МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1989

УДК 539.3

С. К. КАНАУН, В. М. ЛЕВИН

ЭФФЕКТИВНЫЙ ВОЛНОВОЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ СРЕДЫ, АРМИРОВАННОЙ КОРОТКИМИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Рассматривается задача о распространении длинных волн в упругой среде, содержащей случайное множество жестких включений, имеющих форму вытянутых тел вращения (волокон). Сначала решается задача о рассеянии упругих волн на одном таком включении в неограниченной среде. При этом учитываются лишь главные члены разложения решения в ряд по малым параметрам задачи: отношению характерных линейных размеров включения и отношению характерных модулей упругости среды и волокна. Полученное решение используется затем при рассмотрении среды, содержащей случайное множество таких волокон. С помощью метода эффективного поля [1, 2], позволяющего учесть взаимодействие между волокнами, получено осредненное уравнение движения такой среды (эффективный волновой оператор) в длинноволновом приближении. Найдены явные выражения для скоростей распространения и коэффициентов затухания различных типов волн в средах, армированных включениями в форме цилиндров, эллипсоидов и конических веретен.

1. Рассеяние длинных волн на изолированном жестком волокне. Рассмотрим неограниченную среду с тензором упругих модулей C° и плотностью ρ_0, в которой содержится включение с тензором модулей упругости C и плотностью ρ, идеально связанное со средой по границе. Включение занимает область V, имеющую форму вытянутого тела вращения. Пусть в среде с неоднородностью распространяются гармонические колебания с частотой ω. Тогда амплитуда поля перемещений $u_i(x)$ в произвольной точке x среды удовлетворяет интегральному уравнению [3]:

$$u_i(x)=u_i^\circ(x)+C^1_{kjlm}\int\limits_V g_{ik,j}(x-x')\,\varepsilon_{lm}(x')\,dx'+\rho_1\omega^2\int\limits_V g_{ik}(x-x')\,u_k(x')\,dx'$$
$$\varepsilon_{lm}(x)=u_{(l,m)}(x),\quad C^1=C-C^\circ,\quad \rho_1=\rho-\rho_0 \tag{1.1}$$

Здесь $u_i^\circ(x)$ — «падающее» внешнее поле, которое существовало бы в среде при отсутствии включения, $g_{ik}(x)$ — тензор Грина волнового оператора для среды C°, ρ_0, который в случае ее изотропии (с коэффициентами Ляме λ_0, μ_0) определяется выражением

$$g_{ik}(x)=\frac{1}{4\pi\rho_0\omega^2}\left[\delta_{ik}\beta^2\frac{e^{i\beta|x|}}{|x|}-\partial_i\partial_k\left(\frac{e^{i\alpha|x|}}{|x|}-\frac{e^{i\beta|x|}}{|x|}\right)\right] \tag{1.2}$$
$$\alpha=\frac{\omega}{v_L},\quad \beta=\frac{\omega}{v_T},\quad v_L=\left(\frac{\lambda_0+2\mu_0}{\rho_0}\right)^{1/2}\quad v_T=\left(\frac{\mu_0}{\rho_0}\right)^{1/2}$$

Следствием (1.1) является уравнение для амплитуды тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij}(x)=\varepsilon_{ij}^\circ(x)+C^1_{klmn}\int\limits_V K_{ijkl}(x-x')\,\varepsilon_{mn}(x')\,dx'+$$
$$+\rho_1\omega^2\int\limits_V g_{k(i,j)}(x-x')\,u_k(x')\,dx' \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_{ij}^{\circ}(x)=\overset{\circ}{u}_{(i,j)}(x),\quad K_{ijkl}(x)=g_{i)(k,l)(j}(x)$$

Уравнения (1.1) и (1.3) представляют собой по существу интегральные уравнения для полей $u_i(x)$ и $\varepsilon_{ij}(x)$ внутри области V. По известным u_i и ε_{ij} внутри V поля вне V из (1.1) и (1.3) восстанавливаются однозначно.

Пусть L — длина падающей волны, а l — максимальный линейный размер включения. Если $l/L \ll 1$, то динамический тензор Грина в (1.1) и (1.3) можно разложить в ряд по степеням $\omega|x| \sim |x|/L$ $(x \in L)$ и ограничиться лишь первыми членами этого разложения (длинноволновое приближение). При этом, аналогично [2], в вещественной части тензора Грина будем пренебрегать членами порядка $(\omega|x|)$ и выше по сравнению со «статическим» тензором $g_{ik}^{\circ}(x)=\lim_{\omega\to 0} g_{ik}(x,\omega)$, а в мнимой части сохраним члены порядка до $(\omega|x|)^3$ включительно. С точностью до указанных членов выражение для $g_{ik}(x)$ принимает вид

$$g_{ik}(x)=g_{ik}^{\circ}(x)+i\omega g_{ik}^{1}-i\omega^3|x|^2\overset{3}{g}_{ik}(x),\quad g_{ik}^{1}=\frac{2+\eta^3}{4\pi\rho_0 v_T^3}\delta_{ik}$$
$$g_{ik}^{3}(x)=\frac{1}{30\rho_0 v_T^5}\left[(4+\eta^5)\delta_{ik}+2(\eta^5-1)n_i n_k\right],\quad n_i=\frac{x_i}{|x|},\quad \eta=\frac{\alpha}{\beta} \tag{1.4}$$

