

УДК 533.6.013.42

© 1989

И. О. ОСИПОВ

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

Получены решения задачи распространения плоских упругих волн в анизотропном полупространстве, контактирующем с жидким сжимаемым полупространством. Определены коэффициенты отражения и преломления. Исследованы кинематические характеристики отраженных и преломленных волн при различных соотношениях упругих постоянных контактирующих сред и с учетом характера изменения нормальных скоростей упругих волн в анизотропных средах от направления движения. Изучение различных волновых процессов, связанных с возбуждением вещественных и комплексных вторичных волн, сведено к трем основным случаям.

**1. Введение.** Изучение закономерностей распространения плоских волн в анизотропных средах имеет важное значение для сейсмологии и сейсморазведки, так как на их примере можно исследовать фундаментальные особенности волновых процессов в анизотропных средах. Почти все сейсмические поля приближенно могут рассматриваться как локально плоские волны, а многие волновые процессы могут быть представлены в виде суперпозиции плоских волн. Эти обстоятельства вызывают особый интерес к изучению волновых процессов в анизотропных средах, связанных с распространением плоских волн [1—12].

В публикуемой работе, используя метод В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [4], изучается плоская задача отражения и преломления квазипродольных и квазипоперечных волн, падающих из анизотропной среды на границу раздела с жидкостью. Аналогичная задача для плоских продольных волн, падающих из жидкости на границу раздела с анизотропной средой была рассмотрена в [4]; решения задачи по аналогии с изотропной средой выражались через нормальные скорости волн, характер изменения которых от направления движения в анизотропных средах качественно зависит от соотношений упругих постоянных [5], что значительно усложняло процесс исследования полученных решений.

Решения поставленной задачи выражаются через обратные кажущиеся скорости первичных и вторичных волн в направлениях границы раздела сред и нормали к ней. Это позволило сравнительно просто при различных соотношениях упругих постоянных контактирующих сред изучить все многообразие достаточно сложных волновых процессов, связанных с возбуждением вещественных (однородных) и комплексных (неоднородных) вторичных волн. При исследовании волновых процессов в анизотропных средах такой подход, основанный на использовании обратных кажущихся скоростей, применялся в [1, 13].

Проблема распространения плоских волн для случая контакта жидкости с твердой изотропной средой изучена, например в [15—19].

**2. Постановка задачи.** Пусть два различных полупространства соприкасаются по горизонтальной плоскости: верхнее — сжимаемая жидкость с модулем сжатия  $\mu_0$  и плотностью  $\rho_0$ ; нижнее — твердая анизотропная среда со следующими отношениями упругих постоянных к плотности:  $a=C_{11}/\rho$ ,  $b=C_{22}/\rho$ ,  $d=C_{66}/\rho$ ,  $c=(C_{66}+C_{12})/\rho$ , удовлетворяющими для реальных сред условиям

$$a > d, \quad b > d, \quad d > 0, \quad ab - (c - d)^2 > 0 \quad (2.1)$$

Выбираем прямоугольную систему координат: плоскость  $xz$  совмещаем с границей раздела сред, ось  $y$  направляем вверх, координатные оси совпадают с осями упругой симметрии анизотропной среды, колебания не зависят от  $z$ . Как и в [4] рассматриваем наиболее широко распространенные среды, удовлетворяющие условию

$$(a-d)b-c^2 > 0 \quad (2.2)$$

Плоские волны в анизотропной среде выражаются функциями [1]:

$$u_k = u(t + \theta x + \lambda_k y), \quad v_k = v(t + \theta x + \lambda_k y) \quad (2.3)$$

$$\lambda_k = \{H + (-1)^k [H^2 - (a/b)(a^{-1} - \theta^2)(d^{-1} - \theta^2)]^{1/2}\}^{1/2} \quad (2.4)$$

$$H = [(b+d) - (ab + d^2 - c^2)\theta^2] / (2bd)$$

Функции (2.3) при  $k=1$  выражают квазипродольные волны, при  $k=2$  квазипоперечные волны, подчиненные условиям [1]:

$$-u(\Omega_k) / (c\theta\lambda_k) = v(\Omega_k) / p_k = w(\Omega_k) \quad (2.5)$$

$$p_k = a\theta^2 + d\lambda_k^2 - 1$$

Величины  $\theta$  и  $\lambda_k$  представляют собой обратные кажущиеся скорости волн в направлениях осей  $x$  и  $y$ . Нормальные скорости  $b_k$  и углы  $\alpha_k$ , образованные нормальными к фронтам волн с осью  $y$ , определяются выражениями

$$b_k = (\theta^2 + \lambda_k^2)^{-1/2}, \quad \text{tg } \alpha_k = \theta / \lambda_k \quad (k=1, 2) \quad (2.6)$$

Функции  $\lambda_1, \lambda_2$  в соответствующих интервалах

$$0 \leq \theta \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq d^{-1/2} \quad (2.7)$$

имеют вещественные значения [13], функции (2.3) выражают вещественные квазипродольные и квазипоперечные волны, распространяющиеся в направлениях  $0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2$ . В интервалах  $a^{-1/2} < \theta < \infty$ ,  $d^{-1/2} < \theta < \infty$  функции  $\lambda_1, \lambda_2$  принимают комплексные значения, волны (2.3) становятся комплексными.

