МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1989

УДК 539.3:534.1

В. М. ДАРЕВСКИЙ

МЕТОД РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Излагается решение задачи об устойчивости оболочки вращения произвольной формы при кручении. Используется аналитический метод, указанный в [1]. Приводятся результаты расчета оболочек вращения с параболической образующей (выпуклой и вогнутой). Показано, что выпуклость образующей повышает, а вогнутость понижает устойчивость оболочки.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая оболочка с двумя краями, у которой срединная поверхность П образована вращением произвольной линии (образующей) вокруг оси Z прямоугольной системы координат XYZ; начало координат — в середине отрезка оси вращения, ограниченного крайними поперечными сечениями оболочки. Форма образующей определяется равенством $R=f(\zeta)$, где R — радиус поперечного сечения (нормального к оси Z) поверхности П, $f(\zeta)$ — положительная функция безразмерной координаты $\zeta=z/l$ $(-1\leqslant\zeta\leqslant1)$ $2l$ — длина оболочки (расстояние между ее краями).

Считается, что края оболочки прикреплены к жестким фланцам, на которые действуют равные по величине и противоположные по направлению крутящие моменты M. Они передаются на края оболочки в виде равномерно распределенных сдвигающих усилий S. В качестве характерного крепления краев оболочки к фланцам принимается заделка (защемление).

Задача состоит в определении критического значения λ_* безразмерного параметра λ, пропорционального M. Величина λ_* определяется как наименьшее из положительных собственных значений λ на основании линеаризованных уравнений устойчивости, причем докритическое напряженное состояние считается безмоментным.

2. Уравнения устойчивости. Для рассматриваемой оболочки вращения, нагруженной только по краям моментами M, линеаризованные уравнения устойчивости (уравнения равновесия для дополнительного напряженного состояния) в координатах ζ, φ (φ — угловая координата) имеют вид

$$\begin{gathered}
(T_1B)_\zeta'+A(S_2)_\varphi'-T_2B_\zeta'-N_1ABR_1^{-1}+\\
+S_1^\circ[A(\varepsilon_1)_\varphi'-B_\zeta'(\omega)]-S_2^\circ B_\zeta'\omega=0\\
A(T_2)_\varphi'+(S_1B)_\zeta'+S_2B_\zeta'-N_2ABR_2^{-1}+\\
+(S_1^\circ B\varepsilon_2)_\zeta'+S_2^\circ(B\varepsilon_2)_\zeta'=0\\
(N_1B)_\zeta'+A(N_2)_\varphi'+T_1ABR_1^{-1}+T_2ABR_2^{-1}+\\
+(S_1^\circ+S_2^\circ)AB\tau=0\\
(M_{12}B)_\zeta'+A(M_2)_\varphi'+M_{21}B_\zeta'-N_2AB=0\\
A(M_{21})_\varphi'+(M_1B)_\zeta'-M_2B_\zeta'-N_1AB=0\\
A^2=f'^2(\zeta)+l^2,\ B^2=R^2=f^2(\zeta),\ R_1^{-1}=\\
=-lf''(\zeta)/A^3,\ R_2^{-1}=l/AB=l/Af(\zeta).
\end{gathered}\tag{2.1}$$

где T_1, T_2, S_1, S_2, N_1, N_2 и M_1, M_2, M_{12}, M_{21} — дополнительные усилия и моменты; ε_1, ε_2, ω и τ — компоненты дополнительной тангенциальной деформации и величина дополнительного кручения; S_1°, S_2° — докритические сдвигающие усилия; A, B и R_1, R_2 — коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны поверхности П.

Уравнения (2.1) могут быть получены из нелинейных уравнений равновесия оболочки произвольной формы, приведенных, например, в [2], если считать, как обычно, что потеря устойчивости оболочки вызывается в основном тангенциальными усилиями, а докритическое напряженное состояние — безмоментным (в данном случае оно определяется только усилиями S_1°, S_2°).

Ограничиваясь рассмотрением оболочек «средней» длины, представляется возможным, как это делается для цилиндрической оболочки, не учитывать в первых двух уравнениях (2.1) члены с N_1, N_2, S_1°, S_2°, принимая при этом простейший вариант соотношений упругости и выражая τ и компоненты дополнительной изгибной деформации только через дополнительное нормальное перемещение. Тогда уравнения (2.1) переходят в следующую систему уравнений относительно дополнительных перемещений u, v, w:

