

УДК 539.374

© 1989

К. Л. КОМАРОВ

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ УСЛОВИЙ
НА ГРАНИЦЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН
В ДИНАМИКЕ НЕУПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

На границах раздела областей с различными пластическими режимами, неизбежно возникающими при использовании кусочнолинейных аппроксимаций условий текучести могут возникать разрывы искомых величин и их производных. Исследуются условия на подвижных границах пластических зон, возникающих в элементах конструкций, подвергающихся действию интенсивных нагрузок, зависящих от времени. Решение полученных в работе уравнений позволяет выявить характер развития пластических зон в прямоугольных и круглых пластинках, а также движение пластических шарниров в балках под действием движущихся интенсивных нагрузок.

1. Балка под действием движущейся нагрузки. Рассмотрим свободно опертую двухопорную балку длиной l . Если на балку действует движущаяся нагрузка типа поезда или сосредоточенная нагрузка, превышающие статически допустимые, то в какой-то момент балка теряет несущую способность и превращается в механизм с одним пластическим шарниром. Причем, этот шарнир перемещается в процессе движения нагрузки. Условия непрерывности поперечной составляющей скорости деформирования и скачка ускорения при переходе через шарнир имеют вид

$$\xi \theta_1'' = (1 - \xi) \theta_2'', \quad \xi (\theta_1'' + \theta_2'') = v(\xi, t) \quad (1.1)$$

где l_1 и l_2 — длины жестких звеньев ($l_1 + l_2 = l$), θ_1 и θ_2 — углы поворота жестких звеньев балки, $\xi = l_1/l$, $v(\xi, t) = [(1 - \xi) \theta_2'' - \xi \theta_1'']$, точки обозначают дифференцирование по времени. Продифференцировав второе уравнение (1.1) по t , получим нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее движение пластического шарнира

$$v(\xi, t) \xi'' + u(\xi, t) \xi'^2 - v'(\xi, t) \xi' = 0 \\ u(\xi, t) = \theta_1'' + \theta_2'' \quad (1.2)$$

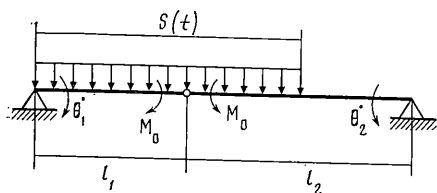
В уравнении (1.2) функции $v(\xi, t)$ и $u(\xi, t)$ определяются через θ_1'' и θ_2'' , а те, в свою очередь — из уравнений движения жестких звеньев балки. Например, для случая, изображенного на фиг. 1 из уравнений

$$\frac{1}{3} m l_1^3 \theta_1'' = \frac{1}{2} (q + P) l_1^2 - M_0 \\ \frac{1}{3} m l_2^3 - \theta_2'' = \frac{1}{2} (q + P) l_2^2 - \frac{1}{2} q (l - s(t))^2 - M_0 \quad (1.3)$$

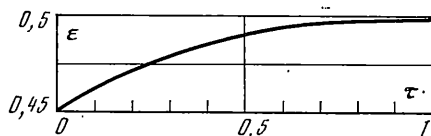
где q — интенсивность движущейся равномерно распределенной нагрузки, P — распределенный вес балки (m — распределенная масса балки), $s(t)$ — заданная функция, определяющая характер движения фронта нагрузки, M_0 — предельный изгибающий момент балки.

Начальное положение шарнира ξ_0 и положение нагрузки в момент образования шарнира определяется из (1.3), полагая $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Из уравнения (1.2) при $\xi = 0$ следует $v'(0) = 0$, откуда

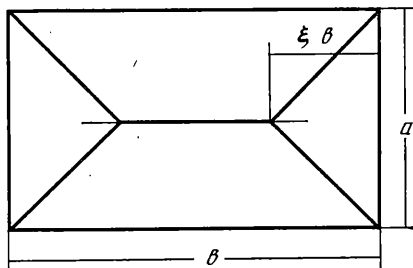
$$\xi_0' = \frac{1}{2} v'(0) \xi_0^2 (1 - \xi_0) [\varphi(0) \xi_0^2 + \frac{1}{4} (q_0/P + 1) (1 - \xi_0)]^{-1} \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

