МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1989

УДК 539.3

Ю. А. РОССИХИН

О РАВНОМЕРНОЙ ПРИГОДНОСТИ ЛУЧЕВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С РАСПРОСТРАНЕНИЕМ УДАРНЫХ ВОЛН В СЛАБО АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Задачи, связанные с распространением цилиндрических и сферических поверхностей сильного разрыва в слабо анизотропных средах кубической и гексагональной симметрий, обсуждались в [1, 2]. В этих работах решение строилось при помощи метода возмущений, а в качестве малого параметра выбиралась величина, характеризующая отклонение анизотропных коэффициентов жесткости от изотропных. Отмечалось, что с ростом времени построенные прямые разложения для скачков скоростей перемещений становятся неравномерно пригодными.

В данной работе при помощи лучевого метода и метода возмущений решаются краевые задачи о внезапном приложении к цилиндрической полости, расположенной в безграничной слабо анизотропной среде произвольной симметрии, внешних воздействий, остающихся в дальнейшем постоянными, причем, обсуждается вопрос о построении равномерно пригодных разложений для волновых характеристик.

1. Постановка задачи и лучевой метод. Предположим, что в безграничной слабо анизотропной среде произвольной симметрии расположена цилиндрическая полость радиуса r^*, к границе которой в момент времени $t=0$ прикладывается остающееся в дальнейшем постоянным внешнее воздействие, причем, в начальный момент задаются либо компоненты вектора скорости v_i^*, либо компоненты вектора силы σ_i^*. Тогда задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\sigma_{ij,j}=\rho v_{i,t} \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij,t}=(\lambda_{ijml}^{(0)}+\varepsilon\lambda_{ijml}^{(1)})\, v_{m,l} \tag{1.2}$$

с краевыми условиями

$$v_i|_S=v_i^* \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ij}\nu_j^{(0)}|_S=\sigma_i^* \tag{1.4}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; v_i — компоненты скорости перемещения; ρ — плотность; $\lambda_{ijml}^{(0)}$ — компоненты тензора упругости изотропного материала; $\lambda_{ijml}^{(1)}$ — компоненты некоторого тензора четвертого ранга; ε — малый параметр; S — граница полости; $\nu_i^{(0)}$ — компоненты единичного вектора нормали к поверхности S; v_i^*, σ_i^* — заданные функции от криволинейных координат u_α на поверхности S, индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей переменной, латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, греческие — 1, 2.

Для нахождения решения за фронтами ударных волн, возникающих от действия на пространство с полостью ударных нагрузок (1.3) или (1.4), используем лучевой метод, состоящий в представлении искомых функций v_i при каждом фиксированном t в виде

$$v_i(u_\alpha,\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t-t_\sigma)^k[v_{i,(k)}]\,|_{t=t_\sigma},\quad t_\sigma=\int_0^\sigma\frac{d\sigma}{G(\sigma)} \tag{1.5}$$

где σ — расстояние вдоль луча (луч — кривая, в каждой точке которой единичный вектор нормали к волновой поверхности направлен по касательной к этой кривой); u_α — криволинейные координаты на волновой поверхности $\Sigma(t)$, которые остаются неизменными вдоль каждого луча, т. е. совпадают с криволинейными координатами на поверхности S [3]; $G(\sigma)$ — нормальная скорость распространения ударной волны; величины $[v_{i,(k)}]$ обозначают скачки производных k-го порядка по времени t от функций v_i на фронте ударной волны.

Для определения коэффициентов лучевого ряда (1.5) продифференцируем соотношения (1.1), (1.2) k раз по времени и возьмем их разность на различных сторонах волновой поверхности. В результате получим

$$[\sigma_{ij,j(k)}]=\rho[v_{i,(k+1)}],\quad [\sigma_{ij,(k+1)}]=(\lambda^{(0)}_{ijml}+\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijml})[v_{m,l(k)}] \tag{1.6}$$

Учитывая условие совместности для разрывов производной k-го порядка от v_i [4]:

$$G[v_{i,j(k)}]=-[v_{i,(k+1)}]\nu_j+G\frac{d[v_{i,(k)}]}{d\sigma}\nu_j+Gg^{\alpha\beta}[v_{i,(k)}]_{,\alpha}x_{j,\beta} \tag{1.7}$$

из соотношений (1.6) найдем

$$\{\rho G^2-(\lambda+2\mu)\}\omega_{(k+1)}-\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijml}\nu_i\nu_j\nu_l[v_{m,(k+1)}]=-2(\lambda+2\mu)Gd\omega_{(k)}/d\sigma+$$
$$+2(\lambda+2\mu)\Omega G\omega_{(k)}+(\lambda+2\mu)\omega_{(k)}dG/d\sigma-(\lambda+\mu)GW^{\alpha}_{(k),\alpha}-(\lambda+3\mu)G_{,\alpha}W^{\alpha}_{(k)}-$$
$$-\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijml}\nu_i\nu_j\{\nu_l d[v_{m,(k)}]/d\sigma+d([v_{m,(k)}]\nu_l)/d\sigma\}G-\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijml}\nu_i g^{\alpha\beta}G\{[v_{m,(k)}]_{,\alpha}\nu_j x_{l,\beta}+$$
$$+([v_{m,(k)}]\nu_l)_{,\alpha}x_{j,\beta}\}+\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijml}\nu_i\nu_l[v_{m,(k)}](\nu_j dG/d\sigma-Gd\nu_j/d\sigma)-F_{(k-1)} \tag{1.8}$$