$$\begin{gathered} a_1 u_{\varphi^2}'' + a_2 u_{\zeta^2}'' + a_3 v_{\zeta\varphi}'' + a_4 w_\zeta' + a_5 u_\zeta' + a_6 v_\varphi' + a_7 w + a_{1^*} u = 0 \\ b_1 v_{\varphi^2}'' + b_2 v_{\zeta^2}'' + b_3 u_{\zeta\varphi}'' + b_4 w_\varphi' + b_5 u_\varphi' + b_6 v_\zeta' + b_{1^*} v = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon\left(c_1 \overset{(4)}{w_{\varphi^4}} + c_2 \overset{(4)}{w_{\zeta^2\varphi^2}} + c_3 \overset{(4)}{w_{\zeta^4}} + c_4 w_{\zeta\varphi^2} + c_5 w_{\zeta^3} + c_{1*} w_{\varphi^2}'' + c_{2*} w_{\zeta^2}'' + c_{4*} w_\zeta'\right) +$$
$$+ \alpha\left(c_6 w + c_7 v_\varphi' + c_8 u_\zeta' + c_9 u\right) - \lambda\left(c_{10} w_{\zeta\varphi}'' + c_{11} w_\varphi'\right) = 0$$

$$a_1 = \frac{1-\nu}{2}, \quad a_2 = \frac{B^2}{A^2}, \quad a_3 = \frac{1+\nu}{2}\frac{B}{A}, \quad a_4 = -\frac{B^2}{AR_1} - \nu\frac{B^2}{AR_2}$$

$$a_5 = \frac{B}{A^2}\left(B' - \frac{B}{A}A'\right), \quad a_6 = -\frac{3-\nu}{2}\frac{B'}{A}, \quad a_7 = -\frac{B}{A}\left[\left(\frac{B}{R_1}\right)' +\right.$$
$$\left. + \nu\left(\frac{B}{R_2}\right)' - \frac{B'}{R_2} - \nu\frac{B'}{R_1}\right], \quad a_{1*} = \frac{B}{A}\left[\nu\left(\frac{B'}{A}\right)' - \frac{B'^2}{AB}\right]$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1-\nu}{2}\frac{B^2}{A^2}, \quad b_3 = \frac{1+\nu}{2}\frac{B}{A}, \quad b_4 = -\frac{B}{R_2} - \nu\frac{B}{R_1}$$

$$b_5 = \frac{3-\nu}{2}\frac{B'}{A}, \quad b_6 = \frac{1-\nu}{2}\frac{B}{A}\left(\frac{B}{A}\right)', \quad b_{1*} = -\frac{1-\nu}{2}\frac{B}{A}\left[\left(\frac{B'}{A}\right)' + \frac{B'^2}{AB}\right]$$

$$c_1 = \frac{A^2}{B^2}, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = \frac{B^2}{A^2}, \quad c_4 = -2\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right)$$

$$c_5 = 2\frac{B^2}{A^2}\left(\frac{B'}{B} - 3\frac{A'}{A}\right), \quad c_{1*} = 4\frac{B'^2}{B^2} - (3-\nu)\frac{A}{B}\left(\frac{B'}{A}\right)'$$

$$c_{2*} = 15\frac{B^2A'^2}{A^4} + (1+\nu)\frac{BB''}{A^2} - (7+\nu)\frac{BA'B'}{A^3} - \frac{B'^2}{A^2} - 4\frac{B^2A''}{A^3}$$

$$c_{4*} = -AB\left(\frac{1+\nu}{A^4}A'B' + \frac{BA''}{A^4} - 3\frac{BA'^2}{A^5} + \frac{B'^2}{A^3B} - \nu\frac{B''}{A^3}\right)'$$

$$c_6 = \frac{AB}{R_1^2} + 2\nu\frac{AB}{R_1R_2} + \frac{AB}{R_2^2}, \quad c_7 = -\frac{A}{R_2} - \nu\frac{A}{R_1}$$

$$c_8 = -\frac{B}{R_1} - \nu\frac{B}{R_2}, \quad c_9 = -\nu\frac{B'}{R_1} - \frac{B'}{R_2}, \quad c_{10} = \frac{A}{B}, \quad c_{11} = -\frac{AB'}{B^2}$$

$$\alpha = \frac{AB}{(1-\nu^2)r^2}, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)r^2}, \quad \lambda = \frac{2S^\circ R^2}{Ehr^2} = \frac{M}{\pi Ehr^2}$$

где $S^\circ = S_1^\circ = S_2^\circ$, h — толщина оболочки, E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона, штрихи означают производные по ζ. Величина r — значение R при каком-либо фиксированном значении ζ (она вводится для того, чтобы все коэффициенты уравнений (2.3) были бы безразмерными); для определенности можно считать $r=f(1)$.

При достаточно плавной образующей коэффициенты a_{1*}, b_{1*}, c_{1*}, c_{2*}, c_{4*} не должны быть значительно больше по модулю, чем соответственно a_1, b_1, c_1, c_2, c_4. Тогда, имея в виду, что для оболочки «средней» длины дифференцирование перемещений по φ приводит к появлению множителя n (n — число волн в окружном направлении, $n^2\gg 1$), можно пренебречь в уравнениях (2.2) членами с коэффициентами a_{1*}, b_{1*}, c_{1*}, c_{2*}, c_{4*} по сравнению с соответствующими членами с коэффициентами a_1, b_1, c_1, c_2, c_4 (в каждом конкретном случае это требует проверки).