где q_0 — предельная статически допустимая интенсивность распределенной нагрузки

$$\varphi(t) = [1/2 q (l - s(t)) + 2M_0] / Pl^2$$

Можно построить численное решение уравнения (1.2). Для случаев нагрузки, показанной на фиг. 1, зависимость $\xi(t)$ при $q=5P$, $q_0=4P$ и $V/L=1 \text{ с}^{-1}$ представлена на фиг. 2. Здесь $\tau=t/t_1$, где t_1 — время достижения фронтом движущейся нагрузки правой опоры ($\xi=0,453$, $\xi_0=0,329 \text{ с}^{-1}$, $t_1=0,323 \text{ с}$).

Таким образом, условия на пластическом шарнире (1.1) позволили получить аналитическое выражение для начальной скорости шарнира и дифференциальное уравнение, описывающее движение шарнира, которое допускает достаточно простую численную процедуру решения. Из решения, представленного на фиг. 2, видно, что шарнир, возникнув в положении $\xi=\xi_0$, в процессе движения перемещается в середину $\xi=1/2$.

2. Прямоугольная пластина под действием распределенной нагрузки. Рассмотрим процесс деформирования свободно опертых прямоугольных пластин ($a \times b$) под действием равномерно распределенного давления. Такая задача впервые была рассмотрена в [1]. Как показано в [2], схема, использованная в [3] (фиг. 3), имеет место в предельном состоянии равновесия пластины, а также в процессе деформирования, если внешнее давление при $\gamma > 2$ ($\gamma=b/a$) отвечает условию $(q+P) \leq 3(q_0+P)$, где q — внешнее давление, q_0 — предельное статически допустимое давление для данной пластины, P — вес единицы площади пластины. Если внешнее давление q начинает уменьшаться или вообще снимается, то линейные шарниры в пластине начинают менять свою конфигурацию, в частности меняется параметр ξ .

Для схемы, представленной на фиг. 3, условия непрерывности скорости прогибов и скачка ускорения при переходе через линейный пластический шарнир будут иметь вид

$$\xi b \varphi_1'' = 1/2 a \varphi_2'', \quad 2\gamma \xi \dot{\varphi}_1 = (\varphi_2'' - 2\gamma \xi \varphi_1'') \quad (2.1)$$

где a и b — размеры пластины ($\gamma=b/a$, $\gamma > 1$), φ_1 и φ_2 — углы поворотов жестких сегментов пластины, ξ — безразмерный параметр, определяющий размер жестких зон (см. фиг. 3).

Продифференцировав второе из уравнений (2.1) по времени, получим нелинейное дифференциальное уравнение, определяющее изменение размеров жестких зон в процессе деформирования пластины.

$$v(\xi, t) \xi'' + u(\xi, t) \xi'^2 - v'(\xi, t) \xi' = 0 \quad (2.2)$$

$$v(\xi, t) = [\varphi_2'' - 2\gamma \xi \varphi_1'], \quad u(\xi, t) = \varphi_1''$$

Уравнение (2.2) имеет вид, идентичный уравнению (1.2) для балок. Функции $v(\xi, t)$ и $u(\xi, t)$ определяются из уравнений движения жестких сегментов пластины

$$\begin{aligned} b\varphi_1 \ddot{\xi}^3 &= 2g(\xi^2 - 6M_0/pb^2) \\ b\varphi_2 \ddot{(2-3\xi)} &= 2g\gamma(3-4\xi) - 48\gamma^3 g M_0 / P b^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где M_0 — предельный изгибающий момент, приходящийся на единицу длины, g — ускорение свободного падения.

Исследование уравнений (2.2) и (2.3) показывает, что параметр ξ , определяющий изменение размеров жестких зон пластины, изменяется в пределах $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_P$, где $\xi_P = [(3\gamma^2 + 1)^{1/2} - 1] / 2\gamma^2$ — размер зоны, соответствующий предельному состоянию равновесия, $\xi_0 = \xi_P \{ [\xi_P^2 + 2(3-4\xi_P)]^{1/2} - \xi_P \} / (3-4\xi_P)$ начальный размер жесткого сегмента.

Численный анализ уравнения (2.2) приводит к решению такого же типа, который представлен на фиг. 2. Т. е. при снятии внешней нагрузки параметр ξ уменьшается от ξ_P до ξ_0 согласно функции, являющейся решением уравнения (2.2).

