МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1989

УДК 539.3

И. Г. ТЕРЕГУЛОВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СРЕДЫ ДЛЯ НЕТОНКИХ АНИЗОТРОПНЫХ И ВОЛОКНИСТО-КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Для нетонких анизотропных оболочек, в которых необходим учет деформаций поперечного сдвига и напряжений обжатия, строятся нелинейные физические соотношения. В случае композитной оболочки, образованной из однонаправленно армированных слоев, рассматриваемых как трансверсально изотропные, выполнен асимптотический анализ по малым параметрам отношений жесткостей поперек и вдоль армирования и указаны структура зависимостей функций от инвариантов деформированного состояния. Приведены описания экспериментального отыскания входящих в физические соотношения функций от инвариантов деформированного состояния.

1. Введение. В теории пластин и оболочек к настоящему времени проблемы, связанные с учетом геометрической нелинейности, благодаря исследованиям многих ученых и особенно благодаря пионерским публикациям [1—5 и др.], достаточно хорошо разработаны. Дальнейшее развитие этого направления связано с анализом конечных поворотов (см. например, [6, 7]). Для изотропных сред общие вопросы построения определяющих соотношений разработаны в [8]. Однако проблемы, связанные с нелинейностью определяющих соотношений для упругих и неупругих анизотропных сред, еще мало исследованы. Особую остроту эти вопросы обрели в связи с интенсивным внедрением в инженерную практику композитных материалов. В этом направлении еще мало как теоретических, так и экспериментальных исследований и основанных на них феноменологических соотношений (например, [9—16]). Настоящее исследование посвящено решению указанной проблемы для нетонких оболочек, что представляет собой развитие наших предыдущих результатов, полученных для тонких анизотропных и композитных оболочек при конечных упругих и необратимых деформациях [17, 18]. Последние статьи содержат краткий обзор исследований в рассматриваемом направлении.

Существенной отличительной чертой нетонких пластин и оболочек является необходимость учета поперечного сдвига и напряжений обжатия. Учет этих характеристик необходим и в тонких многослойных и композитных оболочках при решении задач прочности в режиме расслоения. Потенциал напряжений в общем случае анизотропии неполярных сред является функцией всех шести возможных инвариантов деформированного состояния. Предположим, что работа напряжений на приращениях необратимой части деформации рассеивается в виде тепла. В этом случае для конечных деформаций необратимого процесса обобщенные формулы Грина имеют вид [17, 18]:

$$t^{ik}=\partial F/\partial e_{ik} \qquad (1)$$

где $t^{ik}=\rho_*\sigma^{ik}$, σ^{ik} — контравариантные составляющие симметрично тензора напряжения Коши Σ, отнесенные к деформированным осям в параметризации Лагранжа: $\Sigma=\sigma^{ik}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k$; $\mathbf{r}_i{}^*=\partial\mathbf{r}^*/\partial x^i$, $\mathbf{r}^*=\mathbf{r}+\mathbf{u}$ — вектор положения точки после деформации, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения, $\mathbf{r}$ — вектор положения до деформации, F — свободная энергия, t^{ik} — контравариантные составляющие тензора приведенных напряжений $\mathbf{T}$, заданного в недеформированном базисе: $\mathbf{T}=t^{ik}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k$, $\delta\varepsilon_{ik}=d\varepsilon_{ik}-\delta\varepsilon_{ik}^{(H)}$ — приращения мгновенно упругих деформаций, ε_{ik} — ковариантные составляющие симметричного тензора деформации Грина $\mathbf{E}_\varepsilon$, заданного в недеформированном базисе $\mathbf{E}_\varepsilon=\varepsilon_{ik}\mathbf{r}^i\mathbf{r}^k$, $\delta\varepsilon_{ik}^{(H)}$ — приращения необратимой части деформации, на которой напряжения σ^{ik} производят работу $\sigma^{ik}\delta\varepsilon_{ik}^{(H)}\geqslant 0$, полностью рассеиваемую в виде тепла, ρ_* — плотность деформированной среды.