Будем считать, что модули упругости включения существенно больше модулей упругости среды, т. е. $C^{\circ}C^{-1}=0(\delta_0)$, где $\delta_0 \ll 1$ — малый параметр, а $\rho/\rho_0=0(1)$. Тогда последними слагаемыми в уравнениях (1.1) и (1.3) можно пренебречь, а уравнение (1.3) переписать в форме

$$\varepsilon_{ij}(x)-\int_V \overset{\circ}{K}_{ijkl}(x-x')\overset{1}{C}_{klmn}\varepsilon_{mn}(x')\,dx'+i\omega^3 H_{ijkl}\overset{1}{C}_{klmn}\int_V \varepsilon_{mn}(x)\,dx=\varepsilon_{ij}^{\circ}(x)$$
$$\overset{\circ}{K}_{ijkl}(x)=\overset{\circ}{g}_{i)(k,l)(j}(x),\quad H_{ijkl}=H_1\delta_{ij}\delta_{kl}+H_2\left(I_{ijkl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \tag{1.5}$$
$$H_1=\frac{\eta^5}{36\pi\rho_0 v_T^5},\quad H_2=\frac{3+2\eta^5}{60\pi\rho_0 v_T^5},\quad I_{ijkl}=\delta_{i(k}\delta_{l)j}$$

Введем декартову систему координат y_1, y_2, z с началом в центре включения длиною $2l$, с осью z, направленной вдоль его оси симметрии Γ. Обозначим через $a(z)$ радиус волокна и будем считать отношение $\delta_1=a/l$ малой величиной, где a — характерное значение радиуса. В дальнейшем нас будут интересовать лишь главные члены разложения упругих полей в окрестности включения в ряд по малым параметрам задачи δ_0 и δ_1. Для построения этих членов воспользуемся приемом, предложенным в [4]. Пренебрегая изменением поля $\varepsilon(x)$ по сечению волокна $(\varepsilon(x)=\varepsilon(z))$ и выполнив в (1.5) интегрирование по поперечным сечениям $s(z)$, рассмотрим полученное соотношение на оси z.

$$\varepsilon_{ij}(\zeta)-\int_{-1}^{1}\overset{\circ}{P}_{ijkl}(\zeta,\zeta')\overset{1}{C}_{klmn}\varepsilon_{mn}(\zeta')\,d\zeta'+$$
$$+i(\beta l)^3\pi H_{ijkl}\overset{1}{C}_{klmn}\int_{-1}^{1}\delta_1(\zeta)\,\varepsilon_{mn}(\zeta)\,d\zeta=\varepsilon_{ij}^{\circ}(\zeta) \tag{1.6}$$
$$\overset{\circ}{P}_{ijkl}(\zeta,\zeta')=\int_{s(\zeta')}\overset{\circ}{K}_{ijkl}[(\zeta-\zeta')m-\zeta']\,ds_{\zeta'},\quad \delta_1(\zeta)=\frac{a(\zeta)}{l}$$

где m_i — орт оси z, $\zeta=z/l$, $\zeta=y/l$. Ядро $P^{\circ}(\zeta,\zeta')$ в (1.6) можно представить в виде

$$\overset{\circ}{P}_{ijkl}(\zeta,\zeta')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_3(\zeta-\zeta')}\overset{\circ}{P}_{ijkl}(k_3,\zeta',\delta_1)\,dk_3 \tag{1.7}$$

Здесь $\overset{\circ}{P}_{ijkl}$ (k_3, ζ, δ_1) — символ интегрального оператора P°, явное выражение для которого выписано в [4]. Главные члены разложения символа в ряд по малому параметру δ_1 имеют вид

$$P^\circ(k_3,\ \zeta',\ \delta_1)=-P^\circ-(\delta_1^2\ln\delta_1)f^2(\zeta')k_3^2P^1+O(\delta_1^2) \tag{1.8}$$

$$P^\circ=\frac{1}{4\mu_0}[T^1+(1+\eta^2)T^2+2\eta^2T^4],\quad P^1=\frac{1}{8\mu_0}[(3-2\eta^2)T^1+$$
$$+4\eta^2T^2-4T^3-2(1-2\eta^2)T^4+(1-\eta^2)(2T^5+T^6)]$$

