

УДК 539.3:534.1
© 1989

Е. Г. КАЛАШНИК, Г. Б. МУРАВСКИЙ

ДИНАМИКА ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ
НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

При изучении действия динамических нагрузок на различные инженерные сооружения широкое применение находит расчетная схема в виде балки, лежащей на деформируемом основании. В эту схему целесообразно внести уточнение путем учета поперечной деформируемости несущей конструкции, а также возможной несимметричности действующей нагрузки в поперечном направлении. Такие уточнения можно обеспечить применением расчетной схемы в виде бесконечно длинной ортотропной полосы, опирающейся на упруго-наследственное основание. Для случая свободных продольных кромок полосы строится предельное решение, соответствующее бесконечному росту жесткости в поперечном направлении. В качестве активной нагрузки принимается сосредоточенная сила $P_0 \exp(i\omega t)$, приложенная в некоторой точке полосы.

1. Начало координатных осей x_1, x_2 , лежащих в срединной плоскости недеформированной пластины, поместим под точкой приложения силы (фиг. 1). Уравнение изгиба ортотропной пластины с осями упругой симметрии, параллельными осям x_1, x_2 , имеет вид [1]:

$$L(w) = q \tag{1.1}$$

$$L(w) = D \{ (1+\lambda)w_{,1111} + 2[\nu + (1-\lambda^2-\nu^2)/(1+\kappa)]w_{,1122} + (1-\lambda)w_{,2222} \},$$

$$D = \frac{2}{3} E h^3 (1-\lambda^2-\nu^2)^{-1}$$

где $2h$ — толщина пластины; λ, ν, κ, E упругие постоянные ортотропного материала (для изотропного материала $\lambda=0, \kappa=\nu$, параметр E равен модулю Юнга); q — внешняя нагрузка; индексы после запятой означают частные производные по соответствующим координатам. Интерес представляет также случай бесконечной жесткости в поперечном направлении: $\lambda = -1+0, \nu=0$; в этом случае модуль Юнга в направлении оси x_1 равен $E/2$.

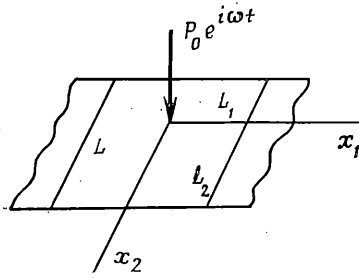
Пусть свойства деформируемого основания, на которое опирается полоса, определяются следующим соотношением между приложенным к основанию давлением $p(x_1, x_2, t)$ и нормальными перемещениями $w(x_1, x_2, t)$ поверхности основания

$$p = k \left[w + \mu \int_0^t G(t-t_1) \frac{\partial w(x_1, x_2, t_1)}{\partial t_1} dt_1 \right] \tag{1.2}$$

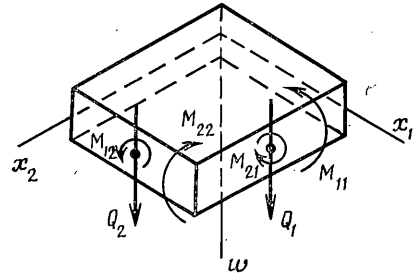
где k, μ — положительные постоянные, $G(z)$ — ядро релаксации (функция, положительная при $z \geq 0$ и монотонно убывающая до нуля с ростом аргумента z). Зависимость типа (1.2) применялась в [2, 3]. Для установившегося режима колебаний с временным законом $\exp(i\omega t)$ имеем следующую связь между амплитудными значениями давления p_0 и перемещений w_0 :

$$p_0 = k(a+ib)w_0 \tag{1.3}$$

$$a = 1 + \mu \int_0^\infty G(s) \sin(\omega s) ds, \quad b = \mu \omega \int_0^\infty G(s) \cos(\omega s) ds$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Заметим, что при $G(s)=\delta(s)$ (дельта-функция) получаем механизм диссипации Фойхта ($a=1, b=i\omega$).