2. Общая форма определяющих соотношений. Композитную оболочку будем считать образованной наложением однонаправленно армированных волокнами слоев, именуемых монослоями, или монолентами, если оболочка образована путем намотки однонаправленно армированных лент. Каждый из монослоев или каждая монолента в силу малости поперечных размеров армирующих волокон в сравнении с поперечным размером моноленты или толщины монослоя и большого их количества могут считаться квазиоднородными и представляют собой трансверсально изотропную среду с плоскостью изотропии, ортогональной направлению армирования. Для такой среды, в которой с осью механической симметрии — направлением армирования совместим ось Ox_1 ортогональной системы координат $Ox_1x_2x_3$, а ось Ox_2 совместим с плоскостью слоя и Ox_3 направим так, что $Ox_1x_2x_3$ — правая система координат, инварианты деформированного состояния (тензора деформации e_{ik}) примут вид [15, 16, 19—21]:

$$J_1=e_{11},\quad J_2=e_{13}^2+e_{12}^2=e_{1\alpha}e^{1\alpha} \tag{2}$$
$$J_3=e_{22}+e_{33}=e_{\alpha.}^{\ \alpha},\quad J_4=e_{22}^2+e_{33}^2+2e_{23}^2=e_{\alpha\beta}e^{\alpha\beta}$$
$$J_5=e_{11}e_{13}^2+e_{22}e_{12}^2+2e_{12}e_{13}e_{23}=e_{1\alpha}e^{\alpha\beta}e_{\beta 1}\quad(\alpha,\ \beta=2,\ 3)$$

При переходе к осям Ox'^i, полученным из осей Ox^i путем поворота на угол ψ вокруг оси Ox^3 $(x'^3=x^3)$ имеем $e_{33}=e_{33}'$

$$\begin{gathered}e_{11}=e_{11}'\cos^2\psi+e_{22}'\sin^2\psi-e_{12}'\sin 2\psi\\ e_{22}=e_{11}'\sin^2\psi+e_{22}'\cos^2\psi-e_{12}'\sin 2\psi\\ e_{12}=(e_{11}'-e_{22}')\sin\psi\cos\psi+e_{12}'\cos 2\psi\\ e_{13}=e_{13}'\cos\psi-e_{23}'\sin\psi,\ e_{23}=e_{13}'\sin\psi+e_{23}'\cos\psi\end{gathered} \tag{3}$$

Оси Ox'^i будем считать базовыми для всей оболочки, а оси Ox^i совпадают с описанными выше. Например, для оболочек, образованных намоткой однонаправленно армированной ленты, ось Ox^1 совмещается с направлением армирования соответствующего k-го слоя. Если оболочка образована накладкой однонаправленно армированных или ортотропных в своей плоскости слоев, то ось $Ox^1(k)$ направлена по оси с большим модулем упругости $E_1>E_2$.

Плоскость $Ox^2(k)x^3(k)$ для монослоя в этом случае будет плоскостью изотропии механических свойств и, следовательно, для описания механических свойств этого монослоя или моноленты следует ввести в рассмотрение пять приведенных выше инварианта (2).

Если t_{ik}' — составляющие тензора напряжения $\mathbf{T}$ в ортогональных осях Ox'^i, а e_{ik}' — в тех же осях составляющие тензора деформации, накопленной при бесконечно малых приращениях $\delta e_{ik}'$, то согласно (1)—(3) получим

$$\begin{gathered}\rho t_{11}'=A_1\cos^2\psi+A_3\sin^2\psi+2A_4e_{22}\sin^2\psi+A_2e_{12}\sin 2\psi+A_5\partial J_5/\partial e_{11}'\\ \rho t_{22}'=A_1\sin^2\psi+A_3\cos^2\psi+2A_4e_{22}\cos^2\psi-A_2e_{12}\sin 2\psi+A_5\partial J_5/\partial e_{22}'\\ \rho t_{12}'=1/2(A_3-A_1)\sin 2\psi+A_4e_{22}\sin 2\psi+A_2e_{12}\cos 2\psi+A_5\partial J_5/2\partial e_{12}'\\ \rho t_{13}'=2A_4e_{23}\sin\psi+A_2e_{13}\cos\psi+A_5\partial J_5/2\partial e_{13}'\\ \rho t_{23}'=2A_4e_{23}\cos\psi-A_2e_{13}\sin\psi+A_5\partial J_5/2\partial e_{23}'\end{gathered} \tag{4}$$
$$\rho t_{33}'=A_3+2A_4e_{33}',\ A_i=\rho\partial F/\partial J_i \tag{5}$$

При $\psi=O$ эти характеристики получаем в осях Ox^i монослоя.