Характер изменения нормальных скоростей (2.6) квазипродольных и квазипоперечных волн от направления движения зависит от соотношений упругих постоянных сред [5, 13] и графически представлен на фиг. 1–4. Скорость квазипоперечной волны внутри второго участка (2.7) всегда имеет экстремум, скорость квазипродольной волны внутри первого участка (2.7) может не иметь его. Экстремальные точки и значения скоростей имеют выражения:

$$\theta_1^0 = [(b-n)/(ab-n^2)]^{1/2}, \quad \theta_2^0 = [(b+m)/(ab-m^2)]^{1/2}$$

$$b_1(\theta_1^0) = [(ab-n^2)/(a+b-2n)]^{1/2}, \quad b_2(\theta_2^0) = [(ab-m^2)/(a+b+2m)]^{1/2}$$

$$n = c+d, \quad m = c-d \quad (2.8)$$

Скорости (2.6) на границах участков (2.7) имеют значения

$$b_1(0) = b^{1/2}, \quad b_1(a^{-1/2}) = a^{1/2}, \quad b(0) = b_2(d^{-1/2}) = d^{1/2} \quad (2.9)$$

Наибольшие и наименьшие значения скоростей (2.6) в интервалах (2.7) имеют одни из значений (2.8) и (2.9), причем всегда  $\min b_1 > \max b_2$ .

Плоские продольные волны в жидкости могут быть представлены функциями

$$u_0 = u(t + \theta x + \lambda_0 y), \quad v_0 = v(t + \theta x + \lambda_0 y) \quad (2.10)$$

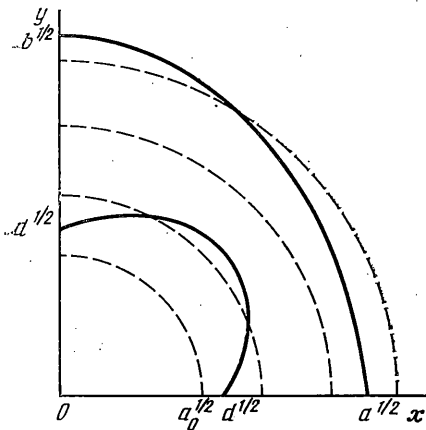
$$\lambda_0 = (1/a_0 - \theta^2)^{1/2} \quad (2.11)$$

Нормальная скорость и направления распространения волн имеют выражения

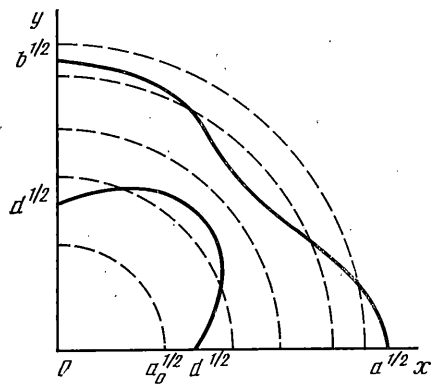
$$b_0 = a^{1/2} = (\mu_0/\rho_0)^{1/2}, \quad \text{tg } \alpha_0 = \theta/\lambda_0 \quad (2.12)$$

Продольные волны (15) в интервале

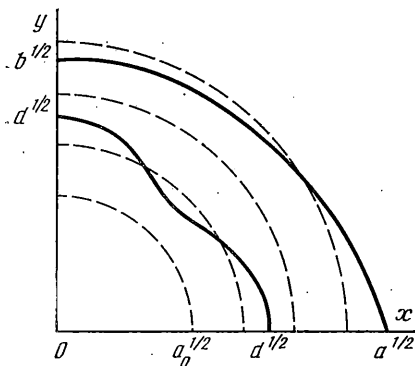
$$0 \leq \theta \leq a_0^{-1/2} \quad (2.13)$$



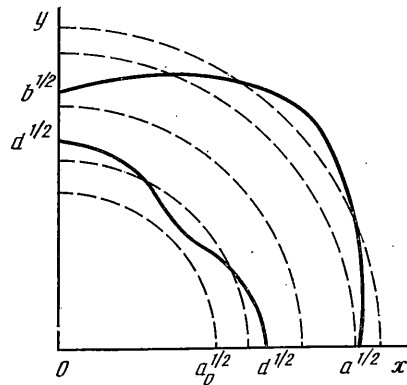
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

вещественные, распространяющиеся по направлениям  $0 \leq \alpha_0 \leq 90^\circ$ , в интервале  $a_0^{-1/2} < \theta < \infty$  комплексные. Функции (15) подчинены условию

$$u_0(\Omega_0)/\theta = v_0(\Omega_0)/\lambda_0 = w(\Omega_0) \quad (2.14)$$

В условиях (2.5) и (2.14) под  $w$  понимается произвольная непрерывная два раза дифференцируемая функция, если в функции  $w$  коэффициенты при переменных величинах вещественны. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства  $x, y, t$  комплексные величины, под  $w$  понимается аналитическая функция в этой области.

При падении на границу раздела сред квазипродольной и квазипоперечной волн каждая из них возбуждает квазипродольную и квазипоперечную отраженные волны и продольную преломленную волну. Так как построение решений для рассматриваемой задачи принципиально не отличается от аналогичной задачи для продольных волн [4], то на этом здесь не останавливаемся, ограничиваемся приведением полученных решений и анализом их.

**3. Отражение и преломление квазипродольных волн.** Пусть из анизотропного полупространства падает на границу раздела сред квазипродольная волна

$$u_1 = u(t + \theta x - \lambda_1 y), \quad v_1 = v(t + \theta x - \lambda_1 y) \quad (3.1)$$

определенная в первом интервале (2.7) и имеющая нормальную скорость и угол падения, выражаемые (2.6) при  $k=1$ .