$$(\rho G^2-\mu)W^{\sigma}_{(k+1)}g_{\sigma\tau}-\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijml}\nu_j\nu_l x_{i,\tau}[v_{m,(k+1)}]=-2\mu dW_{\tau(k)}/d\sigma+\mu(g_{\gamma\tau}dG/d\sigma-$$
$$-2Gb_{\gamma\tau}+2G\Omega g_{\gamma\tau})W^{\gamma}_{(k)}-(\lambda+\mu)G\omega_{(k),\tau}+(\lambda+3\mu)G_{,\tau}\omega_{(k)}-$$
$$-\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijml}x_{i,\tau}\nu_j\{\nu_l d[v_{m,(k)}]/d\sigma+d([v_{m,(k)}]\nu_l)/d\sigma\}G-\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijml}x_{i,\tau}Gg^{\alpha\beta}\{[v_{m,(k)}]_{,\alpha}\nu_j x_{l,\beta}+$$
$$+([v_{m,(k)}]\nu_l)_{,\alpha}x_{j,\beta}\}+\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijml}x_{i,\tau}\nu_l[v_{m,(k)}](\nu_j dG/d\sigma-Gd\nu_j/d\sigma)-F_{(k-1)\tau} \tag{1.9}$$
$$\omega_{(k)}=[v_{i,(k)}]\nu_i,\quad W_{\gamma(k)}=[v_{i,(k)}]x_{i,\gamma}$$
$$[v_{i,(k)}]=\omega_{(k)}\nu_i+W^{\gamma}_{(k)}x_{i,\gamma},\quad W^{\gamma}_{(k)}=W_{\tau(k)}g^{\tau\gamma}$$

где ν_i — компоненты единичного вектора нормали к волновой поверхности $\Sigma(t)$, $x_{i,\gamma}=\partial x_i/\partial u_\gamma$, $x_i=x_i(u_\alpha,t)$ — уравнение поверхности $\Sigma(t)$ в декартовых координатах; $g^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты метрического тензора поверхности $\Sigma(t)$; $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй фундаментальной квадратичной формы поверхности; Ω — средняя кривизна; λ, μ — параметры Ламе; $F_{(k-1)}$, $F_{(k-1)\tau}$ зависят от скачков компонентов скорости перемещения $(k-1)$-го порядка и из-за громоздкости не приводятся.

Соотношения (1.8), (1.9) не зависят от вида воздействия на границу цилиндрической полости. Однако скачки скоростей перемещений определяются из (1.8), (1.9) с точностью до произвольных функций, которые в свою очередь находятся из краевых условий.

Для определения величин G, $\omega_{(k)}$, $W_{\gamma(k)}$ $(k=0, 1, \ldots)$ необходимо в рекуррентных уравнениях (1.8), (1.9) положить последовательно k равным -1, 0, 1,... и в полученных соотношениях разложить входящие туда неизвестные величины в ряды по степеням ε:

$$Z=Z^{(0)}+\varepsilon Z^{(1)} \tag{1.10}$$

Так, при $k=-1$ с учетом (1.10) имеем для квазипродольной волны

$$\rho G^2=\lambda+2\mu+\varepsilon\lambda^{(1)}_{ijkl}\nu_i^{(0)}\nu_j^{(0)}\nu_k^{(0)}\nu_l^{(0)} \tag{1.11}$$

$$[v_i]^{(0)}=\omega^{(0)}\nu_i^{(0)},\quad W_\tau^{(0)}=0,\quad W_\tau^{(1)}=(\lambda+\mu)^{-1}\lambda_{ijkl}^{(1)}x_{i,\tau}^{(0)}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)}\nu_k^{(0)}\omega^{(0)}$$

для квазипоперечных волн

$$\begin{gathered}2\rho G^{(0)}G^{(1)}W_\tau^{(0)}-\Delta_\tau^{\alpha}W_\alpha^{(0)}=0,\quad [v_i]^{(0)}=W^{\gamma(0)}x_{i,\gamma}^{(0)}\\ \omega^{(0)}=0,\quad \omega^{(1)}=-(\lambda+\mu)^{-1}\lambda_{ijkl}^{(1)}\nu_i^{(0)}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)}x_{k,\gamma}^{(0)}W^{\gamma(0)}\\ \Delta_\tau^{\alpha}=g^{\gamma\alpha(0)}\lambda_{ijkl}^{(1)}x_{i,\tau}^{(0)}\nu_j^{(0)}x_{k,\gamma}^{(0)}\nu_l^{(0)}\end{gathered}\tag{1.12}$$

Приравнивая нулю определитель однородной относительно $W_\tau^{(0)}$ системы из (1.12), находим две скорости квазипоперечных волн

$$\rho G_{1,2}^{(1)2}=\mu+\varepsilon\{{}^1/_2(\Delta_1^1+\Delta_2^2)\pm[{}^1/_4(\Delta_1^1-\Delta_2^2)^2+\Delta_1^2\Delta_2^1]^{1/2}\}\tag{1.13}$$

а также связь между компонентами нулевого приближения вектора интенсивности каждой из квазипоперечных волн

$$W_2^{(0)}=aW_1^{(0)},\quad a=(2\rho G^{(0)}G^{(1)}-\Delta_1^1)(\Delta_1^2)^{-1}\tag{1.14}$$

При $k=0$ из соотношений (1.8), (1.9) в нулевом приближении получаем для квазипродольной волны

$$d\omega^{(0)}/d\sigma^{(0)}-\Omega^{(0)}\omega^{(0)}=0\tag{1.15}$$

для квазипоперечных волн

$${}^1/_2 d(W^{\tau(0)}W_\tau^{(0)})/d\sigma^{(0)}-\Omega^{(0)}W^{\tau(0)}W_\tau^{(0)}=0\tag{1.16}$$

Здесь и в дальнейшем используется формула разложения производной вдоль луча по малому параметру

$$\frac{dZ}{d\sigma}=\frac{dZ}{d\sigma^{(0)}}-\varepsilon\frac{G^{(1)}}{G^{(0)}}\frac{dZ}{d\sigma^{(0)}}\tag{1.17}$$

где $\sigma^{(0)}=G^{(0)}t$ — расстояние, отсчитываемое вдоль прямого луча в изотропной упругой среде, т. е. при $\varepsilon=0$.