Здесь $f(\zeta)=O(1)$ — функция формы включения ($\delta_1(\zeta)=\delta_1 f(\zeta)$), а T^i — элементы тензорного базиса, образованного вектором m и двухвалентным тензором $\theta_{ij}=\delta_{ij}-m_im_j$:

$$\overset{1}{T}_{ijkl}=2\theta_{i)(k}m_{l)}m_{(j},\quad \overset{2}{T}_{ijkl}=\theta_{i(k}\theta_{l)j}-{}^1/{}_2\theta_{ij}\theta_{kl},\quad \overset{3}{T}_{ijkl}=m_im_jm_km_l$$
$$\overset{4}{T}_{ijkl}={}^1/{}_2\theta_{ij}\theta_{kl},\quad \overset{5}{T}_{ijkl}={}^1/{}_2m_im_j\theta_{kl},\quad \overset{6}{T}_{ijkl}=\theta_{ij}m_km_l \tag{1.9}$$

Аппроксимируя символ $P^\circ(k_3,\ \zeta',\ \delta_1)$ двумя первыми членами асимптотического разложения (1.8), из (1.6) и (1.7) получаем следующее уравнение для $\varepsilon(\zeta)$ (здесь и далее под произведением тензоров понимается свертка по двум индексам):

$$A^{-1}\varepsilon(\zeta)-(\delta_1^2\ln\delta_1)P^1C^1\frac{d^2}{d\zeta^2}[f^2(\zeta)\varepsilon(\zeta)]+$$
$$+i\pi\delta_1^2(\beta l)^3HC^1\int\limits_{-1}^{1}f^2(\zeta)\varepsilon(\zeta)\,d\zeta=\varepsilon^\circ(\zeta),\quad A^{-1}=I+P^\circ C^1 \tag{1.10}$$

Если перейти к новой неизвестной функции

$$\tau(\zeta)=C^1\varepsilon(\zeta),\quad \tau(\zeta)=\tau_R(\zeta)+i(\beta l)^3\tau_I(\zeta) \tag{1.11}$$

то (1.10), с учетом малости величины βl, распадается на два уравнения относительно функций $\tau_R(\zeta)$ и $\tau_I(\zeta)$:

$$\tau_R(\zeta)=C^1A\left\{\varepsilon^\circ(\zeta)+(\delta_1^2\ln\delta_1)P^1\frac{d^2}{d\zeta^2}[f^2(\zeta)\tau_R(\zeta)]\right\}$$
$$\tau_I(\zeta)=C^1A\left\{(\delta_1^2\ln\delta_1)P^1\frac{d^2}{d\zeta^2}[f^2(\zeta)\tau_I(\zeta)]-\pi\delta_1^2H\int\limits_{-1}^{1}f^2(\zeta)\tau_R(\zeta)\,d\zeta\right\} \tag{1.12}$$

Как показано в [4], решение этих уравнений представляет собой медленно изменяющуюся часть главного члена разложения упругих полей внутри волокна в ряды по малым параметрам δ_0 и δ_1. В полные же выражения для главных членов этих разложений входят еще функции типа пограничного слоя, локализованные в окрестностях концов волокна или ребер на его внешней поверхности (изломов функции $a(\zeta)$). Эти добавки существенны при анализе детальной картины распределения упругих полей в окрестности включения. В дальнейшем нас будут интересовать лишь интегральные характеристики упругих полей внутри волокна, в которые функции типа пограничного слоя дают пренебрежимо малый вклад. Поэтому ограничимся определением функций $\tau_R(\zeta)$ и $\tau_I(\zeta)$ из уравнений (1.12).

Решение системы дифференциальных уравнений (1.12) зависит от четырех произвольных постоянных. Дополнительные условия для их определения можно получить, подставив общее решение (1.12) в левую часть исходного уравнения (1.5) и минимизируя невязку с правой частью [4].

Из уравнений (1.12) следует, что функции $\tau_R(\zeta)$ и $\tau_I(\zeta)$ представляются в форме

$$(\tau_R)_{ij}(\zeta)=\tau_{Rm}(\zeta)m_im_j+(\tau_{R\theta})_{ij}(\zeta),\quad (\tau_I)_{ij}(\zeta)=\tau_{Im}(\zeta)m_im_j+O(\delta_1^2) \tag{1.13}$$

Здесь тензор $\tau_{R\theta}(\zeta)$ порядка единицы определяется выражением

$$\begin{gathered}(\tau_{R\theta})_{ij}(\zeta)=(\Lambda_{R\theta})_{ijkl}\varepsilon_{kl}{}^\circ(\zeta)+\frac{2\mu_0\nu}{\eta^2E}\tau_{Rm}(\zeta)\theta_{ij}\\ \Lambda_{R\theta}=4\mu_0T^1+\frac{4\mu_0}{1+\eta^2}T^2+\frac{2\mu_0}{\eta^2}T^4\end{gathered} \tag{1.14}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала волокна, а скалярные функции $\tau_{Rm}(\zeta)$ и $\tau_{Im}(\zeta)$, имеющие порядок δ_0^{-1} и $(\ln\delta_1)^{-1}$ соответственно, удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{d\zeta^2}[f^2(\zeta)\tau_{Rm}(\zeta)]-p^2\tau_{Rm}(\zeta)=-p^2E\varepsilon_m{}^\circ(\zeta),\quad p^2=-\frac{2\mu_0}{E\delta_1^2\ln\delta_1},\quad \varepsilon_m{}^\circ=m_im_j\varepsilon_{ij}{}^\circ\\ \frac{d^2}{d\zeta^2}[f^2(\zeta)\tau_{Im}(\zeta)]-p^2\tau_{Im}(\zeta)=-\frac{2+3\eta^5}{30\ln\delta_1}\int_{-1}^{1}f^2(\zeta)\tau_{Rm}(\zeta)d\zeta\end{gathered} \tag{1.15}$$

