МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1989

УДК 539.3

А. Г. ТЯПИН

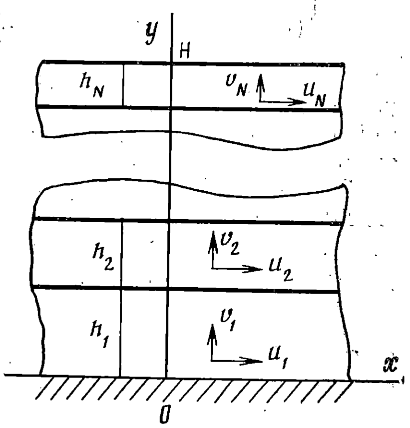
КОМПЛЕКСНЫЕ КОРНИ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН РЭЛЕЯ В МНОГОСЛОЙНОМ ПАКЕТЕ НА ЖЕСТКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Обсуждаются асимптотические свойства спектра корней дисперсионного уравнения и строится численный метод решения уравнения на основе этих свойств.

Задача определения характеристик гармонических поверхностных волн в акустике, сейсмологии [1], а также в теории многослойных конструкций [2] сводится либо к задаче о собственных значениях матриц, получаемых с помощью гипотез об изменении перемещений по глубине [3–5], либо к решению дисперсионного уравнения [1, 6–8]. При расчете динамических краевых эффектов, взаимодействия включений со слоистой средой требуется учитывать быстро затухающие волны, а для этого определять не только чисто мнимые, но и комплексные корни дисперсионного уравнения [5, 9–11].

1. Дисперсионное уравнение при исчезающе малой частоте. Рассмотрим плоские гармонические волны Рэлея в пакете из изотропных однородных слоев на жестком полупространстве (фиг. 1). Перемещения слоя l пакета в пространстве Фурье удовлетворяют уравнениям

$$(\lambda_l+2\mu_l)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}+\mu_l\frac{\partial^2 u_l}{\partial y^2}+(\lambda_l+\mu_l)\frac{\partial^2 v_l}{\partial x\,\partial y}=-\rho_l\omega^2 u_l$$
$$(\lambda_l+2\mu_l)\frac{\partial^2 v_l}{\partial y^2}+\mu_l\frac{\partial^2 v_l}{\partial x^2}+(\lambda_l+\mu_l)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x\,\partial y}=-\rho_l\omega^2 v_l \qquad (1)$$



Фиг. 1

где λ_l и μ_l — комплексные аналоги постоянных Ламе с учетом внутреннего трения, ρ_l — плотность материала слоя, ω — круговая частота колебаний. На нижней границе пакета и между слоями примем условия полного контакта, на верхней границе — условия отсутствия напряжений.

Будем искать решение (1) в виде $(u_l, v_l)^T=(U_l, V_l)^T\exp(k_1x+r_2^ly)$. Тогда для фиксированного значения k_1 получаем две пары значений r_2^l, которые обозначим $\pm k_2^l$, $\pm p_2^l$:

$$(k_2^l)^2=-k_1^2-\rho_l\omega^2/\mu_l \qquad (p_2^l)^2=-k_1^2-\rho_l\omega^2/(\lambda_l+2\mu_l)$$

Применяя матричный алгоритм, аналогичный [7], с учетом условий на нижней границе пакета и на границах между слоями, приходим к соотношениям для перемещений и напряжений в l-м слое снизу

$$(u_l, v_l, \sigma_y^l, \tau^l)^T=\mathbf{D}_l\mathbf{B}_l\mathbf{T}_{l-1}\mathbf{B}_{l-1}\ldots\mathbf{T}_2\mathbf{B}_2\mathbf{T}_1\mathbf{B}_1(W_1, W_2)^T\exp(k_1x) \qquad (2)$$
$$\mathbf{D}_l=\mathrm{diag}\,[1, i, -2\mu_lk_1, 2\mu_lik_1]$$
$$\mathbf{T}_l=\mathrm{diag}\,[1, 1, t_l, t_l], \quad t_l\equiv\mu_l/\mu_{l+1}$$