Повторяя рассуждения [4], определяем выражения квазипродольной и квазипоперечной отраженных и продольной преломленной волн:

$$u_{11} = -(r_{11}/R)u(t + \theta x + \lambda_1 y), \quad v_{11} = (r_{11}/R)v(t + \theta x + \lambda_1 y)$$

$$u_{21} = -(\lambda_2 r_{21}/\lambda_1 R)u(t + \theta x + \lambda_2 y), \quad v_{21} = (p_2 r_{21}/p_1 R)v(t + \theta x + \lambda_2 y)$$

$$u_{01}=(r_{01}/c\lambda_1 R)u(t+\theta x-\lambda_0 y), v_{01}=-\lambda_0 r_{01}/p_1 R v(t+\theta x-\lambda_0 y) \quad (3.2)$$

$$r_{11}=c(a/b)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)(a^{-1}-\theta^2)^{1/2}\{\rho[(ab)^{1/2}(a^{-1}-\theta^2)^{1/2}-$$

$$-(c-d)^2\theta^2(d^{-1}-\theta^2)^{1/2}-ab(a^{-1}-\theta^2)(d^{-1}-\theta^2)^{1/2}]\lambda_0-\rho_0(ab)^{1/2}\times$$

$$\times(\lambda_1-\lambda_2)(a^{-1}-\theta^2)^{1/2}\} \quad (3.3)$$

$$r_{21}=2\rho\lambda_0\lambda_1(p_1-c\lambda_2^2)[bp_1-c(c-d)\theta^2]$$

$$r_{01}=-2\rho ac\lambda_1(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(a^{-1}-\theta^2)[bp_1-c(c-d)\theta^2]$$

$$R=c(a/b)^{1/2}(\lambda_1-\lambda_2)(a^{-1}-\theta^2)^{1/2}\{\rho[(ab)^{1/2}(a^{-1}-\theta^2)^{1/2}+$$

$$+(c-d)^2\theta^2(d^{-1}-\theta^2)^{1/2}+ab(a^{-1}-\theta^2)(d^{-1}-\theta^2)^{1/2}]\lambda_0+$$

$$+\rho_0(ab)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)(a^{-1}-\theta^2)^{1/2}\}$$

Нормальные скорости отраженных и преломленных волн, а также углы отражения и преломления определяются формулами (2.6) и (2.12). Закон синусов имеет выражение:

$$\sin \alpha_1/b_1=\sin \alpha_{11}/b_{11}=\sin \alpha_{21}/b_{21}=\sin \alpha_{01}/b_{01}=\theta \quad (3.4)$$

Функции (3.2) выражают вещественные отраженные волны при углах падения квазипродольной волны, определенных в первом интервале (2.7), если  $a>a_0$ , т. к. функции (2.4) и (2.11) на участках (2.7) и (2.13) вещественные и  $a>d$  согласно (2.1). Правые части вторых выражений (2.6) на участках (2.7) монотонно возрастают [13]. Легко установить, что и правая часть второго выражения (2.12) монотонно возрастает на участке (2.13). Следовательно, при возрастании угла падения квазипродольной волны (3.1) углы отражения и преломления волн (3.2) монотонно возрастают независимо от характера изменения нормальных скоростей упругих волн в анизотропной среде от направления распространения (фиг. 1-4).

Для отраженных квазипродольных и квазипоперечных волн эти положения всегда выполняются, независимо от значений  $a$ ,  $d$  и  $a_0$ , причем  $\alpha_1=\alpha_{11}>\alpha_{21}$ , т. к. всегда  $\min b_1>\max b_2$ .

При  $a_0>a$  функции (3.2) выражают вещественные отраженные и преломленные волны в интервале (2.13). Значению  $\theta=a_0^{-1/2}$  отвечает критический угол падения по отношению к преломленной продольной волне. На участке

$$a_0^{-1/2}<\theta<a^{-1/2} \quad (3.5)$$

первого интервала (2.7) углы падения превышают критический угол, функция (2.11) принимает мнимые значения. Решение задачи строится с помощью функций комплексного переменного [4] и имеет вид:

$$u_1=\text{Re}[u_1(t+\theta x-\lambda_1 y)], v_1=\text{Re}[v_1(t+\theta x-\lambda_1 y)] \quad (3.6)$$

$$u_{11}=\text{Re}[-(r_{11}^*/R^*)u_1(t+\theta x+\lambda_1 y)] \quad (3.7)$$

$$v_{11}=\text{Re}[(r_{11}^*/R^*)v_1(t+\theta x+\lambda_1 y)]$$

$$u_{21}=\text{Re}[-(\lambda_2 r_{21}^*/\lambda_1 R^*)u_1(t+\theta x+\lambda_2 y)]$$

$$v_{21}=\text{Re}[(p_2 r_{21}^*/p_1 R^*)v_1(t+\theta x+\lambda_2 y)]$$

$$u_{01}=\text{Re}[(r_{01}^*/c\lambda_1 R^*)u_1(t+\theta x+i\lambda_0 y)]$$

$$v_{01}=\text{Re}[(i\lambda_0 r_{01}^*/p_1 R^*)v_1(t+\theta x+i\lambda_0 y)]$$

Здесь  $u_1$  и  $v_1$  — регулярные функции в верхней полуплоскости комплексного переменного,  $r_{i1}^*$  и  $R^*$  определяются (3.3) при

$$\lambda_0=-i\lambda_0^*=-i(\theta^2-a_0^{-1})^{1/2} \quad (3.8)$$

Преломленная продольная волна — комплексная волна с мнимой фазовой скоростью в направлении оси  $y$ , остальные волны вещественные.

Отсюда следует, что процесс возбуждения комплексных вторичных волн зависит от значений постоянных  $a$ ,  $d$ ,  $a_0$  и не зависит от характера изменения нормальных скоростей упругих волн в анизотропной среде от направления распространения. Ниже убедимся, что это справедливо и для отражения и преломления квазипоперечных волн. Однако на ка-

чественную картину процесса отражения и преломления характер изменения скоростей волн от направления движения оказывает принципиальное влияние, вызывая многообразие комбинаций в распределении скоростей первичных и вторичных волн и углов падения, отражения и преломления, в зависимости от угла падения, изучение которых имеет определенный теоретический и практический интерес и может быть сведено к рассмотрению трех основных случаев. На фиг. 1—4 сплошные линии изображают характер изменения нормальных скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн от направления движения, пунктирные линии — возможные характерные значения нормальной скорости продольной волны в жидкости.