3. Метод решения. Для решения поставленной задачи используется метод, указанный в [1]. Перемещения ищутся в виде

$$u=U_1(\zeta)\sin n\varphi+U_2(\zeta)\cos n\varphi,\quad v=V_1(\zeta)\cos n\varphi-V_2(\zeta)\sin n\varphi$$
$$w=W_1(\zeta)\sin n\varphi+W_2(\zeta)\cos n\varphi$$

Подстановка этих выражений в уравнения (2.2) приводит к двум связанным системам обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными по ζ коэффициентами:

$$\begin{gathered} L_s(U_1, V_1, W_1)=0\ (s=1, 2),\ L_3(U_1, V_1, W_1, \lambda W_2)=0 \\ L_s(U_2, V_2, W_2)=0\ (s=1, 2),\ L_3(U_2, V_2, W_2, -\lambda W_1)=0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

где L_1, L_2, L_3 — линейные дифференциальные операторы.

Полагая, что производные U_i'', V_i'', $W_i^{(4)}$ имеют в интервале $[-1, 1]$ ограниченное изменение, величины U_i, V_i, W_i представляются в виде

$$\begin{gathered} U_i=A_{i0}+A_{i1}\zeta+A_{i2}\zeta^2+S_i^{(1)} \\ V_i=B_{i0}+B_{i1}\zeta+B_{i2}\zeta^2+S_i^{(2)} \\ W_i=C_{i0}+C_{i1}\zeta+C_{i2}\zeta^2+C_{i3}\zeta^3+C_{i4}\zeta^4+S_i^{(3)} \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$S_i^{(p)}=\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_{im}^{(p)}\cos m\pi\zeta+\beta_{im}^{(p)}\sin m\pi\zeta)\qquad (i=1, 2;\ p=1, 2, 3)$$

причем ряды $S_i^{(1)}$, $S_i^{(2)}$ можно почленно дифференцировать два раза, а ряд $S_i^{(3)}$ — четыре раза (обоснование см. в [1]).

Для того, чтобы равенства (3.2) определяли решение системы (3.1), необходимо и достаточно, чтобы после подстановки выражений (3.2) в уравнения (3.1) левая часть каждого из них была бы ортогональна в интервале $[-1, 1]$ к 1, $\cos k\pi\zeta$, $\sin k\pi\zeta$ ($k=1, 2,\ldots$). Эти операции (подстановка и ортогонализация) приводят к двум связанным системам линейных алгебраических уравнений, каждая из которых состоит из девяти уравнений относительно неизвестных коэффициентов представлений (3.2).

Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\sum_{p=0}^{2}(A_{*p}^{(s)}A_{ip}+B_{*p}^{(s)}B_{ip})+\sum_{p=0}^{4}C_{*p}^{(s)}C_{ip}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{3}(a_{*m}^{(ps)}\alpha_{im}^{(p)}+b_{*m}^{(ps)}\beta_{im}^{(p)})=0$$

$$\sum_{p=0}^{2}(A_{*p}^{(3)}A_{ip}+B_{*p}^{(3)}B_{ip})+\sum_{p=0}^{4}C_{*p}^{(3)}C_{ip}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{3}(a_{*m}^{(p3)}\alpha_{im}^{(p)}+b_{*m}^{(p3)}\beta_{im}^{(p)})-$$
$$-(-1)^i\lambda\left[\sum_{p=0}^{4}C_{*p}C_{ip}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_{*m}{}^*\alpha_{qm}^{(3)}+b_{*m}{}^*\beta_{qm}^{(3)}\right]=0$$

$$\sum_{p=0}^{2}[A_{jp}^{(s)}(k)A_{ip}+B_{jp}^{(s)}(k)B_{ip}]+\sum_{p=0}^{4}C_{jp}^{(s)}(k)C_{ip}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{3}\left[a_{jm}^{(ps)}(k)\alpha_{im}^{(p)}+b_{jm}^{(ps)}(k)\beta_{im}^{(p)}\right]=0 \tag{3.3}$$

$$\sum_{p=0}^{2}\left[A_{jp}^{(3)}(k)A_{ip}+B_{jp}^{(3)}(k)B_{ip}\right]+\sum_{p=0}^{4}C_{jp}^{(3)}(k)C_{ip}-(-1)^{i}\lambda\left\{\sum_{p=0}^{4}C_{jp}(k)C_{qp}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_{jm}^{*}(k)\alpha_{qm}^{(3)}+b_{jm}^{*}(k)\beta_{qm}^{(3)}\right]\right\}=0 \quad (i,s,j=1,2;\ q=2 \text{ при } i=1,\ q=1 \text{ при } i=2)$$

