**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1989**

УДК 531.383

Ю. Г. МАРТЫНЕНКО, Д. В. СЕРЕБРЯКОВ

ДИНАМИКА ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ С ПЕРЕМЕННЫМ КИНЕТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Рассматривается гироскоп в кардановом подвесе, установленный на неподвижном основании. Трение в осях подвеса отсутствует, а кинетический момент имеет малую периодическую составляющую. Уравнения движения записаны в переменных действие – угол, найдено разложение гамильтониана в ряд Фурье. При помощи критерия перекрытия резонансов оценивается область параметров, в которой возникают квазислучайные колебания оси гироскопа.

1. **Введение переменных действие — угол.** Рассмотрим астатический гироскоп в кардановом подвесе на неподвижном основании. При отсутствии сил трения в осях наружного и внутреннего кольца движения гироскопа описывается уравнениями [1]:

$$[A(\beta)\dot{\alpha}+G\sin\beta]^{\cdot}=0 \tag{1.1}$$

$$B\beta^{\cdot\cdot}-G\cos\beta\alpha^{\cdot}+(A_1+A_0-C_1)\alpha^{\cdot 2}\sin\beta\cos\beta=0$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по размерному времени t', α – угол поворота внешнего кольца относительно основания, β – угол поворота внутреннего кольца относительно внешнего, G – кинетический момент ротора относительно его оси симметрии, а величины $A(\beta)$, B соответственно равны

$$A(\beta)=A_2+(A_1+A_0)\cos^2\beta+C_1\sin^2\beta,\quad B=B_1+A_0$$

где A_2 – момент инерции внешнего кольца относительно его оси подвеса, B_1, C_1, A_1 – моменты инерции внутреннего кольца соответственно относительно оси подвеса, оси ротора гироскопа и оси перпендикулярной двум первым, A_0 – экваториальный момент инерции ротора гироскопа.

Предположим, что моменты инерции гироскопа удовлетворяют условию

$$A_1+A_0-C_1=0 \tag{1.2}$$

При выполнении условия (1.2), налагаемого на распределение масс системы, точное решение задачи при постоянном G упрощается, так как гиперэллиптические функции сводятся к эллиптическим [1].

Уравнения движения гироскопа (1.1) допускают следующий очевидный первый интеграл, выражающий сохранение кинетического момента системы относительно оси вращения наружного кольца

$$A\alpha^{\cdot}+G\sin\beta=L \tag{1.3}$$

Выражая из (1.3) угловую скорость $\alpha^{\cdot}$ и подставляя найденное значение во второе уравнение (1.1), после перехода к безразмерным переменным получим

$$\beta''=-\partial\Pi/\partial\beta,\quad \Pi=-gl\sin\beta+{}^1/_2g^2\sin^2\beta$$

$$g=G/G_0,\quad l=L/G_0 \tag{1.4}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени $t=G_0(AB)^{-1/2}t'$, G_0 — начальное значение кинетического момента ротора гироскопа.

Пусть в силу неидеальности гиромотора кинетический момент G кроме постоянной имеет малую периодическую составляющую, т. е.

$$g=1+\varepsilon \sin \nu t \tag{1.5}$$

Здесь ε — малый параметр, характеризующий глубину модуляции кинетического момента, ν — безразмерная частота.

Таким образом, при сделанных допущениях задача о движении гироскопа свелась к исследованию системы с одной степенью свободы с гамильтонианом ($y=\beta'$ — обобщенный импульс):

$$H={}^1/_2y^2-gl\sin\beta+{}^1/_2g^2\sin^2\beta \tag{1.6}$$

Когда $\varepsilon=0$ ($g=1$), рассматриваемая задача интегрируется в квадратурах [1]. В этой интегрируемой задаче перейдем к переменным действие — угол I, φ. Действие определяется интегралом

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint(2H+2l\sin\beta-\sin^2\beta)^{1/2}\,d\beta \tag{1.7}$$

который берется за полный период изменения β. Уравнение (1.7) определяет зависимость $I=I(H)$, которую можно разрешить относительно H и, следовательно, найти функцию

$$H=H_0(I) \tag{1.8}$$

При этом угол φ равен

$$\varphi=\omega(I)\int_{\beta_0}^{\beta}(2H+2l\sin\beta-\sin^2\beta)^{-1/2}\,d\beta \tag{1.9}$$