где $\mathbf{B}_j$ ($j=1, 2, \ldots, N$) — матрица (4×4) с элементами (индекс слоя j опускаем):

$$
\begin{gathered}
b_{13}=\alpha^{-1}(\operatorname{ch} p-\operatorname{ch} k), \quad b_{33}=b_{13}+\operatorname{ch} p, \quad b_{24}=-b_{13} \\
b_{23}=\alpha^{-1}[(p_2/ik_1)\operatorname{sh} p+(k_1/ik_2)\operatorname{sh} k], \quad b_{22}=b_{33} \\
b_{43}=b_{23}-(ik_1/k_2)\operatorname{sh} k, \quad b_{44}=\operatorname{ch} k-b_{13}, \quad b_{11}=b_{44} \\
b_{14}=-\alpha^{-1}[(ik_2/k_1)\operatorname{sh} k+(ik_1/p_2)\operatorname{sh} p], \quad b_{21}=-b_{43} \\
b_{34}=b_{14}-(ik_1/p_2)\operatorname{sh} p, \quad b_{31}=\operatorname{ch} k-\operatorname{ch} p-b_{13} \\
b_{41}=b_{21}+(1+\alpha)(ik_1/k_2)\operatorname{sh} k, \quad b_{12}=(ik_1/p_2)\operatorname{sh} p-b_{14} \\
b_{32}=(1+\alpha)(ik_1/p_2)\operatorname{sh} p+b_{12}, \quad b_{42}=-b_{31} \\
\alpha=\rho\omega^2/2\mu k_1^2, \quad k=k_2 h, \quad p=p_2 h
\end{gathered}
\tag{3}
$$

$\mathbf{B}_1$ — матрица (4×2), содержащая два последних столбца матрицы (3); W_1, W_2 — произвольные константы, пропорциональные напряжениям σ_y и τ на нижней границе пакета. В слоях от первого до ($l-1$)-го в качестве h выступают толщины слоев; в слое l, где ищутся перемещения и напряжения, вместо h используется величина $y-(h_1+h_2+\ldots+h_{l-1})$.

Подставляя (2) в условия отсутствия напряжений на верхней границе пакета, приходим к дисперсионному уравнению $\det\mathbf{A}=0$, где $\mathbf{A}$ — нижний блок размерностью (2×2) матрицы $\mathbf{F}$, определяемой по формуле $\mathbf{F}=\mathbf{B}_N\mathbf{T}_{N-1}\mathbf{B}_{N-1}\ldots\mathbf{T}_1\mathbf{B}_1$.

Используя метод малого параметра по $(\omega/k_1)^2$ и вводя обозначения $\varkappa=ik_1h$, $s=\operatorname{sh}\varkappa$, $c=\operatorname{ch}\varkappa$, $\gamma=\mu/(\lambda+2\mu)$ получаем (опуская индексы слоев)

$$\mathbf{B}=\mathbf{R}+O(\omega^2/k_1^2)$$

$$
\mathbf{R}=\left\|\begin{matrix} c & -\gamma s & 0 & (1+\gamma)s \\ -\gamma s & c & (1+\gamma)s & 0 \\ 0 & (1-\gamma)s & c & \gamma s \\ (1-\gamma)s & 0 & \gamma s & c \end{matrix}\right\| + \varkappa(1-\gamma)\left\|\begin{matrix} s & -c & -s & c \\ c & -s & -c & s \\ s & -c & -s & c \\ c & -s & -c & s \end{matrix}\right\|
\tag{4}
$$

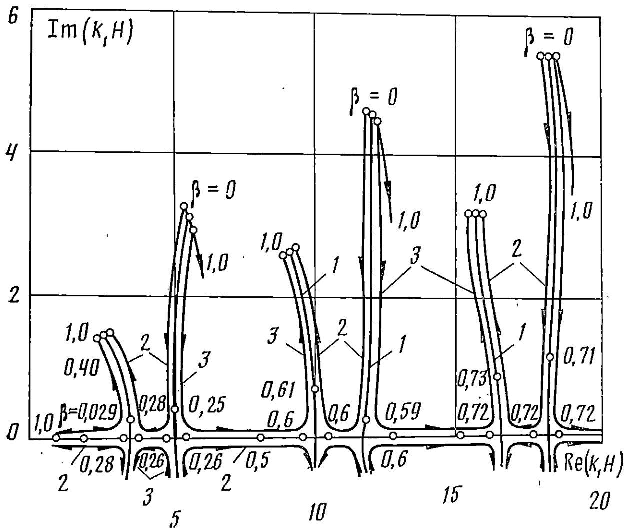
Таким образом, при $\omega/k_1\to0$ получаем асимптотическое дисперсионное уравнение $\det\mathbf{A}_0=0$, где $\mathbf{A}_0$ — нижний блок (2×2)-матрицы $\mathbf{F}_0$, определяемой по формуле $\mathbf{F}_0=\mathbf{R}_N\mathbf{T}_{N-1}\mathbf{R}_{N-1}\ldots\mathbf{R}_2\mathbf{T}_1\mathbf{R}_1$. Здесь $\mathbf{R}_1$ состоит из двух последних столбцов матрицы (4).