В (3.3) коэффициенты при неизвестных определяются через коэффициенты системы (2.2) (без a_{1*}, b_{1*}, c_{1*}, c_{2*}, c_{4*}) последовательно (снизу вверх) по формулам (интегралы берутся в пределах от -1 до 1):

$$A_{*p}^{(s)}=\int A_p^{(s)}\,d\zeta,\quad B_{*p}^{(s)}=\int B_p^{(s)}\,d\zeta,\quad C_{*p}^{(s)}=\int C_p^{(s)}\,d\zeta$$

$$a_{*m}^{(ps)}=\int a_m^{(ps)}d\zeta,\quad b_{*m}^{(ps)}=\int b_m^{(ps)}\,d\zeta,\quad C_{*p}=\int C_p\,d\zeta,\quad a_{*m}{}^{*}=\int a_m{}^{*}\,d\zeta$$

$$b_{*m}{}^{*}=\int b_m{}^{*}\,d\zeta,\quad A_{jp}^{(s)}(k)=\int A_p^{(s)}T_{jk}(\zeta)\,d\zeta,\quad B_{jp}^{(s)}(k)=\int B_p^{(s)}T_{jk}(\zeta)\,d\zeta$$

$$C_{jp}^{(s)}(k)=\int C_p^{(s)}T_{jk}(\zeta)\,d\zeta,\quad a_{jm}^{(ps)}(k)=\int a_m^{(ps)}(k)T_{jk}(\zeta)\,d\zeta$$

$$b_{jm}^{(ps)}(k)=\int b_m^{(ps)}T_{jk}(\zeta)\,d\zeta,\quad C_{jp}(k)=\int C_pT_{jk}(\zeta)\,d\zeta$$

$$a_{jm}{}^{*}(k)=\int a_m{}^{*}T_{jk}(\zeta)\,d\zeta,\quad b_{jm}{}^{*}(k)=\int b_m{}^{*}T_{jk}(\zeta)\,d\zeta\quad (j=1,2;\ s=1,2,3)$$

$$T_{1k}(\zeta)=\cos k\pi\zeta,\quad T_{2k}(\zeta)=\sin k\pi\zeta$$

$$A_0^{(1)}=-n^2a_1,\quad A_1^{(1)}=a_5-n^2a_1\zeta,\quad A_2^{(1)}=2a_2-n^2a_1\zeta^2+2a_5\zeta$$

$$B_0^{(1)}=-na_6,\quad B_1^{(1)}=-na_3-na_6\zeta,\quad B_2^{(1)}=-2na_3\zeta-na_6\zeta^2$$

$$C_0^{(1)}=a_7,\quad C_1^{(1)}=a_4+a_7\zeta,\quad C_2^{(1)}=2a_4\zeta+a_7\zeta^2$$

$$C_3^{(1)}=3a_4\zeta^2+a_7\zeta^3,\quad C_4^{(1)}=4a_4\zeta^3+a_7\zeta^4$$

$$a_m^{(11)}=-(n^2a_1+a_2m^2\pi^2)\cos m\pi\zeta-a_5m\pi\sin m\pi\zeta$$

$$b_m^{(11)}=-(n^2a_1+a_2m^2\pi^2)\sin m\pi\zeta+a_5m\pi\cos m\pi\zeta$$

$$a_m^{(21)}=na_3m\pi\sin m\pi\zeta-na_6\cos m\pi\zeta\quad b_m^{(21)}=-na_3\,m\pi\cos n\pi\zeta-na_6\sin m\pi\zeta$$

$$a_m^{(31)}=-a_4m\pi\sin m\pi\zeta+a_7\cos m\pi\zeta,\quad b_m^{(31)}=-a_4m\pi\cos m\pi\zeta+a_7\sin m\pi\zeta$$

$$A_0^{(2)}=nb_5,\quad A_1^{(2)}=nb_3+nb_5\zeta,\quad A_2^{(2)}=2nb_3\zeta+nb_5\zeta^2$$

$$B_0^{(2)}=+n^2b_1,\quad B_1^{(2)}=b_6-n^2b_1\zeta,\quad B_2^{(2)}=-n^2b_1\zeta^2+2b_2+2b_6\zeta$$

$$C_0^{(2)}=nb_4,\quad C_1^{(2)}=nb_4\zeta,\quad C_2^{(2)}=nb_4\zeta^2,\quad C_3^{(2)}=nb_4\zeta^3,\quad C_4^{(2)}=nb_4\zeta^4$$

$$a_m^{(12)}=-nb_3m\pi\sin m\pi\zeta+nb_5\cos m\pi\zeta,\quad b_m^{(12)}=nb_3m\pi\cos m\pi\zeta+nb_5\sin m\pi\zeta$$

$$a_m^{(22)}=-n^2b_1\cos m\pi\zeta-b_2m^2\pi^2\cos m\pi\zeta-b_6m\pi\sin m\pi\zeta$$

$$b_m^{(22)}=-n^2b_1\sin m\pi\zeta-b_2m^2\pi^2\sin m\pi\zeta+b_6m\pi\cos m\pi\zeta$$