В длинноволновом приближении тензор $\varepsilon_{ij}{}^\circ(\zeta)$ можно считать постоянным на отрезке $[-1, 1]$. Это позволяет записать

$$\begin{gathered}\tau_R(\zeta)=\Lambda_R(\zeta)\varepsilon^\circ(\zeta),\quad \tau_I(\zeta)=\Lambda_I(\zeta)\varepsilon^\circ(\zeta)\\ \Lambda_R(\zeta)=\Lambda_{R\theta}+\lambda_R(\zeta)[T^3+3\mu_0\nu\eta^{-2}E^{-1}(2T^5+T^6)],\quad \Lambda_I(\zeta)=-\lambda_I(\zeta)T^3\end{gathered} \tag{1.16}$$

Граничные условия для системы (1.15) зависят от формы волокна [4]. Приведем вид решения этих уравнений (функции $\lambda_R(\zeta)$ и $\lambda_I(\zeta)$) в некоторых частных случаях

а) цилиндрическое волокно ($\delta_1=a/l$, $f(\zeta)=1$):

$$\lambda_R(\zeta)=\left(1-\frac{\operatorname{ch}p\zeta}{\operatorname{ch}p}\right)E,\quad \lambda_I(\zeta)=-\frac{\delta_1^2E}{30\mu_0}(2+3\eta^5)\left(1+\frac{\operatorname{th}p}{p}\right)\lambda_R(\zeta) \tag{1.17}$$

б) эллипсоидальное волокно ($\delta_1=a/l$, a, l — полуоси эллипсоида, $f(\zeta)=(1-\zeta^2)^{1/2}$

$$\lambda_R=\frac{p^2E}{2+p^2},\quad \lambda_I=\frac{2+3\eta^5}{45(2+p^2)\ln\delta_1}\lambda_R \tag{1.18}$$

в) волокно в форме остроконечного веретена ($\delta_1=a/l$, a — радиус срединного сечения, $f(\zeta)=1-|\zeta|$):

$$\begin{gathered}\lambda_R(\zeta)=\frac{p^2E}{p^2-2}\left[1-\frac{2}{2+q}(1-|\zeta|)^q\right],\quad q=\frac{1}{2}[(1+8p^2)^{1/2}-3]\\ \lambda_I(\zeta)=\frac{2+3\eta^5}{45(p^2-2)\ln\delta_1}\,\frac{q(5+q)}{(2+q)(3+q)}\lambda_R(\zeta)\end{gathered} \tag{1.19}$$

Таким образом, главный член разложения функции $\tau(\zeta)$ в ряд по малым параметрам задачи δ_0, δ_1 и βl представляется в форме

$$\tau(\zeta)=\Lambda(\zeta)\varepsilon^\circ(\zeta),\quad \Lambda(\zeta)=\Lambda_R(\zeta)-i(\beta l)^3\Lambda_I(\zeta) \tag{1.20}$$

где скалярные величины $\lambda_R(\zeta)$ и $\lambda_I(\zeta)$ для рассмотренных форм волокон определяются соотношениями (1.17)—(1.19).

Вычислим теперь главный член асимптотики полей смещений и деформаций вне включения. Поскольку ядра $\nabla g(x)$ и $K(x)$ в интегральных уравнениях (1.1) и (1.3) при $x \in V$ — гладкие ограничения функции, то на расстояниях от оси волокна, существенно превышающих его поперечный размер, в длинноволновом приближении имеем [4]:

$$u_i(x) = u_i^\circ(x) + \int\limits_\Gamma g_{ik,j}(x - mz') s(z') \tau_{kj}(z') dz' \tag{1.21}$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon_{ij}^\circ(x) + \int\limits_\Gamma K_{ijkl}(x - mz') s(z') \tau_{kl}(z') dz' \tag{1.22}$$

$$K(x - x') = K^\circ(x - x') - i\omega^3 H, \quad s(z) = \pi a^2(z)$$

где функция $g(x)$ определена формулой (1.4), а $\tau(x)$ представляет собой медленно меняющуюся часть главного члена асимптотики поля $C^1\varepsilon(x)$ внутри включения и имеет вид (1.20).

2. Эффективный волновой оператор среды со случайным множеством жестких волокон. Рассмотрим теперь упругую изотропную неограниченную среду, содержащую однородное в пространстве случайное множество коротких жестких волокон. Пусть $L(x)$ — дельта-функция, сосредоточенная на осях этих волокон

$$L(x) = \sum_i l_i(x), \quad \int l_i(x) \psi(x) dx = \int\limits_{\Gamma_i} s(z) \psi(z) dz$$

где $\psi(z)$ — произвольная гладкая функция, Γ_i — срединная линия i-го волокна.

