

УДК 539.374

© 1989

С. Е. АЛЕКСАНДРОВ, Б. А. ДРУЯНОВ

О ТИПЕ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ ПРИ УСЛОВИИ ТЕКУЧЕСТИ ДРАККЕРА

Исследуются системы уравнений, описывающие плоское и осесимметричное течение сжимаемой жесткопластической среды, подчиняющейся кусочно-линейному условию текучести. В пространстве главных напряжений ему соответствует правильная шестигранная пирамида. Рассмотрены различные режимы течения. Получены условия, при которых меняется тип системы уравнений как в случае плоской деформации, так и при осесимметричном течении.

1. Введение. В последнее время вопросы теории пластического течения при кусочно-линейных (в главных напряжениях) условиях текучести привлекают внимание исследователей [4–6]. Нелинейные кусочно-гладкие условия текучести рассматривались в [7].

В предлагаемой работе исследуются системы уравнений, описывающие плоское и осесимметричное течения сжимаемой идеальной жесткопластической среды, подчиняющейся кусочно-линейному условию текучести. В пространстве главных напряжений ему соответствует правильная шестигранная пирамида.

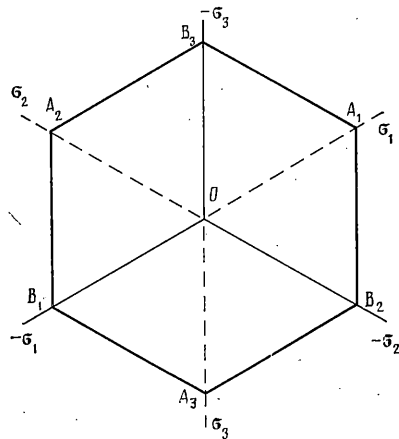
Показано, что плоское течение возможно только при напряженных состояниях, соответствующих определенным ребрам пирамиды. Тип системы уравнений плоского течения зависит от угла наклона ребра к гидростатической оси. При малых углах наклона уравнения относятся к гиперболическому типу, при больших — к эллиптическому. При углах наклона ребра к гидростатической оси, близких к прямому, плоское течение вообще невозможно.

Осесимметричное течение возможно как на гранях, так и на ребрах пирамиды. Течение на гранях рассмотрено в [4]. Когда напряженное состояние соответствует ребру пирамиды, тип системы уравнений осесимметричного течения, аналогично уравнениям плоского течения, зависит от наклона ребра к гидростатической оси. В [4] исследовано течение на ребрах кусочно-линейных условий текучести, однако случаи эллиптичности и параболичности не отмечены.

2. Условие текучести. Условие текучести запишем в виде

$$(\frac{1}{2})|\sigma_i - \sigma_j| / \tau_s - \sigma / p_s = 1 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

где σ_i, σ_j — главные напряжения, σ — среднее напряжение, p_s — предел текучести при всестороннем равномерном сжатии, τ_s — предел текучести при чистом сдвиге.



В пространстве главных напряжений условию (2.1) соответствует правильная шестигранная бесконечная пирамида. Ее вершина лежит на гидростатической оси (т. O) и имеет координаты $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p_s)$, а ребра пересекают оси координат пространства главных напряжений. Сечение пирамиды девиаторной плоскостью показано на фигуре, в безразмерных координатах σ_i/τ_s оно совпадает с сечением призмы Треска. Пределы текучести при одноосном растяжении σ_s и сжатии σ_c выражаются через τ_s и p_s по формулам $\sigma_s = 6\tau_s p_s / (3p_s - 2\tau_s)$, $\sigma_c = 6\tau_s p_s / (3p_s + 2\tau_s)$.

Ребра OB_i пирамиды пересекают оси координат в точках σ_c , а ребра OA_i — в точках σ_s . Все ребра лежат в биссектральных плоскостях, так что на них $\sigma_k = \sigma_j$ ($k, j = 1, 2, 3; k \neq j$). На гранях пирамиды $OA_i B_j$ имеют место неравенства $\sigma_i \geq \sigma_k \geq \sigma_j$.

Описанное условие представляет собой простейшее обобщение условия текучести Треска на случай сжимаемой пластической среды [8]. Оно получается из условия Треска если принять, что пластическая постоянная линейно зависит от σ .