При $k=0$ из соотношений (1.8), (1.9) в первом приближении находим для квазипродольной волны

$$\begin{gathered}d\omega^{(1)}/d\sigma^{(0)}-\Omega^{(0)}\omega^{(1)}=G^{(0)-1}M_{(0)}\\ M_{(0)}={}^1/_2(\lambda+2\mu)^{-1}\{2(\lambda+2\mu)(\Omega^{(1)}G^{(0)}-3\Omega^{(0)}G^{(1)})\omega^{(0)}-\\ -2\lambda_{ijkl}^{(1)}G^{(0)}g^{\alpha\beta(0)}x_{i,\alpha}^{(0)}[(\nu_j^{(0)}\nu_k^{(0)}\nu_l^{(0)})_{,\beta}\omega^{(0)}+2\nu_j^{(0)}\nu_k^{(0)}\nu_l^{(0)}\omega_{,\beta}^{(0)}]\}\end{gathered}\tag{1.18}$$

для квазипоперечных волн

$$\begin{gathered}{}^1/_2 d(W^{\tau(0)}W_\tau^{(1)})/d\sigma^{(0)}-\Omega^{(0)}W^{\tau(0)}W_\tau^{(1)}=G^{(0)-1}N_{(0)}\\ N_{(0)}={}^1/_4\mu^{-1}\{\mu(dG^{(1)}/d\sigma^{(0)}+2\Omega^{(1)}G^{(0)}-2\Omega^{(0)}G^{(1)})W^{\tau(0)}W_\tau^{(0)}-\\ -2\mu(G^{(1)}b_\tau^{\gamma(0)}+G^{(0)}b_\tau^{\gamma(1)})W_\gamma^{(0)}W^{\tau(0)}+\\ +G^{(0)}\lambda_{ijkl}^{(1)}(\nu_i^{(0)}\nu_j^{(0)}\nu_l\ W^{\alpha(0)}W^{\tau(0)}x_{k,\alpha}^{(0)})_{,\tau}-[(W^{\gamma(0)}x_{k,\gamma}^{(0)})_{,\alpha}\nu_j^{(0)}x_{l,\beta}^{(0)}+\\ +(W^{\gamma(0)}x_{k,\gamma}^{(0)}\nu_l^{(0)})_{,\alpha}x_{j,\beta}^{(0)}]G^{(0)}\lambda_{ijkl}^{(1)}x_{i,\tau}^{(0)}g^{\alpha\beta(0)}W^{\tau(0)}\}\end{gathered}\tag{1.19}$$

Для определения каждой из величин $W_1^{(1)}$, $W_2^{(1)}$ в отдельности приходится привлекать второе приближение уравнения (1.9) при $k=-1$:

$$2\rho G^{(0)}G^{(1)}W_\tau^{(1)}-\Delta_\tau^{\alpha}W_\alpha^{(1)}=f_\tau\tag{1.20}$$

$$\begin{gathered}f_\tau=\lambda_{ijkl}^{(1)}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)}x_{i,\tau}^{(0)}(\omega^{(1)}\nu_k^{(0)}+W^{\gamma(0)}x_{k,\gamma}^{(1)})+(\nu_l^{(1)}\nu_j^{(0)}x_{i,\tau}^{(0)}+\\ +\nu_l^{(0)}\nu_j^{(1)}x_{i,\tau}^{(0)}+\nu_l^{(0)}\nu_j^{(0)}x_{i,\tau}^{(1)})\lambda_{ijkl}^{(1)}x_{k,\gamma}^{(0)}W^{\gamma(0)}-\rho(G^{(1)2}+2G^{(0)}G^{(2)})W_\tau^{(0)}\end{gathered}$$

Левые части двух уравнений (1.20) линейно-зависимы в силу соотношений (1.12), (1.13), а поэтому линейно-зависимы и правые части этих уравнений, что приводит к равенству

$$f_1\Delta_2^1+f_2(2\rho G^{(0)}G^{(1)}-\Delta_1^1)=0 \tag{1.21}$$

которое служит линейным уравнением для определения $G^{(2)}$. Подставляя найденное из (1.21) $G^{(2)}$ в (1.20) и отбрасывая одно из двух линейно-зависимых уравнений (1.20), например, второе, из первого имеем

$$W_2^{(1)}=aW_1^{(1)}+(\Delta_1^2)^{-1}f_1 \tag{1.22}$$

Формула (1.22) дает связь между величинами $W_1^{(1)}$, $W_2^{(1)}$ и вместе с уравнением (1.19) позволяет определить каждую из них.

Аналогично можно получить приближение более высокого порядка по ε и по k.

Ограничимся в дальнейшем по k величинами нулевого порядка, а по ε — величинами нулевого и первого порядка, т. е. в ряде (1.5) оставим только нулевой член.

2. Построение решения и его регуляризация. Чтобы проинтегрировать уравнения (1.15), (1.16), (1.18), (1.19), перейдем к решению конкретных краевых задач. Пусть в слабо анизотропной среде расположена цилиндрическая полость с осью x_3, на границе которой заданы условия (1.3) или (1.4). Тогда уравнение волновой поверхности в изотропной упругой среде имеет вид

$$x_1^{(0)}=\zeta\cos\theta, \quad x_2^{(0)}=\zeta\sin\theta, \quad x_3^{(0)}=z \tag{2.1}$$

где $\theta=u_1$ — угол между полярным радиусом и осью x_1, $z=u_2$ — расстояние вдоль образующей цилиндрической полости, $\zeta=r^*+\sigma^{(0)}$.