Для определения напряженного состояния в монослое или моноленте по известным деформациям нужно располагать пятью функциями $A_i=A_i(J_1, J_2, \dots, J_5)$, зависящими от пяти инвариантов J_i. Для усилий в оболочке в базовых осях получим

$$T_{ik}' = \int_{-h}^{h} \rho t_{ik}'\, dz$$

где ρ — плотность по деформации, $2h$ — толщина до деформации.

3. **Асимптотические представления.** Далее наряду с обозначениями e_{ik}, t_{ik} для деформаций и напряжений будем использовать индексацию

$$\begin{gathered} e_{11}=e_1,\ e_{22}=e_2,\ e_{33}=e_3 \\ 2e_{12}=e_4,\ 2e_{13}=e_5,\ 2e_{23}=e_6 \\ t_{11}=t_1,\ t_{22}=t_2,\ t_{33}=t_3 \\ t_{12}=t_4,\ t_{13}=t_5,\ t_{23}=t_6 \end{gathered}$$

Так как приращения δe_{ik} упругие, то при $\delta t_j=\Sigma C_{ji}\delta e_i$ $(i=1, 2, \dots 6)$ имеем

$$\delta t_j \delta e_j = \sum_{i,j=1}^{6} C_{ij}\delta e_i \delta e_j \geqslant 0 \tag{6}$$

Пусть $C_{ik}=m_{ik}C_{ii}$ при $i\neq k$ (не суммировать). Из условий симметрии и условия (6) следует, что коэффициенты квадратичной формы (6) удовлетворяют условиям $C_{ii}>0$, $m_{ik}m_{ki}<1$, $m_{ik}C_{ii}=m_{ki}C_{kk}$ (не суммировать). Знак «волна» означает одинаковость порядков сравниваемых величин:

$$\begin{gathered} C_{11}\sim E_1,\ C_{22}\sim E_2,\ C_{33}\sim E_3=E_2 \\ C_{44}\sim G_{12},\ C_{55}\sim G_{13}=G_{12},\ C_{66}=G_{23} \end{gathered} \tag{7}$$

Заменяя элементы матрицы $\|C_{ij}\|$ их значениями по порядкам согласно (7) получаем

$$\| C_{i} \| \sim \begin{Vmatrix} E_1 & m_{12}E_1 & \dots & m_{16}E_1 \\ m_{21}E_2 & E_2 & \dots & m_{26}E_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{61}G_{23} & m_{62}G_{23} & \dots & G_{23} \end{Vmatrix} \tag{8}$$

Пусть

$$E_2/E_1=\eta^2,\ G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=\varkappa^2,\ G_{23}/G_{12}=\lambda^2 \tag{9}$$

С учетом условий (7), (9) получим (относительно главной диагонали имеется симметрия):

$$\| C_{ij} \| \sim E_1 \begin{Vmatrix} 1 & \eta & \eta & \eta\varkappa & \eta\varkappa & \eta\varkappa\lambda \\ & \eta^2 & \eta^2 & \eta^2\varkappa & \eta^2\varkappa & \eta^2\varkappa\lambda \\ & & \eta^2 & \eta^2\varkappa & \eta^2\varkappa & \eta^2\varkappa\lambda \\ & & & \eta^2\varkappa^2 & \eta^2\varkappa^2 & \eta^2\varkappa^2\lambda \\ & & & & \eta^2\varkappa^2 & \eta^2\varkappa^2\lambda \\ & & & & & \eta^2\varkappa^2\lambda^2 \end{Vmatrix} \tag{10}$$