Если на пластину действует осциллирующая сила $P_0 e^{i\omega t}$, то в качестве нагрузки q в (1.1) следует подставить $q=P_0 e^{i\omega t} \delta(x_1) \delta(x_2) - p - m \partial^2 w / \partial t^2$, где m — масса единицы площади пластины, p определяется по (1.2). Рассматривая установившиеся колебания и переходя к амплитудным значениям зависящих от времени величин, запишем

$$L(w_0) + k(a+ib)w_0 - m\omega^2 w_0 = P_0 \delta(x_1) \delta(x_2) \quad (1.4)$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \delta_1, \quad \xi_2 = x_2 \delta_2, \quad \delta_1 = [k/D(1+\lambda)]^{1/4} = (k_1/E_1 J)^{1/4} \\ \delta_2 &= [k/D(1-\lambda)]^{1/4} = \delta_1 [(1+\lambda)/(1-\lambda)]^{1/4}, \quad k_1 = kL \\ E_1 &= E(1+\lambda)/(1-\lambda^2 - \nu^2), \quad J = (2/3) L h^3 \end{aligned}$$

Величина J равна моменту инерции поперечного сечения полосы относительно центральной оси, параллельной x_2 , E_1 — модуль деформации в направлении оси x_1 . Уравнение (1.4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} w_{0,1111} + 2A w_{0,1122} + w_{0,2222} - \beta w_0 &= P_0 h_1 \delta(\xi_1) \delta(\xi_2) \quad (1.5) \\ l = \delta_2 L, \quad h_1 &= l^{-1} [k^2 D^2 (1-\lambda^2)]^{-1/4} = (k_1^3 E_1 J)^{-1/4}, \quad \beta = \omega_1^2 - a - ib \\ A &= [\nu + (1-\lambda^2 - \nu^2)/(1+\kappa)] (1-\lambda^2)^{-1/2} = \nu (1-\lambda^2)^{-1/2} + 2C l^2 \\ \omega_1 &= \omega (m/k)^{1/2}, \quad C = G_{12} (E_1 \delta_1^2 L^2)^{-1}, \quad G_{12} = E/[2(1+\kappa)] \end{aligned}$$

где G_{12} — модуль сдвига. В уравнении (1.5) дифференцирование производится по переменным ξ_1, ξ_2 .

Требуется построить решение (1.5), убывающее при $|\xi_1| \rightarrow \infty$ и удовлетворяющее требуемым граничным условиям на краях полосы $\xi_1 = -l_1 = -\delta_2 L_1, \xi_2 = l_2 = \delta_2 L_2$. Эти условия уточняются ниже. Применяв преобразование Фурье по переменной ξ_1 , получим

$$\alpha^4 w_{0F}(\alpha, \xi_2) - 2A \alpha^2 w_{0F,22} + w_{0F,2222} - \beta w_{0F} = P_0 h_1 \delta(\xi_2) \quad (1.6)$$

$$w_{0F} = \int_{-\infty}^{\infty} w_0 e^{-i\alpha \xi_1} d\xi_1, \quad w_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_{0F}(\alpha, \xi_2) e^{i\alpha \xi_1} d\alpha \quad (1.7)$$

Сначала рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (1.6). Для решений вида $\exp(r\xi_2)$ получаем характеристическое уравнение $r^4 - 2A\alpha^2 r^2 + \alpha^4 - \beta = 0$. Корни, лежащие в левой полуплоскости комплексной плоскости, равны

$$r_1 = -[A\alpha^2 + (\alpha^4 A^2 + \beta - \alpha^4)^{1/2}]^{1/2}, \quad r_2 = -[A\alpha^2 - (\alpha^4 A^2 + \beta - \alpha^4)^{1/2}]^{1/2} \quad (1.8)$$

Корни $r_3 = -r_1, r_4 = -r_2$ лежат в правой полуплоскости. Радикалы в (1.8) понимаются в смысле главных значений, т. е. аргумент подкоренного выражения берется в промежутке $[-\pi, \pi)$. Заметим, что точка β при $\mu > 0, \omega_1 > 0$ лежит в нижней полуплоскости. Сначала построим решение для

случая бесконечной ширины пластины. Имея в виду требование убывания решения при $|\xi_2| \rightarrow \infty$, запишем

$$w_{0F\infty} = C_1 e^{r_1 \xi_2} + C_2 e^{r_2 \xi_2} \quad (\xi_2 \geq 0)$$

Учитывая, что согласно (1.6) при $\xi_2 = +0$ третья производная $w_{0F\infty}$ равна $P_0 h l_1 / 2$, а первая производная равна нулю, получаем

$$w_{0F\infty} = (1/2) P_0 h l_1 (r_1^2 - r_2^2)^{-1} (r_1^{-1} e^{r_1 |\xi_2|} - r_2^{-1} e^{r_2 |\xi_2|}) \quad (1.9)$$