$$a_m^{(32)}=nb_4\cos m\pi\zeta,\quad b_m^{(32)}=nb_4\sin m\pi\zeta$$

$$A_0^{(3)}=\alpha c_9,\quad A_1^{(3)}=\alpha(c_8+c_9\zeta),\quad A_2^{(3)}=\alpha(2c_8\zeta+c_9\zeta^2)$$

$$B_0^{(3)} = -\alpha n c_7, \quad B_1^{(3)} = -\alpha n c_7 \zeta, \quad B_2^{(3)} = -\alpha n c_7 \zeta^2$$

$$C_0^{(3)} = \varepsilon n^4 c_1 + \alpha c_6, \quad C_1^{(3)} = \varepsilon (n^4 c_1 \zeta - n^2 c_4) + \alpha c_6 \zeta$$

$$C_2^{(3)} = \varepsilon (n^4 c_1 \zeta^2 - 2n^2 c_2 - 2n^2 c_4 \zeta) + \alpha c_6 \zeta^2$$

$$C_3^{(3)} = \varepsilon (n^4 c_1 \zeta^3 - 6n^2 c_2 \zeta - 3n^2 c_4 \zeta^2 + 6c_5) + \alpha c_6 \zeta^3$$

$$C_4^{(3)} = \varepsilon (n^4 c_1 \zeta^4 - 12 n^2 c_2 \zeta^2 + 24 c_3 - 4n^2 c_4 \zeta^3 + 24 c_5 \zeta) + \alpha c_6 \zeta^4$$

$$C_0 = n c_{11}, \quad C_1 = n c_{11} + n c_{11} \zeta, \quad C_2 = 2n c_{10} \zeta + n c_{11} \zeta^2$$

$$C_3 = 3n c_{10} \varsigma^2 + n c_{11} \varsigma^3, \quad C_4 = 4n c_{10} \varsigma^3 + n c_{11} \varsigma^4$$

$$a_m^{(13)} = \alpha (c_9 \cos m\pi\zeta - c_8 m\pi \sin m\pi\zeta), \quad b_m^{(13)} = \alpha (c_9 \sin m\pi\zeta + c_8 m\pi \cos m\pi\zeta)$$

$$a_m^{(23)} = -\alpha n c_7 \cos m\pi\zeta, \quad b_m^{(23)} = -\alpha n c_7 \sin m\pi\zeta$$

$$a_m^{(23)} = -\alpha n c_7 \cos m\pi\zeta, \quad b_m^{(13)} = -\alpha n c_7 \sin m\pi\zeta$$

$$b_m^{(33)} = \varepsilon (n^4 c_1 + n^2 c_2 m^2 \pi^2 + c_3 m^4 \pi^4) \sin m\pi\zeta - \varepsilon (n^2 c_4 m\pi - c_5 m^3 \pi^3) \cos m\pi\zeta + \alpha c_6 \sin m\pi\zeta$$

$$a_m^* = n c_{11} \cos m\pi\zeta - n c_{10} m\pi \sin m\pi\zeta, \quad b_m^* = n c_{11} \sin m\pi\zeta + n c_{10} m\pi \cos m\pi\zeta$$

Принимаемые граничные условия (условия заделки краев оболочки) приводят к равенствам $U_i(\pm 1) = V_i(\pm 1) = W_i(\pm 1) = W_i'(\pm 1) = 0$ $(i=1,\ 2)$. Отсюда и из представлений (3.2) получаем

$$A_{i0} = -A_{i2} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \alpha_{im}^{(1)}, \quad A_{i1} = 0$$

$$B_{i0} = -B_{i2} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \alpha_{im}^{(2)}, \quad B_{i1} = 0$$

$$C_{i0} = C_{i4} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \alpha_{im}^{(3)}, \quad C_{i1} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m\pi \beta_{im}{}^3$$

$$C_{i2} = -2C_{i4}, \quad C_{i3} = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m\pi \beta_{im}^{(3)} \quad (i=1, 2)$$

С помощью этих равенств исключаются из системы (3.3) величины A_{i0}, A_{i1}, B_{i0}, B_{i1}, C_{i0}, C_{i2}, C_{i3}, после чего она переходит в две связанные системы (соответствующие $i=1,\ 2$) из девяти уравнений каждая, относительно шести неизвестных A_{i2}, B_{i2}, C_{i4} $(i=1,\ 2)$ и двенадцати неизвестных $\alpha_{im}^{(p)}$, $\beta_{im}^{(p)}$ $(i=1,\ 2;\ p=1,\ 2,\ 3)$.