3. Плоская деформация. Предположим, что скорость деформации $\xi_3 = 0$. Для граней пирамиды (2.1) из ассоциированного закона течения имеем: $\xi_3 = -(1/3)\lambda/p_s$, если $i, j = 1, 2$ и $\xi_3 = (1/6)\lambda(\pm 3\tau_s - 2p_s)$ на остальных гранях. Плоская деформация возможна только на тех гранях, где $\xi_3 = (1/6)\lambda(3\tau_s - 2p_s)$ при $2\tau_s = 3p_s$. В дальнейшем будем считать, что $2\tau_s \neq 3p_s$. При этом условии плоское течение возможно только на ребрах пирамиды.

Пусть, например, напряженное состояние соответствует ребру OB_2 . В этом случае $\xi_1 > \xi_2$.

Уравнения граней, пересекающихся на ребре OB_2 , имеют вид

$$(1/2)(\sigma_1 - \sigma_2)/\tau_s - \sigma/p_s = 1, \quad (1/2)(\sigma_3 - \sigma_2)/\tau_s - \sigma/p_s = 1 \quad (3.1)$$

Ассоциированный закон течения определяет скорости деформации:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda_1 [1/(2\tau_s) - 1/(3p_s)] - (1/3)\lambda_2/p_s, \quad \xi_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2) [1/(3p_s) + 1/(2\tau_s)] \\ \xi_3 &= -(1/3)\lambda_1/p_s + \lambda_2 [1/(2\tau_s) - 1/(3p_s)], \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из условия $\xi_3 = 0$ следует $\lambda_1 = \lambda_2 [(3/2)p_s/\tau_s - 1]$. Отсюда видно, что плоская деформация возможна только при $3p_s > 2\tau_s$ так как в этом случае λ_1 и λ_2 имеют один и тот же знак.

Подстановка выражения для λ_1 в (3.2) дает

$$\xi_1 = (1/4)\lambda(3p_s - 4\tau_s)/\tau_s^2, \quad \xi_2 = -(1/4)\lambda(3p_s + 2\tau_s)/\tau_s^2, \quad \lambda = \lambda_2 \quad (3.3)$$

Из уравнений (3.1) определяем зависимость между напряжениями σ_1 и σ_2 , которую можно рассматривать как условие текучести при плоской деформации

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= a\sigma_1 - b \\ a &= (3p_s - 4\tau_s)/(3p_s + 2\tau_s), \quad b = \sigma_c \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем произвольную декартову систему координат x, y . Компоненты тензора напряжений в этой системе координат выразим через главное напряжение и подставим в уравнения равновесия с учетом зависимости (3.4). В уравнениях (3.3) также осуществим переход к системе координат x, y и затем исключим λ . В результате этих преобразований получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (\cos^2 \theta + a \sin^2 \theta) \partial \sigma_1 / \partial x + [\sigma_1(a-1) - b] \sin(2\theta) \partial \theta / \partial x + \\ + (1/2)(1-a) \sin(2\theta) \partial \sigma_1 / \partial y + [\sigma_1(1-a) + b] \cos(2\theta) \partial \theta / \partial y = 0 \\ (1/2)(1-a) \sin(2\theta) \partial \sigma_1 / \partial x + [\sigma_1(1-a) + b] \cos(2\theta) \partial \theta / \partial x + \\ + (\sin^2 \theta + a \cos^2 \theta) \partial \sigma_1 / \partial y + [\sigma_1(1-a) + b] \sin(2\theta) \partial \theta / \partial y = 0 \\ (\cos^2 \theta - a \sin^2 \theta) \partial u / \partial x + (a \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \partial v / \partial y = 0 \\ (a+1) \sin(2\theta) \partial v / \partial y + (\cos^2 \theta - a \sin^2 \theta) \partial u / \partial y + (\cos^2 \theta - a \sin^2 \theta) \partial v / \partial x = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

где u — проекция скорости на ось x ; v — проекция скорости на ось y , θ — угол между осью абсцисс и первым главным направлением тензора на-

пряжений, отсчитываемый от оси абсцисс против хода часовой стрелки.
 Определим углы наклона характеристик системы (3.5) к оси абсцисс

$$\Psi_{1,2} = \theta \pm \varphi_1 \quad (3.6)$$

где $\pm \varphi_1 = \pm \arctg(a^{1/2})$ — углы между первым главным направлением тензора напряжений и линиями, вдоль которых нормальные скорости деформации $\xi_n = 0$. Эти линии, если они существуют, симметричны относительно главных направлений.