*Случай 1.* Пусть выполняется условие

$$a > d > a_0 \quad (a^{-1/2} < d^{-1/2} < a_0^{-1/2}) \quad (3.9)$$

решение задачи выражается функциями (3.1) и (3.2), определенными в первом интервале (2.7).

Если  $\min b_2 > a_0^{1/2}$  (фиг. 1—4), то при любых углах падения, определенных в первом интервале (2.7), скорости первичных и вторичных волн и углы падения, отражения и преломления подчинены условиям:

$$b_1 = b_{11} > b_{21} > b_{01}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} > \alpha_{01}. \quad (3.10)$$

Первое условие очевидно, второе следует из (3.4). При выполнении

$$\max b_2 = d^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_2(\theta_2^\circ) \quad (3.11)$$

скорости квазипоперечной и продольной волн равны в точках  $\theta_{21}$  и  $\theta_{22}$ , определяемых уравнением  $b_2(\theta) = a_0^{1/2}$ , причем  $0 < \theta_{21} < \theta_2^\circ$ ,  $\theta_2^\circ < \theta_{22} < d^{-1/2}$  (фиг. 3, 4).

Предположим, что точка  $\theta = a^{-1/2}$  принадлежит участку  $(\theta_{22}, d^{-1/2})$ , в этом случае при углах падения, определенных в первом интервале (2.7) выполняются условия: на участке  $(0, \theta_{21})$  — условия (3.10); на участке  $(\theta_{21}, \theta_{22})$  — условия

$$b_1 = b_{11} > b_{01} > b_{21}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{01} > \alpha_{21} \quad (3.12)$$

на участке  $(\theta_{22}, a^{-1/2})$  — условия (3.10). В точках  $\theta_{21}$  и  $\theta_{22}$  имеем  $\alpha_{21} = \alpha_{01}$ . Если точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участках  $(0, \theta_{21})$  или  $(\theta_{21}, \theta_{22})$  картина очевидна: в первом случае, на участке  $(0, a^{-1/2})$  выполняются условия (3.10); во втором, на участках  $(0, \theta_{21})$  и  $(\theta_{21}, a^{-1/2})$  — условия (3.10) и (3.12).

*Случай 2.* Имеет место условие

$$a > a_0 > d \quad (a^{-1/2} < a_0^{-1/2} < d^{-1/2}) \quad (3.13)$$

решение задачи выражается функциями (3.1) и (3.2). При выполнении

$$\max b_2 = b_2(\theta_2^\circ) > a_0^{1/2} > \min b_2 = d^{1/2} \quad (3.14)$$

в точках  $\theta_{21}$  и  $\theta_{22}$  скорости  $b_2$  и  $b_0 = a_0^{1/2}$  равны (фиг. 1, 2). Если точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участке  $(\theta_{22}, a^{-1/2})$ , имеем: на участке  $(0, \theta_{21})$  — условия (3.12); на участке  $(\theta_{21}, \theta_{22})$  — условия (3.10); на участке  $(\theta_{22}, a^{-1/2})$  — условия (3.12). Если же точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участке  $(0, \theta_{21})$  или  $(\theta_{21}, \theta_{22})$ , то в первом случае, на участке  $(0, a^{-1/2})$  выполняется условие (3.12); во втором случае, на участках  $(0, \theta_{21})$  и  $(\theta_{21}, a^{-1/2})$  условия (3.12) и (3.10). Если

$$\min b_1 > a_0^{1/2} > \max b_2 \quad (3.15)$$

(фиг. 1—4), то скорости и направления распространения первичных и вторичных волн, определенных в первом интервале (2.7), удовлетворяют условиям (3.12).

При выполнении одного из условий

$$\max b_1 = b^{1/2} > a^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = b_1(\theta_1^\circ) \quad (3.16)$$

$$\max b_1 = a^{1/2} > b^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = b_1(\theta_1^\circ) \quad (3.17)$$

отвечающих соответственно фиг. 2 при  $b > a$  и  $a > b$ , скорости квазипродольной и продольной волн равны в точках  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$ . Точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участке  $(\theta_{12}, a^{-1/2})$ , в первом интервале (2.7) выполняются условия: на участке  $(0, \theta_{11})$  — условия (3.12); на участке  $(\theta_{11}, \theta_{12})$  — условия

$$b_{01} > b_1 = b_{11} > b_{21}, \quad \alpha_{01} > \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} \quad (3.18)$$

на участке  $(\theta_{12}, a^{-1/2})$  — условия (3.12). Если же имеет место одно из условий

$$\max b_1 = a^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = b^{1/2} \quad (3.19)$$

$$\max b_1 = a^{1/2} > a_0^{1/2} > b^{1/2} > \min b_1 = b_1(\theta_1^\circ) \quad (3.20)$$

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^\circ) > a^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = b^{1/2} \quad (3.21)$$

отвечающих соответственно фиг. 3, 2 и 4, то  $b_1 = b_0 = a_0^{1/2}$  в точке  $\theta_{11}$  первого интервала (2.7) и в этом интервале имеем: на участке  $(0, \theta_{11})$  — условия (3.18); на участке  $(\theta_{11}, a^{-1/2})$  — условия (3.12).

Во всех случаях при значениях  $\theta_{11}$  и  $\theta_{12}$  имеем  $\alpha_{01} = \alpha_1 = \alpha_{11}$ .