3. Круглая пластина под действием осесимметричной распределенной нагрузки. Исследуем теперь большие прогибы круглых пластин на базе представлений [3]. Рассмотрим круглую пластинку радиуса R , находящуюся под действием осесимметричной нагрузки, превышающей статистически допустимую, например, равномерно распределенного давления. Материал пластины удовлетворяет условиям текучести Треска — Сен-Венана. В этом случае границы раздела зон с различными пластическими режимами могут совпадать с шарнирными окружностями.

Если на пластину действует внешнее давление $q > 2q_0$, где q_0 — предельное статистически допустимое давление, то в пластине образуется центральная круговая пластическая зона, которая при снятии нагрузки стягивается в точку. При этом ее радиус изменяется от некоторого значения ρ_0 до нуля.

При переходе через границу раздела центральной пластической и кольцевой жесткой зон должны быть непрерывны прогиб w и скорость прогиба w_0 , т. е.

$$[w]|_{r=\rho} = 0, \quad [w^*]|_{r=\rho} = 0 \quad (3.1)$$

где скобки обозначают разрыв соответствующей величины, $\rho = \rho(t)$ — радиус окружности разрыва.

Известно [5], что из непрерывности прогиба следуют условия для разрывов:

$$[w]|_{r=\rho} = 0, \quad [w^*]|_{r=\rho} = 0 \quad (3.2)$$

Нижние индексы у величин обозначают дифференцирование по соответствующему параметру. Преобразуем условие (3.2), для чего обозначим $\rho^I(t) = u(t)$, $[w_r] = v(r, t)$ и продифференцируем первое уравнение по t , а второе по r :

$$v_{II} + uv_r + uv_{rI} = 0, \quad v_{II} + u_r v_I + uv_{rI} = 0 \quad (3.3)$$

Учитывая, что w_r , w_{rr} , w_{rI} и w_{II} — кусочно-непрерывны по r и непрерывны по t , причем разрывы непрерывности по r могут иметь место только у шарнирных окружностей, найдем (верхний индекс I соответствует центральной пластической зоне, II — кольцевой жесткой зоне):

$$\frac{\partial}{\partial t} [w_{rr}] = \frac{\partial}{\partial t} w_{rr}^I - \frac{\partial}{\partial t} w_{rr}^{II} = \frac{\partial}{\partial r} w_{rI}^I - \frac{\partial}{\partial r} w_{rI}^{II} = \frac{\partial}{\partial r} [w_{rI}]$$

т. е. $v_{rI} = v_{Ir}$. Кроме этого в уравнениях $u_r = 0$, так как $u = u(t)$. Поэтому, вычитая из первого уравнения (3.3) второе, находим

$$u_r v_r = 0 \quad (3.4)$$

Условие $v_r = 0$ означает $[w_{rr}] = 0$, что обращает условия (3.2) в тождества, имеющие место при поступательном движении безопорной пла-

стины. Следовательно, из (3.4) однозначно следует $u_t=0$, т. е.:

$$\rho(t)=\text{const}=v_0, \quad \rho(t)=\rho_0-v_0t \quad (3.5)$$

Таким образом, радиус шарнирной окружности изменяется с постоянной скоростью. При условии (3.5) уравнения движения, распределение сил и моментов, а также определение прогибов пластины, в частности, в задачах, рассмотренных в [3, 4], упрощаются.

Из проведенного анализа видно, что условия на границах пластических зон позволяют существенно упростить и сделать физически более наглядным процесс деформирования балок и пластин за пределом текучести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строительная промышленность. 1943. № 1-2. С. 18-21.
2. Комаров К. Л., Немировский Ю. В. О динамическом поведении жесткопластических прямоугольных пластин // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 7. С. 69-76.
3. Гопкинс Г., Прагер В. Несущая способность круглых пластинок // Механика: Сб. переводов. 1955. № 3.
4. Ершов М. И., Кислова Л. В. Большие прогибы двухслойной круглой пластинки за пределом упругости // В кн.: Исследования по строительной механике. М.: ЦНИИСК. 1985. С. 23-32.

Новосибирск

Поступила в редакцию
18.VII.1988