В случае гармонических колебаний амплитуды полей смещений и деформаций в среде с волокнами с учетом лишь главных членов разложения по δ_0 и δ_1 представляются в форме, аналогичной (1.21) и (1.22)

$$u_i(x) = u_i^\circ(x) + \int g_{ik,j}(x - x') L(x') \tau_{kj}(x') dx' \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}(x) + \int K_{ijkl}(x - x') L(x') \tau_{kl}(x') dx' \tag{2.2}$$

где $\tau(x)$ — функция, совпадающая с $\tau^{(k)}(z)$ на оси Γ_k k-го волокна.

Для построения эффективного волнового оператора такой среды воспользуемся методом эффективного поля [1, 2]. Следуя основной гипотезе этого метода, будем считать, что каждое волокно находится в постоянном эффективном поле ε^*, которое складывается из внешнего поля ε° и полей, рассеянных на всех остальных волокнах. Обозначим через $\varepsilon^*(x)$ функцию, совпадающую с эффективным полем ε^* на оси каждого волокна. Как следует из (2.2), это поле можно представить в форме

$$\varepsilon_{ij}^*(x) = \varepsilon_{ij}^\circ(x) + \int K_{ijkl}(x - x') L(x, x') \tau_{kl}(x') dx' \tag{2.3}$$

Здесь через $L(x, x')$ обозначена функция, определенная соотношением

$$L(x, x') = \sum_{i \neq k} l_i(x') \quad \text{при} \quad x \in \Gamma_k$$

Если $\varepsilon^*(x)$ — известное поле, то в соответствии с гипотезами метода эффективного поля [1, 2], амплитуды смещений и деформаций в среде с волокнами представляется в виде

$$u_i(x) = u_i^\circ(x) + \int g_{ik,j}(x - x') T_{kjmn}(x') \varepsilon_{mn}^*(x') dx' \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon_{ij}^\circ(x) + \int K_{ijkl}(x - x') T_{klmn}(x') \varepsilon_{mn}^*(x') dx' \tag{2.5}$$

а само поле $\varepsilon^*(x)$ удовлетворяет уравнению $(x \in L = \bigcup\limits_i \Gamma_i)$:

$$\varepsilon_{ij}^*(x) = \varepsilon_{ij}^\circ(x) + \int K_{ijkl}(x - x') T_{klmn}(x; x') \varepsilon_{mn}^*(x') dx' \tag{2.6}$$

$$T(x) = L(x) \Lambda(x), \quad T(x; x') = L(x; x') \Lambda(x')$$

Здесь функция $\Lambda(x)$ совпадает с $\Lambda^{(k)}(\zeta)$ вида (1.20) на оси k-го волокна.

Обозначим символом $\langle\cdot|x, m\rangle$ осреднение по ансамблю реализаций случайного множества включений при условии, что точка x находится на оси волокна, имеющего ориентацию m. Выражение для среднего значения эффективного поля $\varepsilon^*(x, m)=\langle\varepsilon^*(x)|x, m\rangle$, в котором находится волокно ориентации m, получим, осреднив обе стороны (2.5) при указанных условиях. Переходя к безындексной форме записи, имеем

$$\varepsilon^*(x, m)=\varepsilon^\circ(x)+\int K(x-x')\langle T(x; x')\varepsilon^*(x')\,|x, m\rangle dx' \tag{2.7}$$

Введем гипотезу о статистической независимости поля ε^*, в котором находится волокно ориентации m, от его положения в пространстве. Тогда среднее под знаком интеграла в (2.7) представляется в виде

$$\begin{gathered}\langle T(x; x')\varepsilon^*(x')|x, m\rangle=T^*(x')\Psi_m(x-x'), \quad T^*(x)=\\ =\langle T(x)\varepsilon^*(x, m)\rangle\\ \Psi_m(x-x')=\langle s^{-1}(x')L(x; x')\,|x, m\rangle\langle s^{-1}(x)L(x)\rangle^{-1}\end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь $\Psi_m(x)$ — непрерывная функция, характеризующая пространственную корреляцию случайного множества включений. Из определения $L(x; x')$ следует: $\Psi(0)=0$, а вследствие ослабления корреляции в положении волокон с увеличением расстояния между ними $\Psi_m(x)\to1$ при $x\to\infty$. Функция $\Psi_m(x)$ определяет вид «корреляционной ямы», в которой находится типичное волокно ориентации m.