Для приведения эллиптического интеграла (1.9) при $l\neq0$ к нормальной форме сделаем замену

$$\sin\beta=(\mu t+\lambda)/(t+1)$$

$$\mu=(2l)^{-1}\{1-2H+[(1-2H)^2-4l^2]^{1/2}\},\quad \lambda=\mu^{-1} \tag{1.10}$$

После соответствующих вычислений при $H<(1-2l)/2$ из (1.9), (1.10) найдем

$$\sin\beta=\mu-\frac{\mu-\lambda}{1+h\operatorname{sn}\vartheta},\qquad h^2=\frac{\lambda-l}{\mu-l},\qquad k=\mu h \tag{1.11}$$

$$\vartheta=2(\varphi-\pi/2)\mathbf{K}(k)/\pi$$

где $\operatorname{sn}\vartheta$ — эллиптический синус, а $\mathbf{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Так как

$$\omega^{-1}=\frac{\partial I}{\partial H}=\frac{1}{2\pi}\oint(2H+2l\sin\beta-\sin^2\beta)^{-1/2}\,d\beta$$

то

$$\omega(I)={}^1/_2\pi(1-\lambda l)^{1/2}/\mathbf{K}(k) \tag{1.12}$$

Угловая скорость внутреннего кольца гироскопа есть

$$\beta'=[(\mu-\lambda)(\lambda-l)]^{1/2}\operatorname{cn}\vartheta/(1+h\operatorname{sn}\vartheta)$$

При $l=0$ и $H<{}^1/_2$ из (1.9) находим

$$\sin\beta=k\operatorname{sn}\vartheta,\ k^2=2H,\ \omega(I)={}^1/_2\pi/\mathbf{K}(k) \tag{1.13}$$

При $l=0$ величина действия определяется из (1.7):

$$I=(2/\pi)\,[\mathbf{E}(k)-(1-k^2)\mathbf{K}(k)] \tag{1.14}$$

где $\mathbf{E}(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. (Гамильтониан рассматриваемой задачи при $l=0$ с точностью до обозначений совпадает с гамильтонианом математического маятника).

2. Разложение гамильтониана в ряд Фурье и нахождения условия перекрытия резонансов. Перейдем к анализу движения гироскопа при наличии периодической составляющей в кинетическом моменте ротора. Возмущенный гамильтониан с точностью до величин порядка ε^2 имеет вид

$$H=H_0(I)+\varepsilon V(I,\ \varphi)\sin\nu t \tag{2.1}$$

$$V(I,\ \varphi)=-l\sin\beta+\sin^2\beta|_{\beta=\beta(I,\ \varphi)}$$

Действительный период эллиптической функции Якоби $\operatorname{sn}\vartheta$ равен $4\mathbf{K}$ [2, 3], поэтому функция $\sin\beta$ в (1.11), (2.1) будет периодична по переменной угол φ с периодом 2π.

Разложим функции $\sin\beta$, $V(I,\ \varphi)$ в ряд Фурье по φ на траекториях невозмущенной системы. Подставляя (1.11) в (2.1), имеем

$$V(I,\ \varphi)=\mu(\mu-l)-(\mu-\lambda)[(2\mu-l)f(\vartheta)-(\mu-\lambda)f^2(\vartheta)]$$

$$f(\vartheta)=(1+h\operatorname{sn}\vartheta)^{-1} \tag{2.2}$$

Следовательно, разложение $V(I,\ \varphi)$ в ряд Фурье сводится к разложению функций $f(\vartheta)$, $f^2(\vartheta)$. Для вещественных значений φ получаем

$$f(\vartheta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_ne^{in\varphi} \tag{2.3}$$

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+\frac{h\operatorname{sn}(2\mathbf{K}(\varphi-\pi/2))}{\pi}\right]^{-1}e^{-in\varphi}d\varphi \tag{2.4}$$