Перепишем матрицу $\mathbf{F}$ в виде $\mathbf{F}=\mathbf{Y}_l\mathbf{T}_l\mathbf{F}_l$, где $\mathbf{Y}_l=\mathbf{B}_N\ldots\mathbf{B}_{l+1}$, $\mathbf{F}_l=\mathbf{B}_l\ldots\mathbf{T}_1\mathbf{B}_1$. При $t_l\to\infty$ дисперсионное уравнение распадается на два уравнения

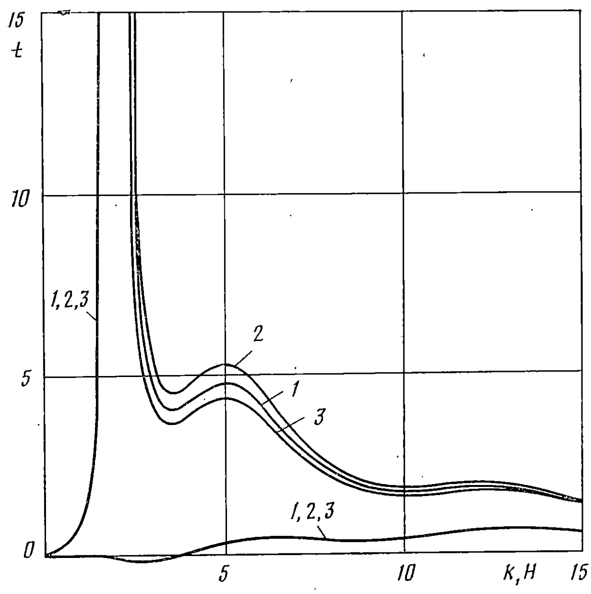
$$
\begin{vmatrix} f_{31} & f_{32} \\ f_{41} & f_{42} \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{vmatrix}=0
$$

первое из которых является дисперсионным для пакета из l нижних слоев, рассматриваемого без верхних. Из определения матрицы $\mathbf{B}_1$ следует, что второе уравнение является дисперсионным для пакета из ($N-l$) слоев, лежащего на жестком полупространстве. При $t_l\to\infty$ ($l=1, 2, \ldots, N-1$) все слои работают независимо, и множество корней уравнения $\det\mathbf{A}=0$ для многослойного пакета есть объединение множеств корней N уравнений для однослойных оснований на жестком полупространстве, соответствующих отдельным слоям пакета. Для них известны асимптотические формулы, точность которых растет с уменьшением частоты и увеличением модулей корней [9]. Указанная асимптотика корней при увеличении разницы сдвиговых жесткостей слоев справедлива и для асимптотического дисперсионного уравнения $\det\mathbf{A}_0=0$.

2. Численное решение дисперсионного уравнения. Построим алгоритм численного решения в два этапа. На первом этапе решается асимптотическое дисперсионное уравнение. Безразмерный параметр β с небольшим шагом меняется от нуля до единицы и при каждом значении β численно решается уравнение $\det\mathbf{A}_0=0$ для пакета с отношениями жесткостей $\tau_l=t_l/\beta$. Здесь t_l — отношения жесткостей исходного пакета ($l=1, 2, \ldots, N-1$). При очередном значении β в качестве начальных приближений для корней используются корни, полученные при предыдущем значении β. На первом шаге начальные приближения — корни уравнений для однослойных оснований, вычисленные по асимптотическим формулам. Описанный алгоритм по-