*Случай 3.* Считаем, что

$$a_0 > a > d \quad (a_0^{-1/2} < a^{-1/2} < d^{-1/2}) \quad (3.22)$$

решение задачи на участке (2.13) выражается вещественными функциями (3.1) и (3.2), на участке (3.5) — функциями комплексного переменного (3.6) и (3.7). При выполнении одного из условий

$$\max b_1 = b^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = a^{1/2} \quad (3.23)$$

$$\max b_1 = b^{1/2} > a_0^{1/2} > a^{1/2} > \min b_1 = b_1(\theta_1^\circ) \quad (3.24)$$

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^\circ) > b^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = a^{1/2} \quad (3.25)$$

отвечающих соответственно фиг. 1, 2, 4 при  $b > a$ , для первичных и вторичных волн в первом интервале (2.7) выполняются условия: на участках  $(0, \theta_{11})$  — условия (3.12); на участках  $(\theta_{11}, a^{-1/2})$  — условия (3.18) на участках  $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$  — условия

$$b_1 = b_{11} > b_{21}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} \quad (3.26)$$

Если же выполняются условия

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^\circ) > a_0^{1/2} > b^{1/2} > \min b_1 = a^{1/2} \quad (3.27)$$

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^\circ) > a_0^{1/2} > a^{1/2} > \min b_1 = b^{1/2} \quad (3.28)$$

отвечающие соответственно фиг. 4 при  $b > a$  и  $a > b$ , то имеем: на участках  $(0, \theta_{11})$  — условия (3.18); на участках  $(\theta_{11}, \theta_{12})$  — условия (3.12); на участках  $(\theta_{12}, a_0^{-1/2})$  — условия (3.18); на участках  $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$  — условия (3.26).

При  $a_0^{1/2} > \max b_1$  на участке  $(0, a_0^{-1/2})$  выполняются условия (3.18), на участке  $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$  — условия (3.26) (фиг. 1 — 4).

Во всех случаях на участках  $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$  при выполнении условия (3.22) скорости и углы преломления продольной волны имеют комплексные значения.

**4. Отражение и преломление квазипоперечных волн.** Если из анизотропного полупространства на границу раздела с жидкостью падает квазипоперечная волна

$$u_2 = u(t + \theta x - \lambda_2 y), \quad v_2 = v(t + \theta x - \lambda_2 y) \quad (4.1)$$

определенная во втором интервале (2.7) и имеющая нормальную скорость и угол падения, выражаемые (2.6) при  $k=2$ , отраженные квазипродольная и квазипоперечная волны и преломленная продольная волна выражаются функциями

$$u_{12} = -(\lambda_1 r_{12} / \lambda_2 R) \dot{u}(t + \theta x + \lambda_1 y) \\ v_{12} = (p_1 r_{12} / p_2 R) v(t + \theta x + \lambda_1 y)$$

$$u_{22} = -(r_{22}/R)u(t + \theta x + \lambda_2 y) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} v_{22} &= (r_{22}/R)v(t + \theta x + \lambda_2 y) \\ u_{02} &= (r_{02}/c\lambda_2 R)u(t + \theta x - \lambda_0 y) \\ v_{02} &= -(\lambda_0 r_{02}/p_2 R)v(t + \theta x - \lambda_0 y) \\ r_{12} &= 2\rho\lambda_0\lambda_2(p_2 - c\lambda_2^2)[bp_2 - c(c-d)\theta^2] \\ r_{22} &= -c(a/b)^{1/2}(\lambda_1 + \lambda_2)(a^{-1} - \theta^2)^{1/2}\{\rho[(ab)^{1/2}(a^{-1} - \theta^2)^{1/2} - \\ &\quad - (c-d)^2\theta^2(d^{-1} - \theta^2)^{1/2} - ab(a^{-1} - \theta^2)(d^{-1} - \theta^2)^{1/2}]\lambda_0 + \\ &\quad + \rho_0(ab)^{1/2}(\lambda_1 - \lambda_2)(a^{-1} - \theta^2)^{1/2}\} \\ r_{02} &= -2\rho ac\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(a^{-1} - \theta^2)[bp_2 - c(c-d)\theta^2] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Функция  $R$  определяется выражением (3.3). Закон синусов имеет выражение:

$$\sin \alpha_2/b_2 = \sin \alpha_{22}/b_{22} = \sin \alpha_{12}/b_{12} = \sin \alpha_{02}/b_{02} = \theta \quad (4.4)$$

Нормальные скорости, углы падения, отражения и преломления определяются формулами (2.6) и (2.12).

В выражениях (4.2) функции  $u_{22}$  и  $v_{22}$  представляют вещественные отраженные квазипоперечные волны при углах падения волны (4.1), определенных во втором интервале (2.7). Функции  $u_{12}$  и  $v_{12}$  могут выражать вещественные отраженные квазипродольные волны лишь в пределах первого интервала (2.7); функции  $u_{02}$  и  $v_{02}$  — вещественные преломленные продольные волны лишь в пределах интервала (2.13). Как и при падении квазипродольной волны на границу раздела сред с возрастанием угла падения квазипоперечной волны (4.1) углы отражения и преломления волн (4.2) монотонно возрастают независимо от характера изменения нормальных скоростей упругих волн в анизотропной среде от направления распространения. При  $a_0 > d$  значению  $\theta = a_0^{-1/2}$  отвечает критический угол падения по отношению к преломленной продольной волне. Значению  $\theta = a^{-1/2}$  отвечает критический угол падения по отношению к отраженной квазипродольной волне, т. к. всегда  $a > d$ . Если угол падения превысит критический угол, соответствующая вторичная волна становится комплексной.

Изучим решения задачи и распределение скоростей первичных и вторичных волн и углов падения, отражения и преломления в зависимости от угла падения волны (4.1) при различных соотношениях постоянных  $a$ ,  $d$ ,  $a_0$  с учетом характера изменения нормальных скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн в анизотропных средах от направления движения.

*Случай 1.* Выполняется условие (3.9); при углах падения квазипоперечной волны, определенных в первом интервале (2.7), решение задачи выражается функциями (4.1) и (4.2), представляющими собой вещественные волны.