Обращая преобразование Фурье, запишем решение для бесконечной ортотропной пластины

$$w_{0\infty} = \frac{P_0 h l_1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{[\alpha^4 (A^2 - 1) + \beta]^{1/2}} \left[\frac{\exp(r_1 |\xi_2|)}{r_1} - \frac{\exp(r_2 |\xi_2|)}{r_2} \right] \cos(\alpha \xi_1) d\alpha$$

В частном случае изотропной пластины ($\lambda = 0$, $\kappa = \nu$, $A = 1$, $r_1 = -(\alpha^2 + \beta^{1/2})^{1/2}$, $r_2 = -(\alpha^2 - \beta^{1/2})^{1/2}$) имеем

$$w_{0\infty} = \frac{P_0 h l_1}{4\pi \beta^{1/4}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\exp(r_1 |\xi_2|)}{r_1} - \frac{\exp(r_2 |\xi_2|)}{r_2} \right] \cos(\alpha \xi_1) d\alpha$$

С использованием модифицированных функций Бесселя [4] получим

$$w_{0\infty} = (4\pi)^{-1} P_0 h l_1 \beta^{-1/2} \{ -K_0 [\beta^{1/4} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}] + K_0 [i \beta^{1/4} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}] \}$$

Величине $\beta^{1/4}$ соответствует точка в четвертом квадранте комплексной плоскости.

2. Перейдем к построению решения для пластины конечной ширины. Представим решение уравнения (1.6) в виде суммы (1.9) и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$w_{0F} = w_{0F\infty} + D_1 \exp[r_1 (\xi_2 + l_1)] + D_2 \exp[r_2 (\xi_2 + l_1)] + D_3 \exp[r_1 (l_2 - \xi_2)] + D_4 \exp[r_2 (l_2 - \xi_2)] \quad (2.1)$$

Экспоненты в (2.1) равны единице на одной из кромок пластины и убывают по направлению к другой кромке, можно сказать, что экспоненциальные слагаемые представляют соответствующие краевые эффекты.

Рассмотрим случай свободных кромок пластины. Потребуем обращения в нуль при $\xi_2 = -l_1$ и $\xi_2 = l_2$ изгибающего момента M_{22} и обобщенной поперечной силы $V_2 = Q_2 + \partial M_{12} / \partial x_1 = \partial M_{22} / \partial x_2 + 2 \partial M_{12} / \partial x_1$, где M_{12} — крутящий момент (фиг. 2). Согласно [1] с использованием переменных ξ_1 , ξ_2 запишем при $\xi_2 = -l_1$ и $\xi_2 = l_2$:

$$w_{0,22} + a_1 w_{0,11} = 0, \quad w_{0,222} + a_2 w_{0,112} = 0 \quad (2.2)$$

$$a_1 = \nu(1 - \lambda^2)^{-1/2}, \quad a_2 = [\nu + 2(1 - \lambda^2 - \nu^2) / (1 + \kappa)] (1 - \lambda^2)^{-1/2} = a_1 + 4Cl^2$$

Для трансформанты Фурье вместо (2.2) получаем

$$w_{0F,22} - a_1 \alpha^2 w_{0F} = 0, \quad w_{0F,222} - a_2 \alpha^2 w_{0F,2} = 0 \quad (2.3)$$

Условия (2.3) приводят к следующей системе линейных уравнений для постоянных D_1, \dots, D_4 :

$$\beta_1 D_1 + \beta_2 D_2 + \beta_1 A_1 D_3 + \beta_2 A_2 D_4 = b_1, \quad \varepsilon_1 D_1 + \varepsilon_2 D_2 - \varepsilon_1 A_1 D_3 - \varepsilon_2 A_2 D_4 = b_2 \quad (2.4)$$

$$\beta_1 A_1 D_1 + \beta_2 A_2 D_2 + \beta_1 D_3 + \beta_2 D_4 = b_3, \quad \varepsilon_1 A_1 D_1 + \varepsilon_2 A_2 D_2 - \varepsilon_1 D_3 - \varepsilon_2 D_4 = b_4$$

$$\beta_i = r_i^2 - \alpha^2 a_1, \quad \varepsilon_i = r_i (r_i^2 - \alpha^2 a_2), \quad A_i = e^{r_i l} \quad (i = 1, 2)$$

$$b_1 = -(w_{0F\infty,22} - \alpha^2 a_1 w_{0F\infty})|_{\xi_2 = -l_1}, \quad b_2 = -(w_{0F\infty,222} - \alpha^2 a_2 w_{0F\infty,2})|_{\xi_2 = -l_1}$$