В ту и другую систему входят два уравнения, не содержащие k и λ. Они позволяют исключить из других уравнений A_{i2}, B_{i2} $(i=1,\ 2)$, после чего получается система вида

$$\overset{*3}{C}_{**4} C_{i4} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{3} (\overset{*p3}{a}_{**m} \alpha_{im}^{(p)} + \overset{*p3}{b}_{**m} \beta_{im}^{(p)}) -$$

$$-(-1)^i \lambda \Big[\overset{*}{C}_{**4} C_{q4} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{3} (\overset{*p}{a}_{**m} \alpha_{qm}^{(p)} + \overset{*p}{b}_{**m} \beta_{qm}^{(p)}) \Big] = 0$$

$$C_{*j4}^{*s}(k)C_{i4}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{3}[a_{*jm}^{*ps}(k)\alpha_{im}^{(p)}+b_{*jm}^{*ps}(k)\beta_{im}^{(p)}]=0$$

$$C_{*j4}^{*3}(k)C_{i4}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{3}[a_{*jm}^{*p3}(k)\alpha_{im}^{(p)}+b_{*jm}^{*p3}(k)\beta_{im}^{(p)}]-$$

$$-(-1)^{i}\lambda\left\{C_{*j}^{*}(k)C_{q4}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{3}[a_{*jm}^{*p}(k)\alpha_{qm}^{(p)}+b_{*jm}^{*p}(k)\beta_{qm}^{(p)}]\right\}=0 \qquad (3.4)$$

$$(i,\ s,\ j=1,\ 2;\ q=2 \text{ при } i=1,\ q=1 \text{ при } i=2)$$

Коэффициенты этой системы определяются через коэффициенты системы (3.3) по следующим формулам:

$$C_{*jm}^{*s}(k)=D^{-1}(A_{*j2}^{(s)}(k)D_2+B_{*j2}^{(s)}(k)D_1)+C_{*j4}^{(s)}(k)$$

$$a_{*jm}^{*ps}(k)=D^{-1}(A_{*j2}^{(s)}(k)D_{2m}^{(p)}+B_{*j2}^{(p)}(k)D_{1m}^{(p)})+a_{*jm}^{(p)}(k)$$

$$b_{*jm}^{*ps}(k)=D^{-1}(A_{*j2}^{(s)}(k)D_{4m}^{(p)}+B_{*j2}^{(s)}(k)D_{3m}^{(s)})+b_{*jm}^{(ps)}(k)$$

$$C_{**4}^{*3}=D^{-1}(A_{**2}^{(3)}D_2+B_{**2}^{(3)}D_1)+C_{**4}^{(3)}$$

$$a_{**m}^{*p3}=D^{-1}(A_{**2}^{(3)}D_{2m}^{(p)}+B_{**2}^{(3)}D_{1m}^{(p)})+a_{**m}^{(p3)}$$

$$b_{**m}^{*p3}=D^{-1}(A_{**2}^{(3)}D_{4m}^{(p)}+B_{**2}^{(3)}D_{3m}^{(p)})+b_{**m}^{(p3)}$$

$$C_{**4}^{*}=D^{-1}(A_*D_2+B_*D_1)+C_{**4}$$

$$a_{**m}^{*p}=D^{-1}(A_*D_{2m}^{(p)}+B_*D_{1m}^{(p)})+a_{**m}^{(p)}$$

$$b_{**m}^{*p}=D^{-1}(A_*D_{4m}^{(p)}+B_*D_{3m}^{(p)})+b_{**m}^{(p)}$$

$$C_{*j}^{*}(k)=D^{-1}(A_{*j}(k)D_2+B_{*j}(k)D_1)+C_{*j}(k)$$

$$a_{*jm}^{*p}(k)=D^{-1}(A_{*j}(k)D_{2m}^{(p)}+B_{*j}(k)D_{1m}^{(p)})+a_{*jm}^{(p)}(k)$$

$$b_{*jm}^{*p}(k)=D^{-1}(A_{*j}(k)D_{4m}^{(p)}+B_{*j}(k)D_{3m}^{(p)})+b_{*jm}^{(p)}(k) \qquad (s=1,2,3;\ j=1,2)$$

$$A_{*j2}^{(s)}(k)=A_{j2}^{(s)}(k)-A_{j0}^{(s)}(k),\quad B_{*j2}^{(s)}(k)=B_{j2}^{(s)}(k)-B_{j0}^{(s)}(k)$$

$$C_{*j4}^{(s)}(k)=C_{j0}^{(s)}(k)-2C_{j2}^{(s)}(k)+C_{j4}^{(s)}(k)$$

$$a_{*jm}^{(1s)}(k)=a_{jm}^{(1s)}(k)-(-1)^mA_{j0}^{(s)}(k),\quad a_{*jm}^{(2s)}(k)=a_{jm}^{(2s)}(k)-(-1)^mB_{j0}^{(s)}(k)$$

$$a_{*jm}^{(3s)}(k)=a_{jm}^{(3s)}(k)-(-1)^mC_{j0}^{(s)}(k),\quad b_{*jm}^{(1s)}(k)=b_{jm}^{(1s)}(k)$$

$$b_{*jm}^{(2s)}(k)=b_{jm}^{(2s)}(k),\quad b_{*jm}^{(3s)}(k)=b_{jm}^{(3s)}(k)+{}^1\!/_2(-1)^m m\pi(C_{j1}^{(s)}(k)-C_{j3}^{(s)}(k))$$