Уравнение (2.7) позволяет выразить среднее $T^*(x)$ через падающее поле $\varepsilon^\circ(x)$. Удобнее однако выразить эту величину через среднюю деформацию $\langle\varepsilon(x)\rangle$ в среде с волокнами. Осреднив обе части (2.5) по ансамблю реализаций случайного множества волокон, получим

$$\langle\varepsilon(x)\rangle=\varepsilon^\circ(x)+\int K(x-x')T^*(x')dx' \tag{2.9}$$

Исключая поле $\varepsilon^\circ(x)$ из (2.7) и (2.9), найдем

$$\begin{gathered}\varepsilon^*(x, m)=\langle\varepsilon(x)\rangle-\int K(x-x')\Phi_m(x-x')T^*(x')dx'\\ \Phi_m(x)=1-\Psi_m(x)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Поскольку $\Phi_m(x)$ — непрерывная функция, быстро стремящаяся к нулю вне области порядка размеров «корреляционной ямы», а в длинноволновом приближении изменением поля $\varepsilon^*(x, m)$ в этой области можно пренебречь, интегральное уравнение (2.10) преобразуется в алгебраическое

$$\varepsilon^*(x, m)=\langle\varepsilon(x)\rangle+P_mT^*(x); \quad P_m=-\int K(x)\Phi_m(x)dx \tag{2.11}$$

Так как $K(x)=K^\circ(x)-i\omega^3H$, где $K^\circ(x)$ и H определяются формулами (1.5), имеем

$$P_m=P_m^\circ+i\omega^3HJ, \quad P_m^\circ=-\int K^\circ(x)\Phi_m(x)dx, \quad J=\int\Phi_m(x)dx \tag{2.12}$$

Будем считать, что существует линейное преобразование $b(m)$, которое переводит функцию $\Phi_m(x)$ в сферически симметричную ($y=b(m)\cdot x$, $\Phi_m(b^{-1}\cdot y)=\Phi_m(|y|)$). При этом форму корреляционной ямы будет характеризовать эллипсоид b_m, заданный уравнением $(b(m)\cdot x)^2=1$ и имеющий полуоси b_1, b_2, b_3. Постоянный тензор P_m° в этом случае имеет ортотропную симметрию, а его компоненты выражаются через эллиптические интегралы [5]. В дальнейшем будем считать, что b_m — вытянутый сфероид с полуосями $b_1=b_2=b$ и полуосью $b_3>b$, направленной вдоль вектора m. Тогда тензор P_m° имеет вид ($\gamma=b/b_3$, $\gamma<1$):

$$\begin{gathered}P_m^\circ=\varkappa_0^{-1}\{[(1+\gamma^2)\alpha_1+(1-2\nu_0)(4\pi-\alpha_2)]T'+2[\pi^1/_4\gamma^2(1+\gamma^2)\alpha_1+\\ +(1-2\nu_0)\alpha_2]T^2+8[(1-\nu_0)(2\pi-\alpha_2)-\gamma^2\alpha_1]T^3+[4(\pi-\nu_0\alpha_2)-\end{gathered} \tag{2.13}$$

$$-\gamma^2\alpha_1]T^4+2(\alpha_1-\alpha_2)(2T^5+T^6)\},\quad \varkappa_0=16\pi\mu_0(1-\nu_0)$$

$$\alpha_1=\frac{3\alpha_2-4\pi}{1-\gamma^2},\quad \alpha_2=\frac{2\pi}{(1-\gamma^2)^{3/2}}\left((1-\gamma^2)^{1/2}-\gamma^2\operatorname{arch}\frac{1}{\gamma}\right)$$

где $T^i=T^i(m)$ — тензорный базис (1.9), ν_0 — коэффициент Пуассона основной среды.

Таким образом, форма корреляционной ямы однозначно определяется величиной параметра γ — ее аспекта. Если предположить статистическую независимость положения волокон в пространстве, то γ имеет порядок $\langle al^{-1}|m\rangle$ — среднего аспекта включения ориентации m. При этом с точностью до членов порядка γ^2 выражение (2.13) переходит в следующее

$$P_m{}^\circ=\mu_0^{-1}\{{}^1/_4T^1+{}^1/_4(1+\eta^2)T^2-(\gamma^2\ln\gamma)T^3+{}^1/_2\eta^2T^4+ \\ +{}^1/_2(1-\eta^2)(\gamma^2\ln\gamma)(2T^5+T^6)\} \tag{2.14}$$

Умножим теперь уравнение (2.11) на $T(x)$ и осредним обе его части по ансамблевым распределениям длин и ориентаций волокон. В результате придем к соотношению

$$T^*(x)=\langle T(x)\rangle\langle\varepsilon(x)\rangle+\langle T(x)P_m{}^\circ(x)\rangle T^*(x) \tag{2.15}$$

где $P_m{}^\circ(x)$ — функция, совпадающая с тензором $P_m{}^\circ$ на оси стержня ориентации m.