Например, для члена C_{24}/E_1 при переходе от (8) к (10) имеем $m_{24}E_2= =m_{42}E_4, m_{24}m_{42}<1$, $E_4=G_{12}$. Отсюда $m_{24}\leqslant\varkappa$, $m_{24}E_2/E_1\leqslant\varkappa\eta^2$. Аналогично получаются остальные члены матрицы $\|C_{ik}\|$. Так как каждая строка матрицы $\|C_{ik}\|$ представляет собой набор членов вида $\partial t_i/\partial e_k$ $(i, k=1, 2, \dots 6)$, то, например, $\partial t_1/\partial e_1$ имеет порядок E_1, тогда как $\partial t_1/\partial e_2$ асимптотически имеет порядок ηE_1 и так далее. Таким образом

$$\begin{gathered} t_1=\varphi_{000}(e_1)+\eta\varphi_{100}(e_1, e_2, e_3)+\eta\varkappa\varphi_{110}(e_1, e_2, \dots, e_5)+ \\ +\eta\varkappa\lambda\varphi_{111}(e_1, e_2, \dots, e_6)+\Sigma\varphi_{pqr}(e_1, e_2, \dots, e_6)\eta^p\varkappa^q\lambda^r \end{gathered} \tag{11}$$

Под знак суммы включены все члены с неотрицательными целыми степенями, не вошедшие в выделенные члены. Т. е. члены, содержащие, например e_2 и e_3, появляются в разложениях лишь с первой степенью η, а члены, содержащие e_4 и e_5 появляются в разложении лишь с множителем $\eta\varkappa$ и так далее. Далее ограничимся в разложениях по степеням η, $\varkappa$ и λ для φ_{ijk} лишь теми членами, которые явно выписаны в матрице (10). При этом в разложении (11) все φ_{ijk}, вообще говоря, одного порядка. Таким образом

$$t_1=\varphi_{000}(e_1)+\eta\varphi_{100}(e_1, e_2, e_3)+\eta\varkappa\varphi_{110}(e_1, e_2, \ldots, e_5)+\eta\varkappa\lambda\varphi_{111}(e_1, e_2, \ldots, e_6)$$
$$t_2=\eta\psi_{100}(e_1)+\eta^2\psi_{100}(e_1, e_2, e_3)+\eta^2\varkappa\psi_{110}(e_1, e_2, \ldots, e_5)+\eta^2\varkappa\lambda\psi_{111}(e_1, e_2, \ldots, e_6)$$
$$t_3=\eta\chi_{100}(e_1)+\eta^2\chi_{200}(e_1, e_2, e_3)+\eta^2\varkappa\chi_{210}(e_1, e_2, \ldots, e_5)+\eta^2\varkappa\lambda\chi_{211}(e_1, e_2, \ldots, e_6)$$
$$t_4=\eta\varkappa\alpha_{110}(e_1)+\eta^2\varkappa\alpha_{210}(e_1, e_2, e_3)+\eta^2\varkappa^2\alpha_{220}(e_1, e_2, \ldots, e_5)+$$
$$+\eta^2\varkappa^2\lambda\alpha_{221}(e_1, e_2, \ldots, e_6)$$
$$t_5=\eta\varkappa\beta_{110}(e_1)+\eta^2\varkappa\beta_{210}(e_1, e_2, e_3)+\eta^2\varkappa^2\beta_{220}(e_1, e_2, \ldots, e_5)+$$
$$+\eta^2\varkappa^2\lambda\beta_{221}(e_1, e_2, \ldots, e_6)$$
$$t_6=\eta\varkappa\lambda\gamma_{111}(e_1)+\eta^2\varkappa\lambda\gamma_{211}(e_1, e_2, e_3)+\eta^2\varkappa^2\lambda_{221}(e_1, e_2, \ldots, e_5)+$$
$$+\eta^2\varkappa^2\lambda^2\gamma_{222}(e_1, e_2, \ldots, e_6)$$

Набор функций $\varphi_{ijk}, \ldots, \gamma_{ijk}$ должен удовлетворять условиям $\partial t_i/\partial e_j = \partial t_j/\partial e_i$.

4. Классификация форм определяющих соотношений. Для удобства классификации задач на базе асимптотического анализа вводится единый малый параметр $0<\varepsilon<1$, так, что $\eta=\varepsilon^p$, $\varkappa=\varepsilon^q$, $\lambda=\varepsilon^r$, где p, q, r — целые неотрицательные числа. Классификацию проведем по Типам (p, q, r, l), где l — число членов, удерживаемых в рядах для t_1, начиная с существенного.