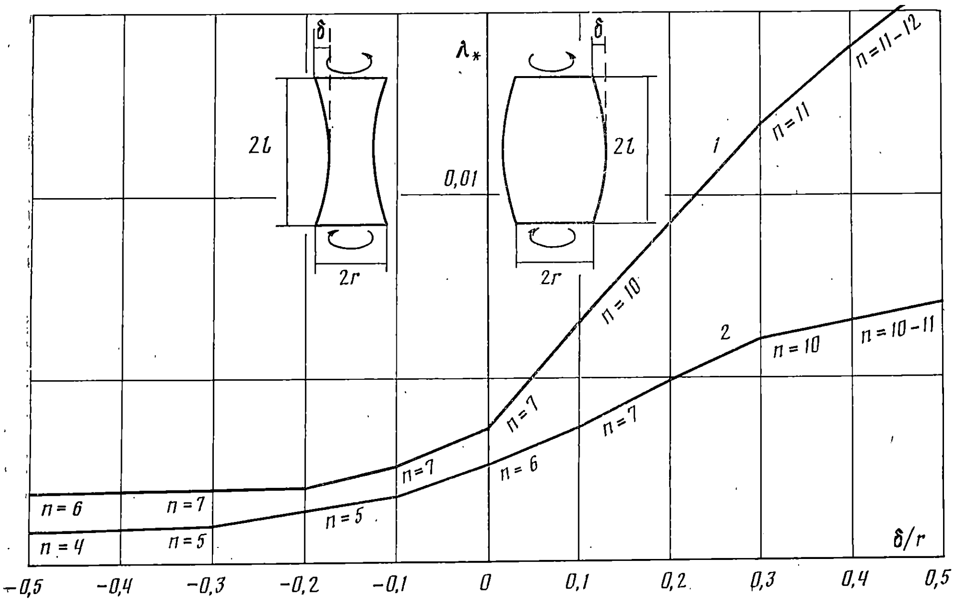
$$A_*=0,\quad B_*=0,\quad C_{**4}=C_{*0}-2C_{*2}+C_{*4}$$

$$a_{**m}^{(1)}=a_{**m}^{(2)}=0,\quad a_{**m}^{(3)}=a_{*m}^{*}-(-1)^mC_{*0},$$

$$b_{**m}^{(1)}=b_{**m}^{(2)}=0$$

$$b_{**m}^{(3)}=b_{*m}^{*}+{}^1\!/_2(-1)^m m\pi(C_{*1}-C_{*3})$$

$$A_{**2}^{(s)}=A_{*2}^{(s)}-A_{*0}^{(s)},\quad B_{**2}^{(s)}=B_{*2}^{(s)}-B_{*0}^{(s)},$$



$$C^{(s)}_{**4}=C^{(s)}_{*0}-2C^{(s)}_{*2}+C^{(s)}_{*4}$$

$$a^{(1s)}_{**m}=a^{(1s)}_{*m}-(-1)^m A^{(s)}_{*0}, \quad a^{(2s)}_{**m}=a^{(2s)}_{*m}-(-1)\,mB^{(s)}_{*0}$$

$$a^{(3s)}_{**m}=a^{(3s)}_{*m}-(-1)^m C^{(s)}_{*0}, \quad b^{(1s)}_{**m}=b^{(1s)}_{*m},$$

$$b^{(2s)}_{**m}=b^{(2s)}_{*m}$$

$$b^{(3s)}_{**m}=b^{(3s)}_{*m}+{}^1/_2(-1)^m m\pi\left(C^{(s)}_{*1}-C^{(s)}_{*3}\right)$$

$$A_{*j}(k)=B_{*j}(k)=0, \qquad C_{*j4}(k)=C_{j0}(k)-2C_{j2}(k)+C_{j4}(k)$$

$$a^{(1)}_{*jm}(k)=a^{(2)}_{*jm}(k)=b^{(1)}_{*jm}(k)=b^{(2)}_{*jm}(k)=0$$

$$a^{(3)}_{*jm}(k)=\overset{*}{a}_{jm}(k)-(-1)^m C_{j0}(k),$$

$$b^{(3)}_{*jm}(k)=\overset{*}{b}_{jm}(k)+{}^1/_2(-1)^m m\pi\left(C_{j1}(k)-C_{j3}(k)\right) \qquad (s=1,2,3;\ j=1,2)$$