Разрешая уравнение (2.15) относительно $T^*(x)$ с учетом малости $(\beta l)^3$, получим

$$T^*(x)=D\langle T(x)\rangle\langle\varepsilon(x)\rangle,\quad D=D_0\{I+i[(\beta l)^3\Lambda_{IP}+ \\ +\omega^3J\Lambda_RH]D_0\},\quad D_0=(I-\Lambda_{RP})^{-1},\quad \Lambda_R=\langle L(x)\Lambda_R(x)\rangle \\ \Lambda_{RP}=\langle L(x)\Lambda_R(x)P_m{}^\circ(x)\rangle,\quad \Lambda_{IP}=\langle L(x)\Lambda_I(x)P_m{}^\circ(x)\rangle \tag{2.16}$$

Осреднив, наконец, уравнение (2.4) и воспользовавшись соотношениями (2.8) и (2.16), можем записать

$$\langle u_i(x)\rangle=u_i{}^\circ(x)+\int g_{ik,j}(x-x')D_{kjlm}\langle T_{lmrs}(x')\rangle\langle\varepsilon_{rs}(x')\rangle dx' \tag{2.17}$$

Подействуем на обе части этого уравнения оператором $L_{ik}{}^\circ=\partial_j\overset{\circ}{C}_{ijkl}\,\partial_l+$ $+\rho_0\omega^2\delta_{ik}$. Учитывая равенства $L_{ik}{}^\circ u_k{}^\circ(x)=0$, $L_{ik}{}^\circ g_{kj}(x)=\delta_{ij}\delta(x)$, найдем, что среднее поле смещений в среде с волокнами удовлетворяет уравнению

$$L_{ik}{}^*\langle u_k(x)\rangle=0,\quad L_{ik}{}^*=\partial_j\overset{*}{C}_{ijkl}\partial_l+\rho_0\omega^2\delta_{ik} \tag{2.18}$$

Здесь $\overset{*}{C}_{ijkl}$ — тензор эффективных динамических упругих модулей, определенный соотношениями

$$C^*=C_s-i\omega^3C_I,\quad C_s=C^\circ+C_R,\quad C_R=D_0\Lambda_R \\ C_I=\left(\frac{l}{v_T}\right)^3D_0(\Lambda_I+\Lambda_{IP}C_R)-JC_RHC_R \tag{2.19}$$

Таким образом, среднее волновое поле в среде с волокнами удовлетворяет уравнению, которое по виду совпадает с уравнением движения однородной среды с плотностью ρ_0 и тензором упругих модулей C^*. Действительная («статическая») его часть C_s характеризует скорость распространения упругих волн в такой среде, а наличие в нем мнимой составляющей определяет затухание волн вследствие геометрического рассеяния на неоднородностях. Перейдем к определению этих скоростей и коэффициентов затухания для конкретных стохастических моделей множества включений в изотропной среде.

3. Скорости распространения и затухание упругих волн в среде с волокнами. Пусть центры волокон образуют статистически однородное и изотропное случайное множество, а их распределение по ориентациям равномерное. В этом случае после осреднения тензоров, входящих в формулы (2.19), получим

$$C^*_{ijkl}=K^*\delta_{ij}\delta_{kl}+2\mu^*(I_{ijkl}-{}^1/_3\delta_{ij}\delta_{kl}) \tag{3.1}$$

$$k^*=k_s-i\omega^3 k_I,\quad \mu^*=\mu_s-i\omega^3\mu_I,\quad k_s=k_0+v_f k_R,\quad \mu_s=\mu_0+v_f\mu_R$$

$$K_R=\frac{5E\varphi(p)}{3[d_1(p)-5v_f d(p,\gamma)]},\quad \mu_R=\frac{E\varphi(p)}{d_2(p)-v_f(3-\eta^2)d(p,\gamma)}$$

$$k_I=K_R^2\left(\frac{\langle v^2\rangle}{v_0}H_2 d_1(p)-9v_f^2 JH_1\right),\quad \mu_I=\mu_R^2 H_2\left(\frac{\langle v^2\rangle}{v_0}d_2(p)-v_f^2 J\right)$$

В этих выражениях $v_f=\langle v\rangle/v_0$ — объемная концентрация включений (v — объем волокна, v_0 — объем, приходящийся на одно волокно в среде),

$$d(p,\ \gamma)=-\varphi(p)E\mu_0^{-1}\gamma^2\ln\gamma,\quad d_1(p)=21-16v_f-10v_f\nu\varphi(p)$$

$$d_2(p)=15-13v_f+2v_f\nu\varphi(p),\quad k_0=\lambda_0+{}^2/_3\mu_0$$

зависящая от формы волокна функция $\varphi(p)$ имеет вид

$$\varphi(p)=\begin{cases} 1-p^{-1}\operatorname{tg} p & \text{(цилиндр)}\\ p^2(2+p^2)^{-1} & \text{(эллипсоид)}\\ p^2q(5+q)[(p^2-2)(2+q)(3+q)]^{-1} & \text{(веретено)}\end{cases}$$

а величины H_1 и H_2, по-прежнему, определены в (1.15).