Фиг. 2



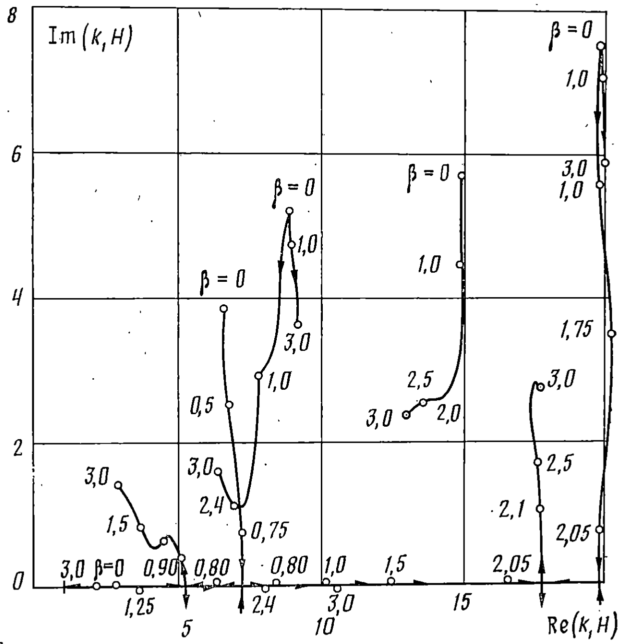
Фиг. 3

строен в предположении, что корни асимптотического дисперсионного уравнения непрерывно зависят от β. Это предположение выполняется при условии, что все $\tau_l>1$ при любом значении β из рассматриваемого диапазона. Ограничимся случаем $t_l>1$, типичным для задач о взаимодействии сооружений с основаниями.

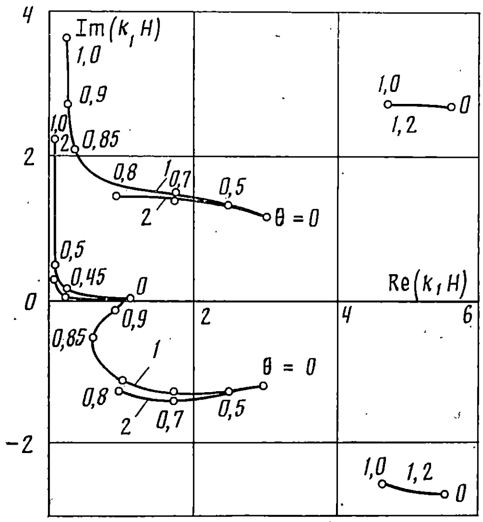
На втором этапе решается полное дисперсионное уравнение $\det \mathbf{A}=0$. Частота ω меняется с небольшим шагом от нуля до требуемой величины. Начальными приближениями на очередном шаге служат корни, вычисленные на предыдущем шаге, а на первом шаге – корни асимптотического дисперсионного уравнения $\det \mathbf{A}_0=0$, полученные на первом этапе. Для однослойного основания, когда первый этап не нужен, такой алгоритм реализован в [11].

В качестве примера рассмотрим поведение корней асимптотического дисперсионного уравнения $\det \mathbf{A}_0=0$ для двухслойного пакета при одинаковых толщинах слоев, одинаковых коэффициентах Пуассона 0,3 и действительном отношении модулей сдвига t (комплексные отношения модулей сдвига и комплексные коэффициенты Пуассона в пространстве Фурье появляются в асимптотическом дисперсионном уравнении, если при малых частотах тангенсы углов потерь не стремятся к нулю). На фиг. 2 (кривые *1*) показаны наименьшие по модулю корни на правой комплексной полуплоскости при значениях $\beta=t^{-1}$ от нуля до единицы. Кривые *2* показывают смещение корней при $\operatorname{Im}\nu_{1,2}>0$, кривые *3* – при $\operatorname{Im}\nu_{1,2}<0$.

Остановимся на особенности, возникающей при $t\to1$. Рассмотрим случай действительных коэффициентов Пуассона (не обязательно одинаковых). Известно [8], что для однослойного основания на правой полуплоскости действительный корень



Фиг. 4



Фиг. 5

один. С изменением β корни меняются непрерывно, каждому комплексному корню соответствует комплексно-сопряженный. Таким образом, число действительных корней может уменьшаться или увеличиваться как минимум на два одновременно. Между тем при $\beta=0$ количество действительных корней равно количеству слоев (в данном случае – двум), а при $\beta=1$ действительный корень должен остаться один.

Указанный парадокс разрешается следующим образом. Условие непрерывности при $t\to 1$ действительно выполняется для каждого корня в отдельности, но не для всего множества корней. «Лишний» действительный корень при $t\to 1$ стремится к $+\infty$, но эту роль поочередно исполняют различные корни, выходя к действительной оси и сходя с нее (фиг. 2). Проиллюстрируем этот процесс так. Уравнение $\det A_0=0$ является квадратным относительно t. Построим графики $t(k_1H)$ для различных сочетаний параметров слоев (фиг. 3). Кривые *1–3* относятся к случаям: $\nu_1=\nu_2=0{,}3$; $\nu_1=0{,}3$, $\nu_2=0{,}2$; $\nu_1=0{,}3$, $\nu_2=0{,}4$. Две ветви графика $t(k_1H)$, соответствующие двум корням квадратного уравнения, относятся к случаям $t>1$ и $t<1$. Пересечение горизонтальной прямой $t=t_*$ с графиком $t(k_1H)$ дает значения действительных корней уравнения $\det A_0=0$ при $t=t_*$. Локальные максимумы и минимумы кривых на фиг. 3 соответствуют появлению и уходу с действительной оси пар корней при изменении t (см. фиг. 2). Кривые на фиг. 3 наглядно показывают механизм «передачи на бесконечность» одного из действительных корней при $t\to 1$.

