности ее уменьшения следуют из формулы (3.10).

4. Определим динамическую погрешность ГТ при условии, что измеряемая им угловая скорость $u_x(t)=\theta^{\cdot}(t)$ — нормальная стационарная случайная функция времени, полной характеристикой которой являются математическое ожидание $\langle u_x(t)\rangle$ и корреляционная функция $K_{u_x}(\tau)$ или спектральная плотность $S_{u_x}(\omega)$. Примем, что

$$\langle u_x(t)\rangle=\langle\theta^{\cdot}(t)\rangle=0 \tag{4.1}$$

При указанной постановке задачи в согласии с уравнением (2.3) и соотношением (3.6) динамическая погрешность ГТ $e(t)$ по окончании переходного процесса также будет нормальной стационарной случайной функцией, и для определения ее вероятностных характеристик, в частности дисперсии $D[e]$, можно воспользоваться спектральной теорией случайных функций [9].

В силу уравнения (2.3) и зависимостей (3.6) и (4.1) в установившемся режиме

$$\langle\beta(t)\rangle=\langle e(t)\rangle=0 \tag{4.2}$$

Выразив в уравнении (2.3) с учетом (4.2) $\beta(t)$ через $e(t)$ (см. (3.6)), получим уравнение для ошибки ГТ

$$T^2\ddot{e}+2\zeta T\dot{e}+e=-T^2\ddot{u}_x-2\zeta T\dot{u}_x \tag{4.3}$$

которому соответствует передаточная функция ГТ по ошибке

$$W_e(s)=\frac{e(s)}{-u_x(s)}=\frac{T^2s^2+2\zeta Ts}{T^2s^2+2\zeta Ts+1} \tag{4.4}$$

Для спектральной плотности $S_e(\omega)$ погрешности $e(t)$ справедливо выражение

$$S_e(\omega)=|W_e(j\omega)|^2S_{u_x}(\omega)=\frac{T^4\omega^4+4\zeta^2T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2T^2\omega^2}S_{u_x}(\omega) \tag{4.5}$$

Тогда для дисперсии динамической погрешности ГТ получим

$$D[e]=\int_{-\infty}^{\infty}S_e(\omega)\,d\omega \tag{4.6}$$

Выражение (4.5) позволяет высказать некоторые общие соображения о требованиях к виду аппроксимации спектральной плотности $S_{u_x}(\omega)$ входного полезного сигнала $u_x(t)=\theta^{\cdot}(t)$. Необязательным является выполнение условия $S_{u_x}(0)=0$, так как в силу (4.5) $S_e(0)=0$, что имеет реальный физический смысл. Ввиду резонансного свойства прибора существенное влияние на его динамическую погрешность оказывает уровень спектральной плотности $S_{u_x}(\omega)$ в окрестности собственной частоты $\omega=n=1/T$. В согласии со сказанным для корреляционной функции полезного сигнала примем [9]:

$$K_{\theta^{\cdot}}(\tau)=A_{\theta^{\cdot}}e^{-\mu|\tau|}(\cos\lambda\tau+(\mu/\lambda)\sin\lambda|\tau|) \tag{4.7}$$

$$A_{\theta^{\cdot}}=D[\theta^{\cdot}]=b_\theta^2D[\theta],\quad b_\theta^2=\mu^2+\lambda^2 \tag{4.8}$$

$D[\theta]$ — дисперсия углов бортовой качки, μ — коэффициент нерегулярности качки, λ — преобладающая частота качки корабля на нерегулярном волнении.

Корреляционной функции (4.7) соответствует выражение для спектральной плотности

$$S_{\theta^\cdot}(\omega)=\frac{2A_\theta\cdot\mu}{\pi}\frac{b_\theta^2}{\omega^4+2a_\theta\omega^2+b_\theta^4}\tag{4.9}$$

$$a_\theta=\mu^2-\lambda^2\tag{4.10}$$

Согласно (4.9) ординаты функции $S_{\theta^\cdot}(\omega)$ весьма быстро убывают с ростом частоты ω и практически равны нулю в окрестности собственной частоты прибора. Целесообразность применения аппроксимации вида (4.9) подтверждается расчетами качки корабля на нерегулярном волнении [10], показывающими, что спектры качки ограничены по частоте несколькими единицами радиан в секунду.