1. Тип (∞, q, r, l) соответствует нитяной модели когда $\eta\to 0$ и независимо от $\varkappa$, λ имеем существенным лишь член $t_1=\varphi_{000}(e_1)$ или $\rho t_{11}'=A_1(J_1)\cos^2\psi$, $\rho t_{22}'=A_1(J_1)\sin^2\psi$, $2\rho t_{12}'=-A_{12}(J_1)\sin 2\psi$, $t_{33}'=t_{13}'=t_{23}'=0$. В этом случае из всех функций (5) отлична от нуля лишь функция A_1.

2. Тип $(p, q, r, 1)$. Сохранив в ряду для t_1 один член ($l=1$) и соблюдая в последующем принятую точность, из условия $\partial t_1/\partial e_k=\partial t_k/\partial e_1$ ($k=2, 3, \ldots, 6$) заключаем, что t_k при $k\geqslant 2$ от e_1 не зависят и при этом $\psi_{100}=\chi_{100}=\alpha_{110}=\beta_{110}=\gamma_{111}=0$. В рядах для t_2 и t_3 теперь первыми остались члены с η^2.

Тогда из условий $\partial t_2/\partial e_k=\partial t_k/\partial e_2$, $\partial t_3/\partial e_k=\partial t_k/\partial e_3$ следует, что t_k при $k\geqslant 4$ от e_2 и e_3 не зависят. Следовательно, $\alpha_{210}=\beta_{210}=\gamma_{211}=0$. При этом $\psi_{200}=\psi_{200}(e_2, e_3)$, $\chi_{200}=\chi_{200}(e_2, e_3)$.

Сохранив в рядах для t_4 и t_5 лишь члены с $\eta^2\varkappa^2$, которые теперь оказались первыми, аналогично предыдущему получим, что и от e_4 и e_5 не зависит. Таким образом

$$t_1=\varphi_{000}(e_1), \quad t_2=\eta^2\psi_{200}(e_2, e_3)$$
$$t_3=\eta^2\chi_{200}(e_2, e_3), \quad t_4=\eta^2\varkappa^2\alpha_{200}(e_4, e_5).$$
$$t_5=\eta^2\varkappa^2\beta_{220}(e_4, e_5), \quad t_6=\eta^2\varkappa^2\lambda^2\gamma_{222}(e_6)$$

Из этих соотношений следует, что $A_5=\rho\partial F/\partial J_5=0$ и в рассматриваемом случае F от J_5 не зависит. Из (4) следует, что при $\psi=0$:

$$t_1=\partial F/\partial J_1, \quad t_2=\partial F/\partial J_3+2(\partial F/\partial J_4)e_{22}$$
$$t_3=\partial F/\partial J_3+2(\partial F/\partial J_4)e_{33}, \quad t_4=e_{12}\partial F/\partial J_2$$
$$t_5=e_{13}\partial F/\partial J_2, \quad t_6=2e_{23}\partial F/\partial J_4$$

При этом
$$J_1=e_1, \quad J_3=e_2+e_3, \quad 4J_2=e_4^2+e_5^2$$
$$2J_4=e_6^2+2(e_2^2+e_3^2), \quad 4J_5=e_1e_5^2+e_2e_6^2+e_4e_5e_6$$

Так как t_2, t_3 от e_6 не зависят, то $\partial F/\partial J_3$ и $\partial F/\partial J_4$ от e_6 тоже не зависят. Так как, кроме того, t_6 не зависит от e_2 и e_3, то $\partial F/\partial J_4$ не зависит и от J_3. Следовательно, в пределах принятой точности $\partial F/\partial J_4=G_{23}=\text{const}$.

Так как $G_{23}=\partial F/\partial J_4$, $t_2+t_3=2\partial F/\partial J_3+2G_{23}J_3$ и t_2+t_3 — инварианты при преобразованиях $Ox_i\leftrightarrow Ox_i'$ и зависят лишь от e_2 и e_3, то $\partial F/\partial J_3$ как инвариант зависит лишь от инварианта J_3: $\rho\partial F/\partial J_3=A_3(J_3)$. Из того, что

$t_4^2+t_5^2$ — инвариант, и того, что $t_4^2+t_5^2=4J_2(\partial F/\partial J_2)^2$, а t_4 и t_5 — зависят лишь от e_4 и e_5, следует

$$\rho\partial F/\partial J_2=A_2(J_2),\quad \rho\partial F/\partial J_1=A_1(J_1)$$