На основании формул (2.1), (1.14) — (1.16) величины нулевого порядка, входящие в соотношения (1.18) — (1.22), запишутся так

$$\nu_1^{(0)}=\cos\theta, \quad \nu_2^{(0)}=\sin\theta, \quad \nu_3^{(0)}=0, \quad x_{1,1}^{(0)}=-\zeta\sin\theta \tag{2.2}$$

$$x_{2,1}^{(0)}=\zeta\cos\theta, \quad x_{3,2}^{(0)}=1, \quad x_{1,2}^{(0)}=x_{2,2}^{(0)}=x_{3,1}^{(0)}=0, \quad g_{11}^{(0)}=\zeta^2$$

$$g_{22}^{(0)}=1, \quad g_{12}^{(0)}=0, \quad b_{11}^{(0)}=-\zeta, \quad b_{22}^{(0)}=b_{12}^{(0)}=0$$

$$\Omega^{(0)}=-{}^1/{}_2\zeta^{-1}, \quad \omega^{(0)}=c^{(0)}r^{*1/2}\zeta^{-1/2}, \quad W^{\tau(0)}W_\tau^{(0)}=c^{(0)2}r^*\zeta^{-1}$$

$$W_1^{(0)}=c^{(0)}r^{*1/2}l\zeta^{1/2}, \quad W_2^{(0)}=c^{(0)}r^{*1/2}la^*\zeta^{-1/2}$$

где $l=(1+a^{*2})^{-1/2}$, a^* в отличие от a не содержит множителя ζ^{-1} и, следовательно, не зависит от $\sigma^{(0)}$, $c^{(0)}$ — произвольная функция.

Определим теперь величины первого порядка малости, входящие в соотношения (1.18) — (1.22). Прежде всего заметим, что скорости квазипродольной и квазипоперечных волн не зависят от $\sigma^{(0)}$, т. е. не меняются вдоль лучей. Действительно, для квазипродольной волны это утверждение вытекает из формул (2.1) и (1.11), а для квазипоперечных волн — из формулы (1.13), в которую входят величины Δ_1^1, Δ_2^2, не зависящие от $\sigma^{(0)}$, и величины Δ_2^1, Δ_1^2, пропорциональные соответственно ζ^{-1}, ζ.

Компоненты вектора нормали и декартовы координаты волновой поверхности определяются вдоль лучей следующей системой уравнений [4]:

$$d\nu_i/d\sigma=-g^{\alpha\beta}x_{i,\beta}G^{-1}G_{,\alpha}, \quad dx_i/d\sigma=\nu_i \tag{2.3}$$

Исключая из (2.3) величины ν_i, представляя уравнение волновой поверхности в виде $x_i=A(\sigma, u_1)\nu_i^{(0)}+B(\sigma, u_1)\nu_{i,\theta}^{(0)}$ и выполняя тождественные преобразования, приходим с учетом (1.17) к системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d^2A}{d\sigma^{(0)2}}(A_{,\theta}-B)+\frac{d^2B}{d\sigma^{(0)2}}(A+B_{,\theta})=-\varepsilon G^{(0)-1}G_{,\theta}^{(1)}\\ \frac{d^2A}{d\sigma^{(0)}}(A+B_{,\theta})-\frac{d^2B}{d\sigma^{(0)2}}(A_{,\theta}-B)=0\end{gathered} \tag{2.4}$$

Разложим функции A и B в ряды по степеням ε, подставим эти разложения в систему уравнений (2.4) и соберем члены при одинаковых степенях ε. После интегрирования на каждом шаге соответствующей системы уравнений и использования начальных условий получаем

$$A=\zeta+\varepsilon(\zeta c+a)+\varepsilon^2[(a_{,\theta}-b)c_{,\theta}\ln\zeta-(c_{,\theta})^2({}^1/_2\zeta\ln^2\zeta-\zeta\ln\zeta+\zeta)+e]$$

$$(2.5)$$

$$B=-\varepsilon[c_{,\theta}(\zeta\ln\zeta-\zeta)+b]+\varepsilon^2[c_{,\theta}(c+c_{,\theta\theta})(\zeta\ln\zeta-\zeta)-(a+b_{,\theta})c_{,\theta}\ln\zeta-$$
$$-c_{,\theta}c_{,\theta\theta}({}^1/_2\zeta\ln^2\zeta-\zeta\ln\zeta+\zeta)+d]$$
$$c=G^{(1)}G^{(0)-1},\quad a=-cr^*,\quad b=-c_{,\theta}r^*(\ln r^*-1)$$
$$e=-c_{,\theta}(a_{,\theta}-b)\ln r^*+(c_{,\theta})^2r^*({}^1/_2\ln^2r^*-\ln r^*+1)$$
$$d=-c_{,\theta}(c+c_{,\theta\theta})r^*(\ln r^*-1)+(a+b_{,\theta})c_{,\theta}\ln r^*+c_{,\theta}c_{,\theta\theta}r^*({}^1/_2\ln^2r^*-\ln r^*+1)$$