Если  $\min b_2 > a_0^{1/2}$  (фиг. 1–4), для первичной и вторичных волн при любых углах падения квазипоперечной волны, определенной в первом интервале (2.7), выполняются условия:

$$b_{12} > b_2 = b_{22} > b_{02}, \quad \alpha_{12} > \alpha_2 = \alpha_{22} > \alpha_{02} \quad (4.5)$$

Если же выполняется условие (3.11) и точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участке  $(\theta_{22}, d^{-1/2})$  (фиг. 3, 4), то скорости, углы входа и выхода первичных и вторичных волн удовлетворяют условиям: на участке  $(0, \theta_{21})$  — условиям (4.5); на участке  $(\theta_{21}, \theta_{22})$  — условиям

$$b_{12} > b_{02} > b_2 = b_{22}, \quad \alpha_{12} > \alpha_{02} > \alpha_2 = \alpha_{22} \quad (4.6)$$

на участке  $(\theta_{22}, a^{-1/2})$  — условиям (4.5). Если точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участках  $(0, \theta_{21})$  или  $(\theta_{21}, \theta_{22})$ , картина очевидна: в первом случае на участке  $(0, a^{-1/2})$  выполняются условия (4.5); во втором, на участках  $(0, \theta_{21})$  и  $(\theta_{21}, a^{-1/2})$  — условия (4.5) и (4.6).

Углы падения квазипоперечной волны (4.1) на участке

$$a^{-1/2} < \theta < d^{-1/2} \quad (4.7)$$

второго интервала (2.7) превышают критический угол падения по отношению к отраженной квазипродольной волне, функция  $\lambda_1$  принимает мнимые значения.

Решение поставленной задачи выражается функциями комплексного переменного

$$u_2 = \text{Re}\{u_1(t + \theta x - \lambda_2 y)\}, \quad v_2 = \text{Re}\{v_1(t + \theta x - \lambda_2 y)\} \quad (4.8)$$

$$u_{12} = \text{Re}\{i\lambda_1 r_{12}^*/\lambda_2 R^* u_1(t + \theta x - i\lambda_1 y)\}$$

$$v_{12} = \text{Re}\{(p_1 r_{12}^*/p_2 R^*) v_1(t + \theta x - i\lambda_1 y)\} \quad (4.9)$$

$$u_{22} = \text{Re}\{-(r_{22}^*/R^*) u_1(t + \theta x - \lambda_2 y)\}$$

$$v_{22} = \text{Re}\{(r_{22}^*/R^*) v_1(t + \theta x + \lambda_2 y)\}$$

$$u_{02} = \text{Re}\{(r_{02}^*/c\lambda_2 R^*) u_1(t + \theta x - \lambda_0 y)\}$$

$$v_{02} = \text{Re}\{-(\lambda_0 r_{02}^*/p_2 R^*) v_1(t + \theta x - \lambda_0 y)\}$$

Коэффициенты  $r_{12}^*$  и  $R^*$  определяются выражениями (4.3) при

$$\lambda_1 = -i\lambda_1^*, \quad (a^{-1} - \theta^2)^{1/2} = -i(\theta^2 - a^{-1})^{1/2} \quad (4.10)$$

Отраженная квазипродольная волна представляет собой комплексную волну с мнимой фазовой скоростью вдоль оси  $y$ , остальные волны вещественные.

На участке (4.7) при  $\min b_2 > a_0^{-1/2}$  (фиг. 1–4) скорости и углы входа и выхода первичных и вторичных волн удовлетворяют условиям:

$$b_2 = b_{22} > b_{02}, \quad \alpha_2 = \alpha_{22} > \alpha_{02} \quad (4.11)$$

При выполнении (3.11) (фиг. 3, 4), если точка  $\theta = a^{-1/2}$  принадлежит участку  $(0, \theta_{21})$ , имеем: на участке  $(a^{-1/2}, \theta_{21})$  — условия (4.11); на участке  $(\theta_{21}, \theta_{22})$  — условия

$$b_{02} > b_2 = b_{22}, \quad \alpha_{02} > \alpha_2 = \alpha_{22} \quad (4.12)$$

на участке  $(\theta_{22}, d^{-1/2})$  — условия (4.11). Если точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участке  $(\theta_{21}, \theta_{22})$  или  $(\theta_{22}, d^{-1/2})$ , в первом случае, на участках  $(a^{-1/2}, \theta_{22})$  и  $(\theta_{22}, d^{-1/2})$  выполняются условия (4.12) и (4.11); во втором, на участке  $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$  имеет место условие (4.11).

*Случай 2.* Если выполняется условие (3.13), при углах падения квазипоперечной волны, отвечающих первому интервалу (2.7), решение задачи выражается вещественными функциями (4.1) и (4.2).

При условии (3.14) (фиг. 1, 2), если точка  $\theta = a^{-1/2}$  принадлежит участку  $(\theta_{22}, a_0^{-1/2})$ , скорости и углы входа и выхода волн (4.1) и (4.2) удовлетворяют условиям: на участке  $(0, \theta_{21})$  — условиям (4.6); на участке  $(\theta_{21}, \theta_{22})$  — условиям (4.5); на участке  $(\theta_{22}, a^{-1/2})$  — условиям (4.6). Если точка  $\theta = a^{-1/2}$  принадлежит участку  $(0, \theta_{21})$  или  $(\theta_{21}, \theta_{22})$ , то имеем: в первом случае, на участке  $(0, a^{-1/2})$  — условия (4.6); во втором, на участках  $(0, \theta_{21})$  и  $(\theta_{21}, a^{-1/2})$  — условия (4.6) и (4.5).

При (3.15) (фиг. 1–4) в первом интервале (2.7) выполняются условия (4.6).