При $n=0$ согласно [1] из (2.4) получаем $f_0=\Pi(h^2,\ k)/\mathbf{K}(k)$, где $\Pi(h^2,\ k)$ есть полный эллиптический интеграл третьего рода. При $n\neq0$ интеграл (2.4) можно вычислить при помощи теории вычетов аналогично [2, 3]. Для этого на плоскости комплексной переменной φ рассмотрим прямоугольник с вершинами в точках $-\pi$, π, $\pi+\pi\tau$, $-\pi+\pi\tau$, где $\tau=i\mathbf{K}'/\mathbf{K}$, $\mathbf{K}'$ — полный эллиптический интеграл первого рода от дополнительного модуля $k'=(1-k^2)^{1/2}$. Рассмотрим интеграл вдоль выделенного прямоугольника

$$\frac{1}{2\pi}\oint fe^{-in\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}+\int_{\pi}^{\pi+\pi\tau}+\int_{\pi+\pi\tau}^{-\pi+\pi\tau}+\int_{-\pi+\pi\tau}^{-\pi}\right\}f(\vartheta)e^{-in\varphi}d\varphi \tag{2.5}$$

Интегралы вдоль боковых сторон прямоугольника от π до $\pi+\pi\tau$ и от $-\pi+\pi\tau$ до $-\pi$ взаимно погашают друг друга. Если в третьем интеграле в (2.5) сделать замену φ на $\varphi+\pi\tau$, то этот интеграл будет отличаться от интеграла (2.4) множителем $-q^{-n}$, $q=\exp(-\pi\mathbf{K}'/\mathbf{K})$. Следовательно, нахождение интеграла (2.4) сводится к подсчету суммы вычетов подынтегральной функции внутри прямоугольника. Рассматриваемая функция $f(\vartheta)e^{-in\varphi}$ внутри указанного прямоугольника имеет два простых полюса в точках $\varphi_{1,\,2}=\mp c+\pi\tau/2$:

$$c=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\mathbf{K}}\int_0^{\lambda}[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{-1/2}dx\right)$$

Следовательно, после соответствующих вычислений находим

$$f_n=-(\pi\alpha/\mathbf{K})(q^{-n/2}\sin nc/(1-q^{-n}))$$

$$\alpha=h[(1-h^2)(k^2-h^2)]^{-1/2}=(1-\lambda l)^{1/2}/(\mu-\lambda) \tag{2.6}$$

Принимая во внимание (1.12), получим окончательно

$$f(\vartheta)=f_0+\frac{4\omega}{\mu-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n/2}}{1-q^n}\sin nc\cos n\varphi \tag{2.7}$$

Разложение $\sin\beta$ в ряд Фурье будет иметь вид

$$\sin\beta=\mu-(\mu-\lambda)f_0-4\omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n/2}}{1-q^n}\sin nc\cos n\varphi \tag{2.8}$$

Разложение (2.8) определяет спектр невозмущенной системы. Частота колебаний оси гироскопа $\omega(I)$ (1.12) при изменении H от $-l^2/2$ до $(1-2l)/2$ меняется от $\omega_0=\lim_{I\to 0}\omega(I)=(1-l^2)^{1/2}$ до нуля ($\lim_{H\to(1-2l)/2}\omega(H)=0$). В окрестности сепаратрисы $q\approx\exp[-\pi\omega(1-l)^{-1/2}]$, поэтому при $\omega\to 0$ $q\to 1$ и число гармоник в разложении (2.8) возрастает. Из разложения (2.8) и асимптотической формулы для q следует, что спектр системы экспоненциально обрезается при $n>N\approx 2(1-l)^{1/2}(\pi\omega)$. Число N в последнем неравенстве естественно назвать эффективным числом гармоник в разложении (2.8). При фиксированном $\beta_0=1{,}569$ с ростом l величина N убывает. Коэффициенты разложения $\sin\beta$ в ряд Фурье при этом тоже убывают.

Разложение функции $f^2(\vartheta)$ в ряд Фурье проводится аналогично предыдущему. Отличие состоит в том, что функция $f^2(\vartheta)$ имеет в точках $\varphi_{1,2}$ полюсы второго порядка. В этом случае для подсчета вычета подынтегрального выражения приходится использовать формулу

$$\operatorname*{Res}_{\varphi=\varphi_1}\left\{\frac{e^{-in\varphi}}{(1+h\operatorname{sn}\vartheta)^2}\right\}=\lim_{\varphi\to\varphi_1}\frac{d}{d\varphi}\frac{e^{-in\varphi}(\varphi-\varphi_1)^2}{(1+h\operatorname{sn}\vartheta)^2}=$$
$$=-\{{}^1/_4 in\pi^2(\mathbf{K}h\operatorname{sn}'\vartheta)^{-2}+{}^1/_2\pi\operatorname{sn}''\vartheta[\mathbf{K}h^2(\operatorname{sn}'\vartheta)^3]^{-1}\}_{\varphi=\varphi_1}$$