Из формулы (2.5) видно, что трехчленные разложения величин A и B не являются приближениями к решению при $\zeta\to\infty$, так как не выполняется условие ограниченности отношений последующего приближения к предыдущему при любом ζ [5]. Чтобы эти разложения сделать равномерно пригодными, воспользуемся методом растянутых координат и методом многих масштабов [5]. С этой целью перепишем выражения (2.5), введя под $\ln\zeta$ величину ε и используя тождественные преобразования логарифмической функции

$$A=\zeta+\varepsilon(\zeta c+a)+\varepsilon^2\{(a_{,\theta}-b)a_{,\theta}\ln\zeta+(c_{,\theta})^2[{}^1/_2\zeta\ln^2\varepsilon-\zeta\ln\varepsilon-\zeta-e-$$
$$-{}^1/_2\zeta\ln^2(\zeta\varepsilon)+2\zeta\ln(\zeta\varepsilon)]\}$$

$$(2.6)$$

$$B=-\varepsilon[c_{,\theta}(\zeta\ln\zeta-\zeta)+b]+\varepsilon^2\{c_{,\theta}(c+c_{,\theta\theta})\zeta-(a+b_{,\theta})c_{,\theta}+$$
$$+c_{,\theta}c_{,\theta\theta}\zeta[1-{}^1/_2\ln(\zeta\varepsilon)+{}^1/_2\ln\varepsilon]\}(\ln\zeta-1)+\varepsilon^2[-{}^1/_2c_{,\theta}c_{,\theta\theta}\zeta\ln\zeta-(a+b_{,\theta})c_{,\theta}+d]$$

Введем новые переменные s_1, s_2 с помощью формул

$$\zeta=s_1+\varepsilon^2\sigma_1(s_1),\quad \zeta=s_2+\varepsilon\sigma_2(s_2) \tag{2.7}$$

и подставим (2.7) в выражения (2.6). Выбирая $\sigma_1(s_1)$, $\sigma_2(s_2)$ так, чтобы разложения для A и B стали пригодными, получаем

$$A=s_1+\varepsilon(s_1c+a)+\varepsilon^2\{(a_{,\theta}-b)a_{,\theta}\ln s_1+(c_{,\theta})^2[{}^1/_2s_1\ln^2\varepsilon-s_1\ln\varepsilon-s_1-e]\},$$

$$(2.8)$$

$$B=-\varepsilon[c_{,\theta}(s_2\ln s_2-s_2)+b]+\varepsilon^2[-{}^1/_2c_{,\theta}c_{,\theta\theta}s_2\ln s_2-$$
$$-{}^1/_2c_{,\theta}c_{,\theta\theta}(s_2\ln s_2-s_2)\ln(s_2\varepsilon)-(a+b_{,\theta})c_{,\theta}+d]$$

где s_1, s_2 — корни уравнений

$$\zeta=s_1+\varepsilon^2(c_{,\theta})^2[{}^1/_2s_1\ln^2(s_1\varepsilon)-2s_1\ln(s_1\varepsilon)]$$

$$(2.9)$$

$$\zeta=s_2+\varepsilon[c_{,\theta}(c+c_{,\theta\theta})s_2+c_{,\theta}c_{,\theta\theta}s_2(1+{}^1/_2\ln\varepsilon)-(a+b_{,\theta})c_{,\theta}]$$

Из формул (2.8), (2.9) видно, что разложения для A и B являются пригодными, по крайней мере, до значений s_1, s_2 порядка $O(\varepsilon^{-1})$. Чтобы разложения A и B оставались пригодными при дальнейшем увеличении ζ, достаточно под $\ln\zeta$ последовательно вводить величины ε^n ($n=2, 3,\ldots$), т. е. последовательно изменять масштаб независимой переменной, стоящей под логарифмом.

Заметим, что в разложениях (2.8), (2.9) присутствуют члены, содержащие $\varepsilon\ln\varepsilon$, $\varepsilon^2\ln\varepsilon$, $\varepsilon^2\ln^2\varepsilon$; асимптотические последовательности с целыми степенями ε неспособны представить решение в рассматриваемом случае.

Используя прямые разложения (2.6), вычислим основные характеристики первого порядка волновых поверхностей, входящие в соотношения (1.18)—(1.22). В результате получим (приведены только отличные от нуля компоненты $g^{(1)}_{\alpha\beta}$, $b^{\alpha(1)}_{\beta}$, $x^{(1)}_{i,\alpha}$):

$$\nu^{(1)}_i=-\nu^{(0)}_{i,\theta}G^{(1)}_{,\theta}G^{(0)-1}\ln(\zeta r^{*-1}),\quad x^{(1)}_{i,\theta}=(G^{(1)}_{,\theta}\nu^{(0)}_i-$$

$$(2.10)$$

$$-G^{(1)}_{,\theta\theta}\nu^{(0)}_{i,\theta})G^{(0)-1}\zeta\ln(\zeta r^{*-1})+(G^{(1)}_{,\theta\theta}+G^{(1)})G^{(0)-1}\nu^{(0)}_{i,\theta}(\zeta-r^*)$$

$$g_{11}^{(1)}=-2G_{,\theta\theta}^{(1)}G^{(0)-1}\zeta^2\ln(\zeta r^{*-1})+2(G_{,\theta\theta}^{(1)}+G^{(1)})G^{(0)-1}\zeta(\zeta-r^*)$$

$$b_1^{1(1)}=2\Omega^{(1)},\quad 2\Omega^{(1)}=(G_{,\theta\theta}^{(1)}+G^{(1)})G^{(0)-1}\zeta^{-2}(\zeta-r^*)$$