Величины b_3 и b_4 определяются теми же выражениями, что и b_1 и b_2 , но при $\xi_2 = l_2$. Заметим, что $\varepsilon_1 = -r_1 \beta_2$, $\varepsilon_2 = -r_2 \beta_1$. Систему (2.4) удобно решать следующим образом. Исключаем D_3 , используя первое и третье уравнения,

а затем используя второе и четвертое. Из двух полученных уравнений исключаем D_4 . Далее исключаем D_3 , используя первое и второе уравнения, а затем третье и четвертое, и вновь из полученных двух уравнений исключаем D_4 . В итоге из полученных двух уравнений, содержащих D_1 и D_2 , определяем D_1 и D_2 . Приведем выражение для коэффициента D_1 :

$$D_1 = \Delta^{-1} \{ [\varepsilon_1(b_1 - A_2 b_3) + \beta_1(b_2 - A_2 b_4)] 2(1 - A_1 A_2) \beta_2 \varepsilon_2 - [\varepsilon_2(b_1 - A_1 b_3) + \beta_2(b_2 - A_1 b_4)] (1 - A_2^2) (\beta_1 \varepsilon_2 + \beta_2 \varepsilon_1) \} \quad (2.5)$$

$$\Delta = 4(1 - A_1 A_2)^2 \beta_1 \beta_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - (1 - A_1^2)(1 - A_2^2)(\beta_1 \varepsilon_2 + \beta_2 \varepsilon_1)^2$$

Коэффициент D_2 получается из D_1 в результате замены всюду, кроме b_3, r_1, r_2 на r_2, r_1 соответственно; D_3 из D_1 и D_4 из D_2 можно получить заменой b_1, b_2, b_3, b_4 на $b_3, -b_4, b_1, -b_2$. Указанные переходы непосредственно усматриваются из структуры системы (2.4). Если в решении (2.1) устремить l к бесконечности, то получим решение для полубесконечной пластины со свободной кромкой $\xi_2 = -l$. В этом случае в (2.1) последние два слагаемых исчезают, а вместо (2.5) получаем ($A_1 = A_2 = 0$):

$$D_1 = \Delta^{-1} [2(\varepsilon_1 b_1 + \beta_1 b_2) \beta_2 \varepsilon_2 - (\varepsilon_2 b_1 + \beta_2 b_2)(\beta_1 \varepsilon_2 + \beta_2 \varepsilon_1)] \\ \Delta = -(\beta_1 \varepsilon_2 - \beta_2 \varepsilon_1)^2$$

Коэффициент D_2 получается из D_1 , как и выше. Окончательное решение найдем, переходя от трансформанты Фурье к оригиналу с помощью (1.7).

Аналогично исследуются случаи других граничных условий на кромках $\xi_2 = -l_1, \xi_2 = l_2$. Так если кромки жестко заземлены, то приравниваются нулю значения w_{0F} и $w_{0F,2}$ при $\xi_2 = -l_1$ и $\xi_2 = l_2$. Соответствующая система уравнений и решение получается из (2.4), (2.5), если положить $\beta_i = 1, \varepsilon_i = r_i, b_1 = -w_{0F\infty}(-l_1), b_2 = -w_{0F\infty,2}(-l_1), b_3 = -w_{0F\infty}(l_2), b_4 = -w_{0F\infty,2}(l_2)$.

Продолжим исследование решения для случая пластины со свободными кромками. Пусть жесткость материала пластины в поперечном направлении неограниченно возрастает. Ясно, что очертание срединной поверхности пластины в поперечных сечениях должно приближаться к прямолинейному. Будем находить предел решения (2.1), (2.5) при $\nu = 0$ при $\lambda \rightarrow -1 + 0$. Величины δ_2, l становятся бесконечно малыми, $E_1 \rightarrow E/2, a_1 = 0, a_2 = 4Cl^2$. Рассмотрим величину Δ по (2.5). Разлагая по степеням l величины $A_1 A_2, A_1^2, A_2^2$, приходим к следующему представлению $\Delta \approx -4r_1^3 r_2^3 (r_1^2 - r_2^2)^2 l^4 (4C\alpha^2 + r_1^2 r_2^2 / 12)$, причем $r_1^2 r_2^2 = \alpha^4 - \beta$. При выполнении предельного перехода в (2.1) первое слагаемое обращается в нуль (в нем содержится множитель l), а в последующих слагаемых, как показывает изучение коэффициентов D_i , достаточно вместо экспонент подставить первые два члена их разложения по степеням показателя. Действительно, в каждом D_i группа слагаемых с b_1, b_3 имеет порядок $1/l$, а группа слагаемых с b_2, b_4 ограничена; хотя каждый коэффициент D_i в отдельности растет при $l \rightarrow 0$, при сложении в (2.1) получаем ограниченный результат. Линейный характер предельного решения в поперечном направлении позволяет ограничиться определением полусуммы w_0^* перемещений кромок $\xi_2 = -l_1$ и $\xi_2 = l_2$ и разности перемещений, деленной на $L(\varphi_0)$. Запишем