Если выполняется условие (3.16) или (3.17), отвечающие соответственно фиг. 2 при  $b > a$  и  $a > b$ , точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участке  $(\theta_{12}, a_0^{-1/2})$  и для волн (4.1) и (4.2) на первом интервале (2.7) выполняются условия: на участке  $(0, \theta_{11})$  — условия (4.6); на участке  $(\theta_{11}, \theta_{12})$  — условия

$$b_{02} > b_{12} > b_2 = b_{22}, \quad \alpha_{02} > \alpha_{12} > \alpha_2 = \alpha_{22} \quad (4.13)$$

на участке  $(\theta_{12}, a^{-1/2})$  — условия (4.6).

Если же выполняется одно из условий (3.19), (3.20) и (3.21), отвечающих соответственно фиг. 3, 2 и 4, то в первом интервале (2.7) имеют место условия: на участке  $(0, \theta_{11})$  — условия (4.13); на участке



$(\theta_{11}, a^{-1/2})$  — условия (4.6). На участке

$$a^{-1/2} < \theta < a_0^{-1/2} \quad (4.14)$$

второго интервала (2.7) углы падения квазипоперечной волны превышают критический по отношению к отраженной квазипродольной волне, решения задачи выражаются функциями комплексного переменного (4.8) и (4.9).

На участке (4.14) при условии (3.14) (фиг. 1, 2), если точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участке  $(0, \theta_{21})$  скорости и углы входа и выхода волн (4.8) и (4.9) удовлетворяют условиям: на участке  $(a^{-1/2}, \theta_{21})$  — условиям (4.12); на участке  $(\theta_{21}, \theta_{22})$  — условиям (4.11); на участке  $(\theta_{22}, a_0^{-1/2})$  — условиям (4.12). Если точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участке  $(\theta_{21}, \theta_{22})$  или  $(\theta_{22}, a_0^{-1/2})$ , то имеем: в первом случае, на участках  $(a^{-1/2}, \theta_{22})$  и  $(\theta_{22}, a_0^{-1/2})$  — условия (4.11) и (4.12); во втором, на участке  $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$  — условия (4.12).

При условии (3.15) (фиг. 1–4) в интервале (4.14) выполняются условия (4.12).

Если выполняется одно из условий (3.16) и (3.17), отвечающих соответственно фиг. 2 при  $b > a$  и  $a > b$ , точка  $\theta = a^{-1/2}$  находится на участке  $(\theta_{12}, a_0^{-1/2})$ . На участке (4.14) для волн (4.8) и (4.9) имеют место условия (4.12).

Если же имеем одно из условий (3.19), (3.20) и (3.21), отвечающих соответственно фиг. 3, 2 и 4, то на участке (4.14) выполняются условия (4.12). На участке

$$a_0^{-1/2} < \theta \leq d^{-1/2} \quad (4.15)$$

второго интервала (2.7) углы падения квазипоперечной волны превышают критический угол и по отношению к преломленной продольной волне, функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_0$  имеют мнимые значения. Отраженные и преломленные волны, возбуждаемые квазипоперечной волной (4.8), принимают выражения:

$$\begin{aligned} u_{12} &= \text{Re}[(i\lambda_1^* r_{12}^* / \lambda_2 R^*) u_1(t + \theta x - i\lambda_1^* y)] \\ v_{02} &= \text{Re}[(i\lambda_0^* r_{02}^* / p_2 R^*) v_1(t + \theta x + i\lambda_0^* y)] \\ u_{22} &= \text{Re}[-(r_{22}^* / R^*) u_1(t + \theta x + \lambda_2 y)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} v_{22} &= \text{Re}[(r_{22}^* / R^*) v_1(t + \theta x + \lambda_2 y)] \\ u_{02} &= \text{Re}[(r_{02}^* / c\lambda_2 R^*) u_1(t + \theta x + i\lambda_0^* y)] \\ v_{02} &= \text{Re}[(i\lambda_0^* r_{02}^* / p_2 R^*) v_1(t + \theta x + i\lambda_0^* y)] \end{aligned}$$

Коэффициенты  $r_{i2}$  и  $R^*$  определяются (4.3) при

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -i\lambda_1^*, (a^{-1} - \theta^2)^{1/2} = -i(\theta^2 - a^{-1})^{1/2} \\ \lambda_0 &= -i\lambda_0^*, (a_0^{-1} - \theta^2)^{1/2} = -i(\theta^2 - a_0^{-1})^{1/2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

На участке (4.15) отраженная квазипродольная и преломленная продольная волны — комплексные волны с мнимой фазовой скоростью в направлении оси  $y$ ; падающая и отраженная квазипоперечные волны — вещественные волны, для которых  $b_2 = b_{22}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{22}$ .

*Случай 3.* Пусть выполняется условие (3.22). На участке (2.13) второго интервала (2.7) решения задачи выражается вещественными функциями (4.1) и (4.2).

При выполнении одного из условий (3.23), (3.24) и (3.25), отвечающих соответственно фиг. 1, 2 и 4 при  $b > a$  выполняются условия: на участке  $(0, \theta_{11})$  — условия (4.6); на участке  $(\theta_{11}, a^{-1/2})$  — условия (4.13).

Если выполняется одно из условий (3.27) и (3.28), отвечающих соответственно фиг. 4 при  $b > a$  и  $a > b$  имеем: на участке  $(0, \theta_{11})$  — условия (4.13); на участке  $(\theta_{11}, \theta_{21})$  — условия (4.6); на участке  $(\theta_{21}, a_0^{-1/2})$  — условия (4.13).