Формулы (2.10) вместе с (1.18)—(1.22) позволяют получить для интенсивностей ударных волн следующие соотношения для квазипродольной и квазипоперечных волн соответственно:

$$\omega^{(1)}=[c^{(1)}r^{*1/2}+a_1\ln(\zeta r^{*-1})]\zeta^{-1/2}+a_2\zeta^{-3/2} \tag{2.11}$$

$$W_1^{(1)}=c^{(1)}r^{*1/2}\zeta^{1/2}+L_1(\zeta),\quad W_2^{(1)}=c^{(1)}r^{*1/2}la^*\zeta^{-1/2}+L_2(\zeta) \tag{2.12}$$

$$L_1(\zeta)=lr^{*-1/2}c^{(0)-1}A_1\zeta^{1/2}\ln(\zeta r^{*-1})+lr^{*-1/2}c^{(0)-1}A_2\zeta^{-1/2}-a^*l^2(\Delta_1^{*2})^{-1}f_1,$$

$$L_2(\zeta)=a^*\zeta^{-1}L_1(\zeta)+(\Delta_1^{*2})^{-1}\zeta^{-1}f_1$$

$$f_1=c^{(0)}r^{*1/2}[B\zeta^{1/2}+D\zeta^{-1/2}+E\zeta^{1/2}\ln(\zeta r^{*-1})]$$

$$a_1=({}^1/_2G_{,\theta\theta}^{(1)}+2G^{(1)})G^{(0)-1}r^{*1/2}c^{(0)}-\lambda_{ijkl}^{(1)}r^{*1/2}[(\nu_j^{(0)}\nu_k^{(0)}\nu_l^{(0)})_{,\theta}c^{(0)}+$$

$$+2\nu_j^{(0)}\nu_k^{(0)}\nu_l^{(0)}c_{,\theta}^{(0)}]\nu_{i,\theta}^{(0)}(\lambda+2\mu)^{-1},\quad a_2={}^1/_2G^{(0)-1}r^{*3/2}c^{(0)}(G^{(1)}+G_{,\theta\theta}^{(1)}),$$

$$A_1={}^1/_4r^*c^{(0)2}[(G^{(1)}+G_{,\theta\theta}^{(1)})(1-2l^2)+G^{(1)}(1+2l^2)]G^{(0)-1}+$$

$$+\lambda_{ijkl}^{(1)}r^*(4\mu)^{-1}\{(\nu_i^{(0)}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)}\chi_k^{(0)}lc^{(0)2})_{,\theta}-c^{(0)}\chi_i^{(0)}[(\chi_k^{(0)}c^{(0)})_{,\theta}\nu_j^{(0)}x_{l,\theta}^{(0)*}+$$

$$+(\chi_k^{(0)}\nu_l^{(0)}c^{(0)})_{,\theta}x_{j,\theta}^{(0)*}]\}$$

$$A_2={}^1/_4r^*c^{(0)2}(G^{(1)}+G_{,\theta\theta}^{(1)})G^{(0)-1}(1-2l)^2$$

величины Δ_1^{*2}, $x_{k,\theta}^{(0)*}$, в отличие от Δ_1^2, $x_{k,\theta}^{(0)}$, не содержат множителей, зависящих от ζ, $c^{(1)}$ — произвольная функция, функции $B=B(\theta)$, $D=D(\theta)$, $E=E(\theta)$ не приводятся из-за громоздкости, $\chi_k^{(0)}=l(x_{k,\theta}^{(0)*}+x_{k,z}^{(0)}a^*)$.

Ограничиваясь величинами нулевого и первого порядков малости относительно ε, запишем выражения для ω, $W^{\tau(0)}W_\tau$ в виде

$$\begin{aligned}\omega&=c^{(0)}r^{*1/2}\zeta^{-1/2}+\varepsilon[c^{(1)}r^{*1/2}\zeta^{-1/2}+a_1\zeta^{-1/2}\ln(\zeta r^{*-1})+a_2\zeta^{-3/2}]\\ W^{\tau(0)}W_\tau&=c^{(0)2}r^*\zeta^{-1}+\varepsilon[c^{(1)}r^*\zeta^{-1}+A_1\zeta^{-1}\ln(\zeta r^{*-1})+A_2\zeta^{-2}]\end{aligned} \tag{2.13}$$

Из формул (2.13) видно, что двучленные разложения для ω, $W^{\tau(0)}W_\tau$ становятся непригодными при $\zeta\to\infty$ (хотя результирующие ряды и являются сходящимися, но сходимость эта медленная, и представить решение для всех ζ конечным числом слагаемых не удается). Для получения равномерно пригодных разложений введем под $\ln\zeta$ величину ε и перейдем в (2.13) к новым переменным по формулам $\zeta=\xi_1+\varepsilon\Sigma_1(\xi_1)$, $\zeta=\xi_2+\varepsilon\Sigma_2(\xi_2)$, причем, в выражении для ω — к переменной ξ_1, а в выражении для $W^{\tau(0)}W_\tau$ — к переменной ξ_2.

Выбирая $\Sigma_1(\xi_1)$, $\Sigma_2(\xi_2)$ так, чтобы разложения для ω и $W^{\tau(0)}W_\tau$ стали пригодными, получим

$$\begin{aligned}\omega&=c^{(0)}r^{*1/2}\xi_1^{-1/2}+\varepsilon[c^{(1)}r^{*1/2}\xi_1^{-1/2}+a_2\xi_1^{-3/2}-a_1\xi_1^{-1/2}\ln\varepsilon]\\ W^{\tau(0)}W_\tau&=c^{(0)2}r^*\xi_2^{-1}+\varepsilon[c^{(1)2}r^*\xi_2^{-1}+A_2\xi_2^{-2}-A_1\xi_2^{-1}\ln\varepsilon]\end{aligned} \tag{2.14}$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнений

$$\begin{aligned}\zeta&=\xi_1+\varepsilon2\xi_1a_1r^{*-1/2}c^{(0)-1}\ln(\xi_1\varepsilon r^{*-1})\\ \zeta&=\xi_2+\varepsilon\xi_2A_1r^{*-1}c^{(0)-2}\ln(\xi_2\varepsilon r^{*-1})\end{aligned} \tag{2.15}$$

Из соотношений (2.14), (2.15) видно, что разложения для ω и $W^{\tau(0)}W_\tau$ являются пригодными, по крайней мере, до значений ξ_1, ξ_2 порядка $O(\varepsilon^{-1})$. Чтобы разложения для ω и $W^{\tau(0)}W_\tau$ оставались пригодными при дальнейшем увеличении ζ, достаточно под $\ln\zeta$ последовательно ввести ε^n ($n=2, 3, \ldots$).