Система уравнений (3.5) имеет действительные характеристики при $3p_s \geq 4\tau_s$. Если $3p_s > 4\tau_s$, то выражение (3.6) определяет два семейства двукратных характеристик в плоскости x, y . Дальнейшее исследование показывает, что в этом случае система (3.6) относится к гиперболическому типу в смысле Петровского. Соотношения вдоль характеристик имеют вид

$$\begin{aligned} \pm \partial \sigma_1 / \partial l_{1,2} [\sigma_1 (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_1) + b]^{-1} \operatorname{tg} \varphi_1 + \partial \theta / \partial l_{1,2} = 0 \\ \partial u / \partial l_{1,2} + \operatorname{tg} (\theta \pm \varphi_1) \partial v / \partial l_{1,2} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для произвольного гладкого условия текучести аналогичный результат был получен в [9].

Интегрирование первых двух уравнений (3.7) вдоль характеристик дает

$$\ln [(\sigma_1 + p_s) / \sigma_{1,2}'] \pm [(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_1) / \operatorname{tg} \varphi_1] \theta = 0 \quad (3.8)$$

где σ_1' — постоянная величина на каждой линии l_i . Индексу 1 во всех выражениях соответствует верхний знак, а индексу 2 — нижний.

Если $3p_s < 4\tau_s$, то система (3.5) относится к эллиптическому типу, при $4\tau_s = 3p_s$ — к параболическому.

Аналогичный анализ других ребер пирамиды показывает, что плоская деформация ($\xi_3 = 0$) возможна еще только на ребре OB_1 , на котором имеет место условие $\xi_1 < \xi_2$. В общем случае плоская деформация $\xi_i = 0$ возможна только на ребрах OB_j ($i \neq j$).

4. Осесимметричная деформация. Осесимметричная деформация возможна как на ребрах, так и на гранях пирамиды. Система уравнений осесимметричного течения на гранях рассмотрена в [1]. На ребрах пирамиды, как и для плоского течения, тип системы уравнений зависит от параметров материала p_s и τ_s .

Чтобы получить соотношение между τ_s и p_s , определяющее тип системы уравнений, введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . Полагаем, что $\sigma_z = \sigma_\varphi$. Рассмотрим ребро, образованное гранями (3.1). Скорости деформации ($\xi_3 = \xi_\varphi$) будут определяться уравнениями (3.2). Из выражения для скорости деформации $\xi_\varphi = u_r / r$ следует соотношение между λ_1 и λ_2 (u_r — проекция скорости на ось r):

$$\lambda_1 = \lambda_2 [(3/2) p_s / \tau_s - 1] - 3p_s u_r / r \quad (4.1)$$

Используя (4.1) главные скорости деформации можно представить в виде

$$\xi_1 = \lambda (3p_s - 4\tau_s) / (4\tau_s^2) - (3p_s - 2\tau_s) u_r / (2\tau_s r) \quad (4.2)$$

$$\xi_2 = [u_r / r - \lambda / (2\tau_s)] (3p_s + 2\tau_s) / (2\tau_s), \quad \lambda = \lambda_2$$

Компоненты тензора скоростей деформации в системе координат r, z имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_r = \lambda [(3p_s / 2\tau_s) \cos(2\theta_1) - \cos^2 \theta_1 - 1] / (2\tau_s) + (u_r / r) [1 - (3p_s / 2\tau_s) \cos(2\theta_1)] \\ \xi_z = -\lambda [(3p_s / 2\tau_s) \cos(2\theta_1) + \sin^2 \theta_1 + 1] / (2\tau_s) + \\ + (u_r / r) [1 + (3p_s / 2\tau_s) \cos(2\theta_1)] \\ \xi_{rz} = \lambda [(3p_s - \tau_s) / \tau_s] \sin(2\theta_1) / (4\tau_s) - 3p_s u_r \sin(2\theta_1) / (2r\tau_s) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Напряжения в системе координат r, z выразим через главные напряжения и подставим в уравнения равновесия, учитывая (3.4). В (4.3) исключаем параметр λ . В результате этих преобразований получаем систе-