Таким образом, в принятом приближении

$$\rho\partial F/\partial J_1=A_1(J_1),\quad \rho\partial F/\partial J_2=A_2(J_2)$$
$$\rho\partial F/\partial J_3=A_3(J_3),\quad \rho\partial F/\partial J_4=A_4=G_{23}=\mathrm{const}$$
$$\rho\partial F/\partial J_5=A_5=0$$

В однонаправленно армированных слоев или ленте связь между напряжениями и деформациями в пределах принятой точности (с погрешностью порядка $(E_2/E_1)^{1/2}$ в сравнении с единицей) дается соотношениями

$$\rho t_{11}'=A_1(J_1)\cos^2\psi+A_3(J_3)\sin^2\psi+2G_{23}e_{22}\sin^2\psi+A_2(J_2)e_{12}\sin 2\psi$$
$$\rho t_{22}'=A_1(J_1)\sin^2\psi+A_3(J_3)\cos^2\psi+2G_{23}e_{22}\cos^2\psi-A_2(J_2)e_{12}\sin 2\psi$$
$$\rho t_{12}'=\{[A_3(J_3)-A_1(J_1)]/2+G_{23}e_{22}\}\sin 2\psi+A_2(J_2)e_{12}\cos 2\psi$$
$$\rho t_{13}'=2G_{23}e_{23}\sin\psi+A_2(J_2)e_{13}\cos\psi$$
$$\rho t_{23}'=2G_{23}e_{23}\cos\psi-A_2(J_2)e_{13}\sin\psi$$
$$\rho t_{33}'=A_3(J_3)+2G_{23}e_{33}$$

Величины e_{22}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{33} определяются согласно (3). Здесь отысканию из эксперимента подлежат три функции: $A_1(J_1)$, $A_2(J_2)$, $A_3(J_3)$ и одна постоянная C_{23}.

5. Методика эксперимента. Для определения функций A_i обратимся к эксперименту на цилиндрических образцах, полученных намоткой при симметричной укладке слоев $\psi_k=\pm\psi$. Цилиндр подвергается осевому растяжению силой P и внутреннему давлению интенсивности q. При этих условиях $e_{12}'=e_{13}'=e_{23}'=0$ (Ox_1' — образующая, Ox_2' — направляющая):

$$J_1=e_{11}'\cos^2\psi+e_{22}'\sin^2\psi,\quad J_2=(e_{22}'-e_{11}')^2\sin^2\psi\cos^2\psi$$
$$J_3=e_{11}'\sin^2\psi+e_{22}'\cos^2\psi+e_{33}'$$
$$J_4=(e_{11}'\sin^2\psi+e_{22}'\cos^2\psi)^2+(e_{33}')^2$$

Инварианты J_i от знака угла ψ_k и, следовательно, от номера слоя не зависят. При этом

$$\left.\begin{aligned}{}^1\!/_2T_{11}'/h&=A_1\cos^2\psi+A_3\sin^2\psi+{}^1\!/_2A_2(e_{11}'-e_{22}')\sin^2 2\psi+\\&\quad+2A_4(e_{11}'\sin^2\psi+e_{22}'\cos^2\psi)\sin^2\psi\\{}^1\!/_2T_{22}'/h&=A_1\sin^2\psi+A_3\cos^2\psi-{}^1\!/_2A_2(e_{11}'-e_{22}')\sin^2 2\psi+\\&\quad+2A_4(e_{11}'\sin^2\psi+e_{22}'\cos^2\psi)\cos^2\psi\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Хотя $t_{12}'\neq 0$, но $T_{12}'=0$. Смена знака у ψ_k приводит к смене знака t_{12}'. При $\psi=\pi/4$ из (13) имеем

$$T_{11}'-T_{22}'=2h(e_{11}'-e_{22}')A_{22}(J_2)\qquad(14)$$

и определений функций $A_2(J_4)$ отделяется от определения других функций. При этом

$$T_{11}'+T_{22}'=2h(A_1+A_3)+2h(e_{11}'+e_{22}')A_4\qquad(15)$$

При $\psi=\pi/4$:

$$A_1+A_3=(T_{11}'+T_{22}')/2h-2A_4(e_{11}'\sin^2\psi+e_{22}'\cos^2\psi)$$
$$(A_1-A_3)\cos 2\psi=(T_{11}'-T_{22}')/2h-A_2(e_{11}'-e_{22}')\sin^2 2\psi+$$
$$+2A_4(e_{11}'\sin^2\psi+e_{22}'\cos^2\psi)\cos 2\psi$$