Подставляя (4.9) в (4.5) и сводя интеграл (4.6) к табличному [9], получим формулу

$$D[e]=\frac{4T^2\zeta^2b_\theta^2+T\left(\frac{\mu}{\zeta}T^2b_\theta^2+4\zeta\mu T^2b_\theta^2+T^3b_\theta^4\right)}{(1-T^2b_\theta^2)^2+4[T^2\zeta^2b_\theta^2+T\mu(\zeta+T\mu)+T^3\zeta\mu b_\theta^2]}D[\theta^\cdot]\tag{4.11}$$

которая выражает дисперсию динамической погрешности ГТ в зависимости от характеристик $D[\theta^\cdot]$, b_θ^2, μ входного полезного сигнала, а также от параметров T, ζ прибора.

Пример 2. Вычислить вероятностные характеристики динамической погрешности ГТ (пример 1) при измерении угловой скорости бортовой качки $u_x(t)=\theta^\cdot(t)$ для исходных данных: $D[\theta^\cdot]=22{,}1\cdot10^{-4}$ с$^{-2}$, $\mu=0{,}1$ с$^{-1}$, $\lambda=0{,}8$ с$^{-1}$.

По формуле (4.11) с учетом (4.8) находим $D[e]=15{,}04\cdot10^{-8}$ с$^{-2}$; тогда среднеквадратичная и наибольшая погрешности ГТ будут: $\sigma_e=\sqrt{(D[e])}^{1/2}=3{,}88\cdot10^{-4}$ с$^{-1}$, $e_m=3\sigma_e=11{,}64\cdot10^{-4}$ с$^{-1}$.

Сопоставляя примеры 1 и 2, видим, что динамическая погрешность ГТ при нерегулярной качке корабля близка к погрешности прибора в условиях регулярной качки, что характерно для узкополосного процесса качки, спектральная плотность которого аппроксимируется выражением вида (4.9).

Установим математическую связь между динамическими погрешностями ГТ при регулярной и нерегулярной качке, т. е. сопоставим выражения (3.10) и (4.11). Расчеты показали, что для принятых параметров ГТ (пример 1) и характеристик входного сигнала (пример 2) знаменатель в формуле (4.11) практически равен единице; в числителе (4.11) достаточно удержать члены с T^2 и с T^3; так как $\mu/\lambda\ll1$, то можно принять $b_\theta\approx\lambda$ и не учитывать слагаемое с μ^2. Тогда формула (4.11) примет вид

$$D[e]=(4T^2\zeta^2\lambda^2+T^2\lambda^2(1+4\zeta^2)\zeta^{-1}T\mu)D[\theta^\cdot]\tag{4.12}$$

Первое слагаемое правой части соответствует погрешности ГТ при регулярной качке с частотой $\omega=\lambda$; второе слагаемое, содержащее коэффициент нерегулярности μ, определяет влияние на погрешность ГТ нерегулярного характера качки корабля. Действительно, при $\mu=0$ формула (4.12) принимает вид

$$\sigma_e=2\zeta T\lambda\sigma_{\theta^\cdot}\tag{4.13}$$

соответствующий при $\lambda=\omega$ зависимости (3.10), в которой $a_x=u_{x_0}=\theta_0^\cdot$ — амплитудное значение угловой скорости бортовой качки.

Для числовых данных примеров 1 и 2 значение первого члена, стоящего в скобках в правой части формулы (4.12), составляет $0{,}68\cdot10^{-4}$, а значение второго члена $0{,}016\cdot10^{-4}$, что подтверждает сделанный выше вывод о малом увеличении динамической погрешности ГТ за счет нерегулярного характера качки при использовании для спектральной плотности $S_{\theta^\cdot}(\omega)$ полезного сигнала выражения (4.9) и принятых параметров ГТ (пример 1).

Пользуясь обозначениями (2.2), формулу (4.12) можно преобразовать к виду

$$D[e]=\left[\frac{b^2}{c^2}\lambda^2+2\frac{J_0}{c}\lambda^2\left(\frac{J_0}{b}+\frac{b}{c}\right)\mu\right]D[\theta^\cdot]\tag{4.14}$$

Это соотношение позволяет осуществить предварительный выбор основных параметров ГТ J_0, b и c.