Следовательно,

$$f^2(\vartheta)=\langle f^2(\vartheta)\rangle+\frac{4\omega}{\mu-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n/2}}{1-q^n}\left[\gamma\sin nc-\frac{\pi n\alpha}{2\mathbf{K}}\cos nc\right]\cos n\varphi$$

$$\gamma=(2\mu-l)/(\mu-\lambda) \tag{2.9}$$

Принимая во внимание (2.9), (2.6) после соответствующих упрощений получим из (2.2) для периодической части гамильтониана следующее выражение

$$V^1(I,\varphi)=2\omega\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n\cos n\varphi,\qquad \vartheta_n=-2\omega n\frac{q^{n/2}}{1-q^n}\cos nc \tag{2.10}$$

Следовательно, уравнения возмущенного движения оси ротора гироскопа в переменных действие — угол будут иметь вид

$$I'=\varepsilon\omega\sum_{n=1}^{\infty}n\vartheta_n[\cos(n\varphi-\nu t)-\cos(n\varphi+\nu t)],\qquad \varphi'=\omega(I)+O(\varepsilon) \tag{2.11}$$

Резонансы возникают при значениях действия I_n, для которых

$$n\omega(I_n)=\nu \tag{2.12}$$

Рассмотрим окрестность резонанса (2.12). Положим $I=I_n+\Delta I$, введем фазовую расстройку $\psi=n\varphi-\nu t$ и линеаризуем (2.11) по ΔI. Отбрасывая нерезонансные члены в (2.11), получим

$$\Delta I'=\varepsilon\nu v_n\cos\psi,\quad \psi'=n(d\omega/dI)\Delta I \tag{2.13}$$

Уравнения (2.13) совпадают с уравнениями математического маятника, поэтому ширина резонансной зоны по ΔI:

$$(\Delta I)^2=|4\varepsilon\nu v_n(nd\omega/dI)^{-1}|=4\varepsilon|v_n(d\omega/dH)^{-1}| \tag{2.14}$$

Оценим расстояние между соседними резонансами $\delta I=I_{n+1}-I_n$

$$\nu=n\omega(I_n)=(n+1)\omega(I_n+\delta I) \tag{2.15}$$

Разлагая функцию $\omega(I)$ в (2.15) в ряд по δI, находим

$$\delta I = -[(n+1)d\omega/dH]^{-1} \tag{2.16}$$

Введем параметр $\varkappa = \Delta I/\delta I$, определяющий степень перекрытия резонансов. Согласно (2.14), (2.16) в рассматриваемой задаче параметр $\varkappa$ имеет вид

$$\varkappa = 2(\nu/\omega+1)(\varepsilon|v_n d\omega/dH|)^{1/2}$$

Согласно критерию Чирикова [4] при $\varkappa \geqslant 1$ движение оси гироскопа будет носить неупорядоченный стохастический характер, а область $\varkappa \sim 1$ является границей стохастичности в пространстве параметров системы.

Результаты численного интегрирования уравнений (1.4), показывают, что при $\varepsilon=0{,}05$; $\nu=1{,}2$; $l=0{,}7$; $\beta(0)=1{,}4$ решение уравнений (1.4) напоминает случайный процесс: через интервалы времени t_1, t_2, ... система «перескакивает» из окрестности точки $\beta=\beta_0(\beta_0=\arcsin l)$ в окрестность точки $\beta=\pi-\beta_0$ по существу беспорядочным образом – в системе возникает режим хаотических колебаний, и моменты времени складывания рамок гироскопа (переход через сепаратрису) образуют как бы случайную последовательность. При указанном наборе параметров имеем: $\omega=0{,}496$; $\vartheta_2=0{,}047$; $\varkappa=1{,}32$. При нахождении $\varkappa$ величина $d\omega/dH$ вычислялась приближенно как отношение $\Delta\omega/\Delta H$. Приращение ΔH выбиралось равным $-0{,}01$ и с помощью соотношения (1.12) оценивалось приращение $\Delta\omega$.

При $l=0{,}95$; $\varepsilon=0{,}001$; $\beta(0)=1{,}4$ движение оси гироскопа носит «регулярный» характер, при этом $\varkappa=0{,}03$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климов Д. М., Харламов С. А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
3. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 516 с.
4. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию 31.X.1988