Как было показано, функция A_4 с большой степенью точности постоянная и может быть определена в режиме малых упругих деформаций. В то же время в большинстве важных для приложений случаев с большой степенью точности A_2 зависит только от инварианта J_2. Таким образом, A_4 находится по линейной теории, A_2 находится из соотношения (14) при $\psi=\pi/4$, тогда как A_1 и A_3 находятся из эксперимента при $\psi\neq\pi/4$, согласно соотношениям (16). Так как в тонкой оболочке $t_{33}=0$, а величины $A_4=$ $=\mathrm{const}$ и $A_3(J_3)$ численно определяются по соотношениям (14)—(16), то из (12) имеем $e_{33}'={}^1/_2A_3(J_3)/A_4$ и, следовательно, J_3 как аргумент функции A_3 находится.

Так устанавливается функциональная зависимость $A_3=A_3(J_3)$. Следует подчеркнуть, что условие $t_{33}'\simeq 0$ не будет выполняться в общем случае нетонкой оболочки, так как в ней возможна реализация иного сочетания J_3 и e_{33}. Таким образом, для решения проблемы построения определяющих соотношений для нетонких оболочек достаточно выполнить эксперимент на тонких образцах-оболочках. При этом погрешность, связанная с условием $t_{33}'\simeq 0$, имеет порядок $2h/R$ по сравнению с единицей.

Если Δ_i — относительные удлинения вдоль осей Ox_i', то $(1+\Delta_i)^2=1+2e_i$ $(i=1, 2, 3)$. Величины Δ_1, Δ_2 замеряются в эксперименте, а T_{11}', T_{22}' через P и q находятся в виде

$$T_{11}'=\frac{P}{2\pi R(1+\Delta_1)}+q\frac{R(1+\Delta_2)^2}{2(1+\Delta_1)}$$

$$T_{22}'=qR(1+\Delta_1)$$

Если в эксперименте $q=0$, то условие $t_{33}=0$ выполняется строго.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Муштари Х. М.* Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия // Изв. физ.-мат. об. при Казан. ун-те. Сер. 3. 1938. Т. 11. С. 71–150.
2. *Муштари Х. М.* Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия // ПММ. 1939. Т. 2. Вып. 4. С. 439–456.
3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л., М.: 1948. 211 с.
4. *Муштари Х. М.* Качественное исследование напряженного состояния упругой оболочки при малых деформациях и произвольных смещениях // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 2. С. 121–134.
5. *Галимов К. З.* К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 723–742.
6. *Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации. М.; Наука, 1986. 231 с.
7. *Pietraszkiewicz W.* Finite rotations and Lagrangean discription in the nonlinear theory of shells. Warszawa: Pol. Sci. publ., 1979. P. 103.
8. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 271 с.
9. *Лагздыньш А. Ж., Тамуж В. П.* Тензоры упругости высших порядков // Механика полимеров, 1965. № 6. С. 40–48.
10. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление жестких и полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
11. *Ломакин В. А.* О теории пластичности анизотропных сред // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, 1964. № 4. С. 49–53.
12. *Победря Б. Е.* Деформационная теория пластичности анизотропных сред // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 29–37.
13. *Образцов И. Ф., Васильев В. В.* Нелинейные феноменологические модели деформирования волокнистых композитных материалов // Механика композитных материалов. 1982. № 3. С. 390–393.
14. *Лохин В. В.* Общие формы связи между тензорными полями в анизотропной сплошной среде // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 6. С. 1282–1255.
15. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
16. *Черных К. Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
17. *Терегулов И. Г.* Определяющие соотношения для физически нелинейных анизотропных и композитных оболочек при конечных деформациях. Ч. 1. // Изв. вузов. Математика. 1985. № 5. С. 33–41; Ч. II. 1985. № 6.
18. *Терегулов И. Г.* Теория определяющих соотношений для анизотропных и волокнисто композитных оболочек при конечных деформациях. Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 167–173.
19. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. Изд-во МГУ, 1986. 223 с.
20. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
21. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: 1965. 455 с.

Казань

Поступила в редакцию
10.IV.1987