В прикладной теории гироскопов для корреляционной функции $K_{\dot\theta}(\tau)$ часто используют выражение [4, 9]:

$$K_{\dot\theta}(\tau)=A_\theta b_\theta^2 e^{-\mu|\tau|}(\cos\lambda\tau-(\mu/\lambda)\sin\lambda|\tau|) \qquad (4.15)$$

где $A_\theta=D[\theta]$ — дисперсия углов бортовой качки.

Корреляционной функции (4.15) соответствует выражение для спектральной плотности

$$S_{\dot\theta}(\omega)=\frac{2A_\theta\mu}{\pi}\,\frac{b_\theta^2\omega^2}{\omega^4+2a_\theta\omega^2+b_\theta^4} \qquad (4.16)$$

ординаты которой, в отличие от аппроксимации $S_{\dot\theta}(\omega)$ вида (4.9), весьма медленно убывают с увеличением частоты ω, что, вообще говоря, не отражает характер качки корабля на нерегулярном волнении моря [10].

Подставляя (4.16) в (4.5) и сводя интеграл (4.6) к табличному [9], получим выражение для дисперсии $D[e]$ динамической погрешности ГТ, которое отличается от (4.11) лишь некоторыми членами в числителе. Не приводя точной формулы для $D[e]$, заметим, что при тех же допущениях, которые принимались при упрощении (4.11), выражение для $D[e]$ можно представить в виде

$$D[e]=(4T^2\zeta^2\lambda^2+(1+4\zeta^2)^{-1}\zeta^{-1}T\mu)D[\dot\theta] \qquad (4.17)$$

Формула (4.17) имеет ту же структуру, что и зависимость (4.12). При этом слагаемые, характеризующие влияние регулярной качки, одинаковы; отличаются лишь слагаемые из-за нерегулярности качки. Расчеты показывают, что при использовании для $S_{\dot\theta}(\omega)$ выражения (4.16) погрешности ГТ, вычисленные по формуле (4.17), существенно возрастают и намного отличаются от ошибок прибора в условиях регулярной качки корабля, что не должно иметь места при узкополосном характере спектральной плотности качки. Поэтому при расчете динамических погрешностей ГТ, а также погрешностей аналогичных измерительных приборов, обладающих весьма малыми постоянными времени T, использование для спектральной плотности полезного сигнала выражений вида (4.16) нецелесообразно. Наоборот, при анализе динамики гироскопических устройств, относящихся к стабилизаторам (гировертикали, гиромаятники, силовые гироскопические стабилизаторы, гирокомпасы и др.), использование для спектральных плотностей кинематических параметров качки $S_{\dot\theta}(\omega)$, $S_{\ddot\theta}(\omega)$ выражений вида (4.16) весьма целесообразно, так как они обладают важным для этих устройств свойством $S_{\dot\theta}(0)=S_{\ddot\theta}(0)=0$, а медленность убывания ординат функций $S_{\dot\theta}(\omega)$, $S_{\ddot\theta}(\omega)$ с ростом частоты ω не является для указанных гироскопических устройств существенным, так как они имеют высокие сглаживающие свойства при значительных частотах колебаний

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 368 с.
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
3. *Климов Д. М.* Инерциальная навигация на море/Отв. ред. А. Ю. Ишлинский. М.: Наука, 1984. 116 с.
4. *Ривкин С. С.* Теория гироскопических устройств. Ч. II. Л.: Судостроение, 1964. 545 с.
5. *Одинцов А. А.* Теория и расчет гироскопических приборов. Киев: Вища школа, 1985. 392 с.
6. *Сломянский Г. А., Прядилов Ю. Н.* Поплавковые гироскопы и их применение. М.: Оборонгиз, 1958. 244 с.
7. *Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики. Т. II. М.: Наука, 1979. 543 с.
8. *Ден-Гартог Дж. П.* Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. 580 с.
9. *Свешников А. А., Ривкин С. С.* Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1974. 536 с.
10. Справочник по теории корабля. Т. 2. Л.: Судостроение, 1985. 440 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
6.V.1988