$$w_{0F}^* = 0,5(1 + A_1)(D_1 + D_3) + 0,5(1 + A_2)(D_2 + D_4) \approx \\ \approx -4r_1 r_2 (r_1^2 - r_2^2)^2 l^3 (4C\alpha^2 + r_1^2 r_2^2 / 12) (b_2 - b_4) / \Delta \approx P_0 h_1 / (\alpha^4 - \beta) \quad (2.6)$$

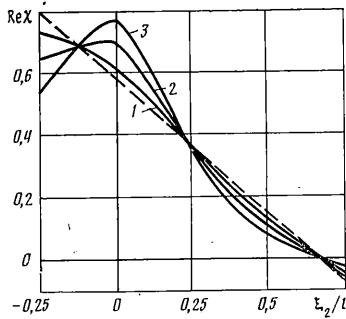
Этот результат соответствует следующему дифференциальному уравнению для величины w_0^* :

$$\partial^4 w_0^* / \partial \xi_1^4 - \beta w_0^* = P_0 h_1 \delta(\xi_1)$$

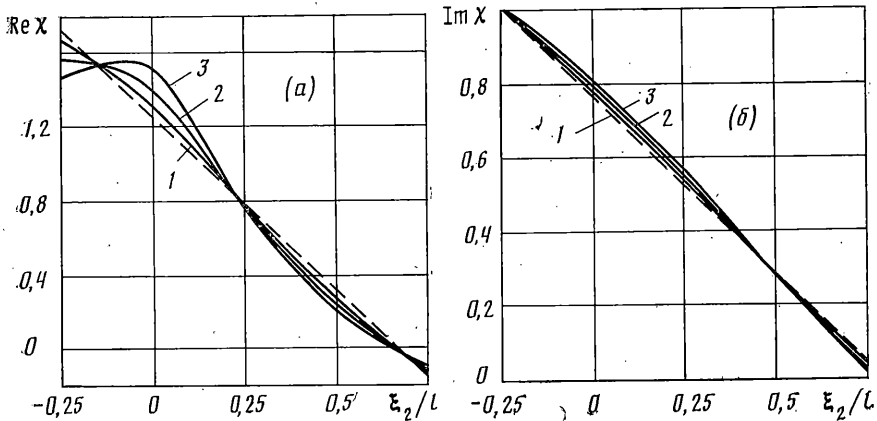
или

$$E_1 J \partial^4 w_0^* / \partial x_1^4 + k_1 (a + i b - \omega_1^2) w_0^* = P_0 \delta(x_1)$$

В общем случае в правую часть следует подставить величину активной нагрузки, приходящейся на единицу длины полосы. Таким образом, величина w_0^* может быть найдена из рассмотрения полосы как балки.



Фиг. 3



Фиг. 4

Обращая преобразование Фурье (2.6) и определяя интеграл через вычеты, получаем

$$\omega_0^* = \frac{P_0 h_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^4 - \beta} e^{i\alpha \xi_1} d\alpha = \frac{P_0 i h_1}{4z^3} (ie^{-z|\xi_1|} - e^{-z|\xi_1|}) \quad (2.7)$$

где $z = \beta^{1/4}$. Рассмотрим величину φ_{0F} :

$$\begin{aligned} \varphi_{0F} &= L^{-1} [(1-A_1)(D_1-D_3) + (1-A_2)(D_2-D_4)] \approx \\ &\approx -4r_1^3 r_2^3 l^2 (r_1^2 - r_2^2)^2 (b_1 - b_3) / (L\Delta) \approx (4C\alpha^2 + r_1^2 r_2^2 / 12)^{-1} P_0 e_0 h_1 / L^2 \quad (2.8) \end{aligned}$$