По локальным экстремумам на фиг. 3 и по кривым фиг. 2 можно оценить значения t, при которых работу слоев хотя бы приближенно можно считать независимой. Очевидно, что выход первой пары корней к действительной оси качественно меняет картину расположения корней. Поэтому в данном случае слои можно приближенно считать работающими независимо при $t>6$. С другой стороны, при $t<3$ расположение первых трех корней примерно соответствует случаю однородного слоя суммарной толщины. Итак, попытки смоделировать многослойный пакет одним слоем с некоторыми усредненными характеристиками оправданы только для конечного числа наименьших по модулю корней и в сравнительно узком интервале значений t. Если же рассматривать большие по модулю корни, то слои можно считать работающими независимо.

Характер поведения корней асимптотического дисперсионного уравнения, рассмотренный выше, сохраняется и для многослойных пакетов. На фиг. 4 показаны корни для трехслойного пакета с характеристиками $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0{,}3$; $h_1=0{,}4\,H$; $h_2=h_3=0{,}3\ H$; $t_1^{-1}=0{,}3\beta$, $t_2^{-1}=0{,}167\beta$ в диапазоне β от нуля до трех. Как и для двухслойного пакета, с увеличением β часть корней выходит на действительную ось и уходит с нее, передавая «лишние» действительные корни вправо (для трехслойного пакета таких корней два).

Для многослойного пакета из графиков $t_l(k_1H)$ ($l=1, 2, \ldots, N-1$), аналогичных фиг. 3, можно оценить значения t_l, при которых нижний полупакет слабо влияет на верхний. Из фиг. 4 видно, что приведенная выше оценка $t>6$ оправдана как для одного верхнего слоя ($\beta<1$ на фиг. 4), так и для двух верхних слоев ($\beta<0{,}55$).

На фиг. 5 показано поведение корней дисперсионного уравнения $\det \mathbf{A}=0$ в зависимости от безразмерной частоты $\theta=\omega H[\mathrm{Re}(\mu_1)/\rho_1]^{-1/2}/\pi$ для двухслойного основания при $\rho_1=\rho_2$; $\nu_1=\nu_2=0{,}3$; $t=2$. Кривые *1* относятся к случаю $\mathrm{Im}\,\mu_{1,\,2}=0{,}05\ \mathrm{Re}\,\mu_{1,\,2}$, кривые *2* – к случаю $\mathrm{Im}\,\mu_{1,\,2}=0{,}02\ \mathrm{Re}\,\mu_{1,\,2}$.

Как следует из приведенных выше оценок, в данном случае наименьшие по модулю корни дисперсионного уравнения для двухслойного основания ведут себя подобно корням для однородного основания суммарной толщины. Сохраняется и явление аномальной дисперсии [8] – выход корней к мнимой оси в четвертом квадранте. Как показали вычисления, внутреннее трение сильнее влияет на «аномальные» корни, чем на «нормальные»: затухание аномальных волн происходит примерно вдвое быстрее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
3. *Новичков Ю. Н.* Распространение плоских волн в слоистых упругих средах регулярной структуры // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 6. С. 65–73.
4. *Болотин В. В.* К теории слоистых плит // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 65–72.
5. *Lysmer J., Waas G.* Shear waves in plane infinite structures // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Eng. 1972. V. 98. No. 1. P. 85–105.
6. *Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F.* Elastic waves in layered media. New York: McGraw-Hill, 1957. 380 p.
7. *Haskell N. A.* The dispersion of surface waves in multilayered media // Bull. Seismol. Soc. American. 1953. V. 43. No. 1. P. 17–34.
8. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.
10. *Батенькова Е. Ю., Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Контактные задачи о вынужденных стационарных колебаниях балок на упругой полосе, полуполосе и прямоугольнике // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 902–910.
11. *Тяпин А. Г.* Расчет жестких фундаментов на волновые воздействия, распространяющиеся в грунте // Строит. механика и расчет сооружений. 1983. № 6. С. 48–51.

Москва

Поступила в редакцию
20.VII.1988