Для определения произвольных функций $c_{(n)}^{(0)}$, $c_{(n)}^{(1)}$ (индекс n указывает на порядковый номер волны, а именно: индекс 3 относится к квазипродольной волне; индексы 1, 2 — к квазипоперечным волнам) зададимся сначала краевым условием (1.3).

Так как в момент удара все три волны находятся у границы полости S ($\sigma^{(0)}=0$), то их интенсивности согласно (1.5) в сумме должны давать ударную скорость на границе, т. е.

$$\sum_{n=1}^{3}[v_i]_{(n)}\,|_{\sigma^{(0)}=0}=\sum_{n=1}^{3}(\omega_{(n)}\nu_{i(n)}+W_{(n)}^{\gamma}x_{i,\gamma(n)})\,|_{\sigma^{(0)}=0}=v_i^* \tag{2.16}$$

Разлагая все величины, входящие в (2.16), по параметру ε и собирая члены при одинаковых степенях ε, имеем

$$K_i(c_{(1)}^{(0)},c_{(2)}^{(0)},c_{(3)}^{(0)})=v_i^*,\quad K_i(c_{(1)}^{(1)},c_{(2)}^{(1)},c_{(3)}^{(1)})=n_i(c_{(n)}^{(0)}) \tag{2.17}$$

$$K_i(c_{(1)},c_{(2)},c_{(3)})=c_{(3)}\nu_i^{(0)}+c_{(1)}\chi_{i(1)}^{(0)}+c_{(2)}\chi_{i(2)}^{(0)}$$

$$n_i(c_{(n)}^{(0)})=-A_{2(3)}r^{*-3/2}\nu_i^{(0)}-\lambda_{njkl}^{(1)}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)}\nu_k^{(0)}c_{(3)}^{(0)}(x_{n,\theta}^{(0)*}x_{i,\theta}^{(0)*}+$$

$$+x_{n,z}^{(0)}x_{i,z}^{(0)})(\lambda+\mu)^{-1}+\lambda_{njkl}^{(1)}\nu_i^{(0)}\nu_n^{(0)}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)}(\lambda+\mu)^{-1}(c_{(1)}^{(0)}\chi_{k(1)}^{(0)})+$$

$$+c_{(2)}^{(0)}\chi_{k(2)}^{(0)})-[L_{1(1)}(0)+L_{1(2)}(0)]x_{i,\theta}^{(0)*}r^{*-1}-[L_{2(1)}(0)+L_{2(2)}(0)]x_{i,z}^{(0)}$$

В выражениях (2.17) порядковые номера волн приписываются лишь тем величинам, которые принимают на этих волнах различные значения.

Решая уравнения (2.17), находим

$$c_{(1)}^{(0)}=\frac{v_i^*(x_{i,z}^{(0)}-a_{(2)}^{*}x_{i,\theta}^{(0)*})}{l_{(1)}(a_{(1)}^*-a_{(2)}^*)},\quad c_{(2)}^{(0)}=-\frac{v_i^*(x_{i,z}^{(0)}-a_{(1)}^{*}x_{i,\theta}^{(0)*})}{l_{(2)}(a_{(1)}^*-a_{(2)}^*)},\quad c_{(3)}^{(0)}=v_i^*\nu_i^{(0)} \tag{2.18}$$

Величины $c_{(n)}^{(1)}$ получаются из формул (2.18) путем замены v_i^* на $n_i(c_{(n)}^{(0)})$.

Если предположить, что на границе цилиндрической полости задано условие (1.4), то для определения произвольных постоянных $c_{(n)}^{(0)}$, $c_{(n)}^{(1)}$ получаем следующие системы уравнений:

$$Q_i(c_{(1)}^{(0)},c_{(2)}^{(0)},c_{(3)}^{(0)})=\sigma_i^*,\quad Q_i(c_{(1)}^{(1)},c_{(2)}^{(1)},c_{(3)}^{(1)})=m_i(c_{(n)}^{(0)}) \tag{2.19}$$

$$Q_i(c_{(1)},c_{(2)},c_{(3)})=-G_{(3)}^{(0)-1}(\lambda+2\mu)\nu_i^{(0)}c_{(3)}-G^{(0)-1}\mu(\chi_{i(1)}^{(0)}c_{(1)}+\chi_{i(2)}^{(0)}c_{(2)})$$

$$m_i(c_{(n)}^{(0)})=G_{(3)}^{(0)-1}(\lambda+2\mu)r^{*-3/2}A_{2(3)}\nu_i^{(0)}+\lambda_{njkl}^{(1)}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)}\nu_k^{(0)}(x_{n,\theta}^{(0)*}x_{i,\theta}^{(0)*}+$$

$$+x_{n,z}^{(0)}x_{i,z}^{(0)})G_{(3)}^{(0)-1}\mu(\lambda+\mu)^{-1}c_{(3)}^{(0)}-\lambda_{njkl}^{(1)}\nu_n^{(0)}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)}\nu_i^{(0)}(\chi_{k(1)}^{(0)}c_{(1)}^{(0)}+$$

$$+\chi_{k(2)}^{(0)}c_{(2)}^{(0)})(\lambda+2\mu)G^{(0)-1}(\lambda+\mu)^{-1}+G^{(0)-1}\mu[L_{1(1)}(0)+L_{1(2)}(0)]x_{i,\theta}^{(0)*}r^{*-1}+$$