где $e_0 = (L_2 - L_1) / 2$ — эксцентриситет точки приложения силы. Соотношению (2.8) соответствует следующее дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет величина φ_0 :

$$\varphi_{0,1111} - 48C\varphi_{0,11} - \beta\varphi_0 = 12P_0 e_0 h_1 L^{-2} \delta(\xi_1)$$

Или после перехода к исходной координате x_1 :

$$\frac{E_1 J L^2}{12} \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x_1^4} - 4G_{12} J \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} - \frac{k_1 \beta L^2}{12} \varphi_0 = P_0 e_0 \delta(x_1) \quad (2.9)$$

В общем случае правая часть равна амплитуде погонного активного момента. Первые два слагаемых представляют крутящий момент внутренних напряжений. В соответствии с (2.9) крутящий момент в поперечном сечении пластины имеет вид

$$M_0 = -\frac{E_1 J L^2}{12} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x_1^3} + 4G_{12} J \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} \quad (2.10)$$

Этот результат по своей структуре соответствует теории Тимошенко — Власова кручения тонкостенных стержней, следует однако заметить, что первое слагаемое в (2.10) учитывает сопротивление от изгиба продольных элементов-полосок относительно срединной линии сечения, а подобным сопротивлением, как известно, указанная теория пренебрегает (секториальный момент инерции сечения в рассматриваемом случае равен нулю). Второе слагаемое в (2.10) представляет момент чистого (нестесненного) кручения для стержня прямоугольного сечения при большом значении отношения ширины сечения к его толщине. Перейдем от трансформанты Фурье (2.8) к оригиналу

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{6P_0 e_0 h_1}{\pi L^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^4 + 48C\alpha^2 - \beta)^{-1} e^{i\alpha \xi_1} d\alpha = \\ &= -3P_0 e_0 h_1 i (L^2 \gamma)^{-1} (\alpha_1^{-1} e^{i\alpha_1 |\xi_1|} - \alpha_2^{-1} e^{i\alpha_2 |\xi_1|}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (-24C - \gamma)^{1/2}, \quad \alpha_2 = -(-24C + \gamma)^{1/2} = \beta / (\gamma + 24C)^{1/2} \\ \gamma &= (576C^2 + \beta)^{1/2} \end{aligned}$$

Все радикалы понимаются в смысле главных значений. По найденным величинам w_0^* и φ_0 амплитуды перемещений, соответствующие предельному решению определяются следующим образом

$$w_0 = w_0^* - \varphi_0 (x_2 - e_0) = w_0^* - \varphi_0 \xi_2 L / l + \varphi_0 e_0 \quad (2.12)$$

Сравнение результатов вычислений по формуле (2.10) и по точным формулам (2.1), (2.5), (2.7) приведено на фиг. 3 ($\omega_1 = 0$) и фиг. 4 ($\omega_1 = 0,9$). Величина χ равна $w_0 / P_0 h_1$. Было принято $\delta_1 L = 6$, $\nu = 0$, $C = 0,02$, $a = 1$, $b = 0,2\omega_1$ (диссипация по Фойхту), $e_1 = L/4$. Кривые 1–3 соответствуют значениям $\lambda = -0,9$; $-0,5$; $-0,1$, а штриховая линия представляет решение (2.12). Графики наглядно иллюстрируют приближение к решению, соответствующему стержневой модели.

В заключение укажем на возможность непосредственного перехода от решений, отвечающих неподвижной гармонической силе, к решениям, соответствующим такой же силе, движущейся с постоянной скоростью v вдоль оси x_1 . Согласно [5] в интегралы Фурье типа (1.7), (2.7) или (2.11) следует вместо ω_1 подставить $\omega_1 - \alpha v_1$ и вместо ξ_1 подставить $\xi_1 - v_1 \tau$, где $v_1 = v \delta_1 (m/k)^{1/2}$ — безразмерная скорость, а $\tau = t(k/m)^{1/2}$ — безразмерное время. Видоизмененный таким образом интеграл представит амплитуду решения, стационарного в подвижной системе координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. Муравский Г. Б. Колебания балки, лежащей на упругонаследственном основании // Строит. механика и расчет сооружений. 1976. № 3. С. 38–44.
3. Муравский Г. Б. Колебания балки типа Тимошенко, лежащей на упругонаследственном основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 167–179.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
5. Муравский Г. Б. О соответствии между стационарными решениями для неподвижных и подвижных нагрузок // Строит. механика и расчет сооружений. 1985. № 1. С. 45–48.

Москва

Поступила в редакцию
25.II.1988