Если же  $a^{1/2} > \max b^1$ , то на участке  $(0, a_0^{-1/2})$  выполняются условия (4.13) (фиг. 1–4). На участке

$$a_0^{-1/2} < \theta \leq a^{-1/2} \quad (4.18)$$

второго интервала (2.7) углы падения квазипоперечной волны превышают критический угол по отношению к преломленной продольной волне. Квазипоперечная волна (4.8) возбуждает отраженные и преломленные волны, имеющие выражения

$$\begin{aligned} u_{12} &= \text{Re} [ -(\lambda_1 r_{12}^* / \lambda_2 R^*) u_1(t + \theta x + \lambda_1 y) ] \\ v_{12} &= \text{Re} [ (p_1 r_{12}^* / p_2 R^*) v_1(t + \theta x + \lambda_1 y) ] \\ u_{22} &= \text{Re} [ -(r_{22}^* / R^*) u_1(t + \theta x + \lambda_2 y) ] \\ v_{22} &= \text{Re} [ (r_{22}^* / R^*) v_1(t + \theta x + \lambda_2 y) ] \\ u_{02} &= \text{Re} [ (r_{02}^* / c \lambda_2 R^*) u_1(t + \theta x + i \lambda_0^* y) ] \\ v_{02} &= \text{Re} [ (i \lambda_0^* r_{02}^* / p_2 R^*) v_1(t + \theta x + i \lambda_0^* y) ] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Коэффициенты  $r_{12}$  и  $R^*$  определяются (4.3) при  $\lambda_0 = -i \lambda_0^*$ . На участке (4.18) преломленная продольная волна — комплексная с мнимой фазовой скоростью в направлении оси  $y$ .

При выполнении условия (3.22) на участке (4.18) для всех случаев (фиг. 1—4) выполняются условия

$$b_{12} > b_2 = b_{22}, \quad \alpha_{12} > \alpha_2 = \alpha_{22} \quad (4.20)$$

На участке

$$a^{-1/2} < \theta < d^{-1/2} \quad (4.21)$$

второго интервала (2.7) углы падения квазипоперечной волны превышают критический угол и по отношению к отраженной квазипродольной волне, функции  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  имеют мнимые значения. Решение поставленной задачи выражается функциями (4.8) и (4.16). На участке (4.21) имеем  $b_2 = b_{22}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{22}$ .

Задача распространения плоских волн в анизотропном полупространстве с четырьмя упругими постоянными, контактирующем с сжимаемым жидким полупространством, получила полное решение. Определены коэффициенты отражения и преломления, исследованы кинематические характеристики отраженных и преломленных волн.

Установлено, что характер отражения и преломления квазипродольных и квазипоперечных волн на границе раздела сред, связанный с процессом возбуждения вещественных и комплексных вторичных волн, зависит от выполнения условий (3.9), (3.13) и (3.22) и от углов падения первичных волн и не зависит от характера изменения нормальных скоростей упругих волн в анизотропных средах от направления движения (фиг. 1—4). На качественную картину процесса отражения и преломления характер изменения нормальных скоростей от направления движения оказывает принципиальное влияние, вызывая различные комбинации в распределении нормальных скоростей первичных и вторичных волн в зависимости от углов падения первичных волн. Изучены диапазоны углов падения первичных волн, при которых возбуждаются вещественные и комплексные вторичные волны. Детально изучены возможные комбинации распределения нормальных скоростей и углов падения, отражения и преломления первичных и вторичных волн в зависимости от характера изменения нормальных скоростей упругих волн в анизотропных средах от направления движения при выполнении условий (3.9), (3.13) и (3.22).

Как и в [4] рассмотрения здесь ограничены анизотропными средами, удовлетворяющими условию (2.2). Поставленная задача для сред, не удовлетворяющих условию (2.2), требует отдельного изучения [6].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. Вып. 17. С. 28—71.
2. Musgrave M. J. P. The propagation of elastic waves in crystals and other anisotropic media // Repts Progr. Phys. 1959. V. 22. P. 74—96.
3. Musgrave M. J. P. Reflection and refraction of plane elastic waves at a plane boundary between anisotropic media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1960. V. 3. N 4.
4. Осипов И. О. Отражение и преломление плоских упругих волн на границе жид-

- кости и твердого анизотропного тела // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1961. № 12. С. 1768–1783.
5. *Осипов И. О.* Характер изменения скоростей распространения упругих волн в анизотропных средах // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 1. С. 3–10.
  6. *Осипов И. О.* К методу функционально-инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 3. С. 391–396.
  7. *Осипов И. О.* Волны релеевского типа в жидком слое на анизотропном полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1967. № 3. С. 18–34.
  8. *Keith Colton M., Crampin S.* Seismic body waves in anisotropic media: reflection and refraction at a plane interface // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1977. V. 49. N 1. P. 181–208.
  9. *Crampin S.* A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic-media // Wave Motion. 1981. V. 3. N 4. P. 343–391.
  10. *Петрашень Г. И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.; Наука, 1980. 280 с.
  11. *Молотков Л. А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.; Наука, 1984. 201 с.
  12. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология: Теория и методы. М.; Мир, 1983. Т. 1. 519 с.
  13. *Осипов И. О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
  14. *Осипов И. О.* О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 927–934.
  15. *Зволинский Н. В.* Плоские волны в упругом полупространстве и покрывающем его слое жидкости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56. № 1. С. 21–27.
  16. *Зволинский Н. В.* Поверхностные плоские волны в упругом полупространстве и покрывающем его слое жидкости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56. № 4. С. 363–366.
  17. *Гоголадзе В. Г.* Волны Релея на границе сжимаемой жидкой среды и твердого упругого полупространства // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1948. № 127. С. 26–32.
  18. *Брезовский Л. М.* Волны в слоистых средах. М.; Изд. АН СССР, 1957. 502 с.
  19. *Саваренский Е. Ф., Курнос Д. П.* Элементы сейсмологии и сейсмометрии. М.; ГТГостехиздат, 1955. 544 с.

Петрозаводск

Поступила в редакцию  
3.VI.1988