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2}\right) (1-a) \sin(2\theta_1) \partial\sigma_1/\partial r + [\sigma_1(1-a)+b] \cos(2\theta_1) \partial\theta_1/\partial r + \\
 & \quad + (\sin^2 \theta_1 + a \cos^2 \theta_1) \partial\sigma_1/\partial z + \\
 & + [\sigma_1(1-a)+b] \sin(2\theta_1) \partial\theta_1/\partial z + [\sigma_1(1-a)+b] \sin(2\theta_1)/(2r) = 0 \\
 & \quad (\cos^2 \theta_1 + a \sin^2 \theta_1) \partial\sigma_1/\partial r - [\sigma_1(1-a)+b] \sin(2\theta_1) \partial\theta_1/\partial r + \\
 & \quad + \left(\frac{1}{2}\right) (1-a) \sin(2\theta_1) \partial\sigma_1/\partial z + \\
 & + [\sigma_1(1-a)+b] \cos(2\theta_1) \partial\theta_1/\partial z + [\sigma_1(1-a)+b] \cos(2\theta_1)/r = 0 \\
 & [3\tau_s + (3p_s - \tau_s) \cos(2\theta_1)] \partial u_r/\partial r - [3\tau_s - (3p_s - \tau_s) \cos(2\theta_1)] \partial v_z/\partial z + \\
 & \quad + (3p_s + 2\tau_s) u_r \cos(2\theta_1)/r = 0 \\
 & \quad [(3p_s - \tau_s)/(3\tau_s)] \sin(2\theta_1) \partial u_r/\partial r + \partial u_r/\partial z + \partial v_z/\partial r + \\
 & + [(3p_s - \tau_s)/(3\tau_s)] \sin(2\theta_1) \partial v_z/\partial z + (3p_s + 2\tau_s) u_r \sin(2\theta_1)/(3\tau_s r) = 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

где v_z — проекция скорости на ось z , θ_1 — угол между осью r и первым главным направлением тензора напряжений, отсчитываемый от оси r против хода часовой стрелки.

Из преобразований, аналогичных п. 3 получаем, что углы наклона характеристик к оси r определяются выражением (3.6).

Таким образом, как и в случае плоской деформации, при осесимметричном течении на ребре пирамиды система уравнений (4.4) относится к гиперболическому типу, если $(3/4)p_s > \tau_s$, а если $(3/4)p_s < \tau_s$ — к эллиптическому.

5. Пример. Рассмотрим начальное течение бесконечной трубы внутреннего радиуса R_0 и внешнего R_1 под действием равномерного внешнего давления интенсивности P при $(3/4)p_s > \tau_s$.

Так как $a > 0$, то система (3.7) относится к гиперболическому типу. Введем полярную систему координат (ρ, α) . Главные направления тензора напряжений в этой задаче известны. По аналогии с компактным материалом предположим, что $\xi_\rho > \xi_\alpha$ тогда $\sigma_1 = \sigma_\rho$ и $\alpha = \theta$. Уравнения характеристик определим из (3.6). В полярной системе координат они имеют вид $\theta = \pm \operatorname{tg} \varphi_1 \ln(\rho/\rho_0)$ (ρ_0 — постоянная интегрирования).

Далее из (3.8) определим давление $p = -\sigma_1 = p_s [1 - (R_0/\rho)^m]$. На внешнем контуре давление равно $P = p_s [1 - (R_0/R_1)^m]$, $m = 1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_1$.

Аналогичным образом определяем скорости перемещений. Пусть v_ρ — радиальная компонента скорости. Тогда $u = v_\rho \cos \alpha$, $v = v_\rho \sin \alpha$ и из последних двух уравнений (3.7) находим $v_\rho = -(R_1/\rho)^{(1-m)}$. При решении предполагали, что на внешнем контуре $v_\rho = -1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Штейн М. Ш. Осесимметричное пластическое течение идеально вязкой среды с трением // ПММ, 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 146–156.
2. Аллимжанов М. Т., Жанагаев К. Т., Княбаев С. Н. Постулат Друккера и связь между напряжениями и деформациями в плоской задаче при условии Кулона — Мора // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. 1988. № 1. С. 86–87.
3. Александров С. Е., Друянов В. А. Об условиях текучести уплотняемых материалов // Кинетика и термодинамика пластической деформации. Ч. 1. Барнаул, 1988. С. 52.
4. R. de Borst. Integration of plasticity equations for singular yield functions // Comp. & struct. 1987. V. 26. No. 5. P. 823–829.
5. Loret B., Prevost H. Accurate numerical solutions for Drucker Prager elastic-plastic models // Comp. meth. in appl. mech. and engin. 1986. No. 54. P. 259–277.
6. De Simohe P. Analysis of Coulomb isotropic hardening media by means of characteristics // Comput. Plast. Models Software and Appl. Proc. Int. Conf. Barcelona, 6–10 Apl., 1987. Pt 1. Swansea, 1987. P. 81–91.
7. Chen Qiang. Slip-line field theory of plane plastic strain dealing with Mehros criterion expressed by quadratic limiting curves // Appl. Math. and Mech. 1988. V. 9. No. 2. P. 189–198.
8. Drucker D. C. Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems // J. Mech. Phys. Solids. 1953. V. 1. No. 4. P. 217–226.
9. Фейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды: Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.