$$+G^{(0)-1}\mu[L_{2(1)}(0)+L_{2(2)}(0)]x_{i,z}^{(0)}-G_{(3)}^{(1)}G_{(3)}^{(0)-2}(\lambda+2\mu)\nu_i^{(0)}c_{(3)}^{(0)}-$$

$$-G^{(0)-2}\mu(G_{(1)}^{(1)}\chi_{k(1)}^{(0)}c_{(1)}^{(0)}+G_{(2)}^{(1)}\chi_{k(2)}^{(0)}c_{(2)}^{(0)})+G_{(3)}^{(0)-1}\lambda_{ijkl}^{(1)}\nu_l^{(0)}\nu_j^{(0)}\nu_k^{(0)}c_{(3)}^{(0)}+$$

$$+G^{(0)-1}\lambda_{ijkl}^{(1)}\nu_j^{(0)}\nu_l^{(0)}(\chi_{k(1)}^{(0)}c_{(1)}^{(0)}+\chi_{k(2)}^{(0)}c_{(2)}^{(0)})$$

Решая уравнения (2.19), находим

$$
\begin{gathered}
\overset{(0)}{c}_{(1)}=\sigma_i^*(\overset{(0)}{x}_{i,z}-\overset{*}{a}_{(2)}\overset{(0)*}{x}_{i,\theta})G^{(0)}[\mu l_{(1)}(\overset{*}{a}_{(2)}-\overset{*}{a}_{(1)})]^{-1} \\
\overset{(0)}{c}_{(2)}=-\sigma_i^*(\overset{(0)}{x}_{i,z}-\overset{*}{a}_{(1)}\overset{(0)*}{x}_{i,\theta})G^{(0)}[\mu l_{(2)}(\overset{*}{a}_{(2)}-\overset{*}{a}_{(1)})]^{-1} \\
\overset{(0)}{c}_{(3)}=-\overset{(0)}{G}_{(3)}\sigma_i^*\nu_i^{(0)}(\lambda+2\mu)^{-1}
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

Величины $\overset{(1)}{c}_{(n)}$ получаются из формул (2.20) путем замены σ_i^* на $m_i(\overset{(0)}{c}_{(n)})$. Заметим, что построенные решения справедливы для случая, когда v_i^*, σ_i^* не зависят от z.

Полученные решения несколько упрощаются, если рассмотреть нормальный удар по границе цилиндрической полости, т. е. $v_i^*=v^*\nu_i^{(0)}$, $v^*=\mathrm{const}$ $(\sigma_i^*=\sigma^*\nu_i^{(0)}$, $\sigma^*=\mathrm{const})$, а также специально подобранные сдвиговые удары, а именно: $v_i^*=(\overset{(0)}{x}_{i,z}\overset{*}{a}_{(2)}+\overset{(0)*}{x}_{i,\theta})l_{(2)}v^*$, $v^*=\mathrm{const}(\sigma_i^*=(\overset{(0)}{x}_{i,z}\overset{*}{a}_{(2)}+\overset{(0)*}{x}_{i,\theta})l_{(2)}\sigma^*$, $\sigma^*=\mathrm{const})$ или $v_i^*=(\overset{(0)}{x}_{i,z}\overset{*}{a}_{(1)}+\overset{(0)*}{x}_{i,\theta})l_{(1)}v^*$, $v^*=\mathrm{const}(\sigma_i^*\cdot(\overset{(0)}{x}_{i,z}\overset{*}{a}_{(1)}+\overset{(0)*}{x}_{i,\theta})l_{(1)}\sigma^*$, $\sigma^*=\mathrm{const})$.

При нормальном ударе, как следует из формул (2.18), (2.20), $\overset{(0)}{c}_{(1)}=\overset{(0)}{c}_{(2)}=0$, $\overset{(0)}{c}_{(3)}=v^*$ $(\overset{(0)}{c}_{(1)}=\overset{(0)}{c}_{(2)}=0$, $\overset{(0)}{c}_{(3)}=-\sigma^*\overset{(0)}{G}_{(3)}(\lambda+2\mu)^{-1})$ и для квазипоперечных волн $W_1^{(1)}=c^{(1)}lr^{*1/2}\zeta^{1/2}$, $W_2^{(1)}=c^{(1)}lr^{*1/2}a^*\zeta^{-1/2}$. При специально выбранных сдвиговых ударах, как следует из формул (2.18), (2.20), $\overset{(0)}{c}_{(1)}=\overset{(0)}{c}_{(3)}=0$, $\overset{(0)}{c}_{(2)}=v^*$ $(\overset{(0)}{c}_{(1)}=\overset{(0)}{c}_{(3)}=0$, $\overset{(0)}{c}_{(2)}=-\sigma^*G^{(0)}\mu^{-1})$ или $\overset{(0)}{c}_{(2)}=\overset{(0)}{c}_{(3)}=0$, $\overset{(0)}{c}_{(1)}=v^*(\overset{(0)}{c}_{(2)}=\overset{(0)}{c}_{(3)}=0$, $\overset{(0)}{c}_{(1)}=-\sigma^*G^{(0)}\mu^{-1})$. В этом случае для квазипродольной волны $\omega^{(1)}=c^{(1)}r^{*1/2}\zeta^{-1/2}$, а для первой квазипоперечной волны (второй квазипоперечной) имеют место те же формулы, что и при нормальном ударе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Россихин Ю. А.* О влиянии слабой анизотропии на характер распространения цилиндрических и сферических ударных волн // Прикладная механика. 1981. Т. 17. № 1. С. 34–37.
2. *Россихин Ю. А.* Волны в слабо анизотропных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 160–162.
3. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
4. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
5. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
26.X.1988