$$D=A^{(1)}_{**2}B^{(2)}_{**2}-A^{(2)}_{**2}B^{(1)}_{**2},$$

$$D_1=A^{(2)}_{**2}C^{(1)}_{**4}-A^{(1)}_{**2}C^{(2)}_{**4}$$

$$D_2=B^{(1)}_{**2}C^{(2)}_{**4}-B^{(2)}_{**2}C^{(1)}_{**4},$$

$$D^{(p)}_{1m}=A^{(2)}_{**2}a^{(p1)}_{**m}-A^{(1)}_{**2}a^{(p2)}_{**m}$$

$$D^{(p)}_{2m}=B^{(1)}_{**2}a^{(p2)}_{**m}-B^{(2)}_{**1}a^{(p1)}_{**m},$$

$$D^{(p)}_{3m}=A^{(2)}_{**2}b^{(p1)}_{**m}-A^{(1)}_{**2}b^{(p2)}_{**m}$$

$$D^{(p)}_{4m}=B^{(1)}_{**2}b^{(p2)}_{**m}-B^{(2)}_{**2}b^{(p1)}_{**m}$$

при этом считается, что $D\neq 0$ (если $f(\zeta)$ — четная функция, то легко установить, что $D>0$).

При $k=1, 2, \ldots$ система (3.4) является бесконечной системой с неизвестными C_{i4}, $\alpha^{(p)}_{im}$, $\beta^{(p)}_{im}$ $(i=1,\ 2;\ p=1,\ 2,\ 3;\ m=1,\ 2, \ldots)$, которая, вообще говоря, может быть решена методом редукции (см. [1]).

Ограничиваясь значениями m, $k\leqslant N$, получаем из (3.4) усеченную систему, состоящую из $(2+12N)$ уравнений с $(2+12N)$ неизвестными. Коэффициенты этой системы зависят от n, а некоторые из них имеют множитель λ. Пусть $\Delta_N(\lambda, n)$ — определитель усеченной системы (3.4). Собственное значение λ при каком-либо значении n является в N-м приближении корнем уравнения

$$\Delta_N(\lambda, n)=0 \tag{3.5}$$

Поэтому, после того как по указанным формулам вычислены элементы определителя Δ_N, дальнейшая процедура решения (отыскания λ_*) состоит в следующем: при различных значениях n определяются соответствующие им наименьшие положительные корни $\lambda(n)$ уравнения (3.5), а затем определяется критическое значение λ_* параметра λ в результате минимизации $\lambda(n)$ по n, т. е. находится $\lambda_*=\min\limits_n \lambda(n)$. При определении $\lambda(n)$ параметр n варьируется в окрестности известного значения $n=n_0$, соответствующего критическому значению $\lambda=\lambda_0$ для цилиндра с радиусом, равным среднему значению $f(\zeta)$.

Для фиксированного n наименьший положительный корень $\lambda(n)$ уравнения (3.5) определяется по первому изменению знака определителя $\Delta_N(\lambda, n)$ при увеличении λ с выбранным шагом.

Разумеется, можно было бы не делать в системе (3.3) исключение неизвестных, которое приводит к системе (3.4). Вместо этого можно было изъять из уравнений (3.3) члены с A_{i1}, B_{i1}, заменить в (3.3) C_{i2} на $-2C_{i4}$ (в силу части граничных условий) и добавить к уравнениям (3.3) уравнения, выражающие остальные граничные условия. Это привело бы к расширенной (по сравнению с (3.4)) системе уравнений, которая при m, $k\leqslant N$ состояла бы из $(16+12N)$ уравнений (из них десять — граничные условия, а шесть — уравнения (3.1), ортогонализированные по отношению к единице) с $(16+12N)$ неизвестными: A_{i0}, A_{i2}, B_{i0}, B_{i2}, C_{i0}, C_{i1}, C_{i3}, C_{i4}; $\alpha_{im}^{(p)}$, $\beta_{im}^{(p)}$ $(i=1, 2;\ p=1, 2, 3;\ m=1, 2, \ldots, N)$.

Вычисления проводились для оболочек, у которых $f(\zeta)=r+\delta(1-\zeta^2)$, $h/r=0{,}01$, а $l/r=1$ и 2. Величина δ/r изменялась по модулю от 0 до 0,5. В качестве тестов служат вычисления при $\delta/r=0$. При $|\delta/r|\leqslant 0{,}1$ результаты первого приближения ($N=1$) близки к результатам второго ($N=2$) и третьего ($N=3$) приближений, которые в интервале $-0{,}5\leqslant\delta/r\leqslant 0{,}5$ незначительно отличаются друг от друга.

Результаты третьего приближения показаны на фигуре, где кривая *1* соответствует $l/r=1$, а кривая *2* — $l/r=2$. Видно, что выпуклость образующей (положительная величина δ) повышает, а вогнутость (отрицательная величина δ) понижает λ_* (критический момент M_*) по сравнению с цилиндрической оболочкой (для которой $\delta/r=0$).

Числовые расчеты проведены И. А. Ахвердиевым по составленной им программе для ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даревский В. М.* Применение метода дифференцируемых рядов для расчета оболочек вращения // Строит. механика и расчет сооружений. 1986. № 6. С. 16–21.
2. *Даревский В. М.* Нелинейные уравнения равновесия оболочки // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. № 3. С. 537–539.

Москва

Поступила в редакцию
4.X.1988