Таким образом, неоднородная среда макроизотропна и в ней могут распространяться продольные (L) и поперечные (T) волны с волновыми числами

$$k_L=\omega/v_L^*+i\gamma_L,\quad k_T=\omega/v_T^*+i\gamma_T \tag{3.2}$$

Здесь $v_L^*=[(k_s+{}^4/_3\mu_s)/\rho_0]^{1/2}$, $v_T^*=(\mu_s/\rho_0)^{1/2}$ — эффективные скорости распространения продольных и поперечных волн, а γ_L и γ_T — их коэффициенты затухания

$$\gamma_I=\frac{1}{2\rho_0}\left(\frac{\omega}{v_L^*}\right)^4 v_L^*\left(k_I+\frac{2}{3}\mu_I\right),\quad \gamma_T=\frac{1}{2\rho_0}\left(\frac{\omega}{v_T^*}\right)^4 v_T^*\mu_I \tag{3.3}$$

Как следует из этих формул, величины v_L^* и v_T^* не зависят от частоты, т. е. в рассматриваемом длинноволновом приближении дисперсия скорости отсутствует. Это является следствием выбора аппроксимации тензора Грина для основной среды в виде (1.4), в действительной части которого члены порядка ω^2 считались малыми по сравнению с единицей и отбрасывались. Коэффициенты затухания (3.3) пропорциональны ω^4 и, следовательно, определяют рэлеевское рассеяние волн в рассматриваемой неоднородной среде.

Пусть теперь волокна ориентированы одинаково. При этом среда с волокнами трансверсально изотропна с осью x_3, совпадающей с направлением армирования, а тензор C^* в тензорном базисе (1.9) представляется в форме

$$C^*=2\mu_s T^1+2m_s T^2+(n_s-i\omega^3 n_I)T^3+2k_s T^4+l_s(2T^5+T^6) \tag{3.4}$$

$$\mu_s=\mu_0+\frac{2v_f\mu_0}{1-v_f},\quad m_s=\mu_0+\frac{2v_f\mu_0}{(1-v_f)(1+\eta^2)},\quad n_s=\lambda_0+2\mu_0+v_f n_R$$

$$k_s=\lambda_0+\mu_0+\frac{v_f\mu_0}{(1-v_f)\eta^2},\quad l_s=\lambda_0-\frac{v_f\mu_0[v_f(1-\eta^2)d(p,\gamma)-2\nu\varphi(p)]}{\eta^2(1-v_f)(1-v_f d(p,\gamma))}$$

$$n_R=E\varphi(p)[1-v_f d(p,\ \gamma)]^{-1},\quad n_I=(\langle v^2\rangle/v_0-v_f^2 J)H_2 n_R^2$$

Пусть волновая нормаль волнового поля в среде параллельна оси симметрии материала x_3. Тогда из дисперсионного соотношения

$$\det(k_j C^*_{ijkl}k_l-\rho_0\omega^2\delta_{ik})=0 \tag{3.5}$$

следует, что в направлении армирования может распространяться продольная волна со скоростью

$$v_{L3}{}^*=v_L\left[1+\frac{v_f\eta^2E\varphi(p)}{\mu_0(1-v_fd(p,\gamma))}\right]^{1/2} \tag{3.6}$$

и коэффициентом затухания

$$\gamma_{L3}=\frac{1}{120\pi\rho_0{}^2}\left(\frac{\omega}{v_{L3}{}^*}\right)^4\frac{v_{L3}{}^*}{v_L{}^5}\left(\frac{2}{\eta^5}+3\right)\left(\frac{\langle v^2\rangle}{v_0}-v_f{}^2J\right)n_R{}^2 \tag{3.7}$$

а также незатухающая поперечная волна со скоростью

$$v_{T3}{}^*=\frac{1+v_f}{1-v_f}v_T \tag{3.8}$$

В направлении, перпендикулярном оси x_3, могут распространяться незатухающие продольная волна со скоростью

$$v_{L2}{}^*=v_L\left[1+\frac{v_f(1+3\eta^2)}{(1-v_f)(1+\eta^2)}\right]^{1/2} \tag{3.9}$$

и две поперечные волны. Одна из них (с вектором поляризации, перпендикулярным оси x_3,) имеет скорость

$$v_{T2}{}^*=v_T\left[1+\frac{2v_f}{(1-v_f)(1+\eta^2)}\right]^{1/2} \tag{3.10}$$

а скорость второй, поляризованной вдоль оси x_3, совпадает с $v_{T3}{}^*$.

Если волокна имеют одинаковые размеры, то тензор C_I, определяющий мнимую часть тензора динамических модулей упругости C^*, принимает вид

$$C_I=n_0v^2(1-n_0J)H_2n_R{}^2T^3 \tag{3.11}$$

где n_0 — числовая концентрация включений. Если к тому же центры волокон образуют правильную решетку, то $\Phi(x)$ — периодическая функция с нулевым средним значением на ячейке периодичности всюду, за исключением ячейки с центром в нуле, где $\Phi(x)\equiv1$. Поэтому интеграл J равен объему этой ячейки, т. е. $J=n_0{}^{-1}$. Отсюда и из (3.11) следует, что $C_I=0$. Таким образом, приходим к известному факту отсутствия затухания упругих волн при их распространении через периодические структуры. В рамках предложенного метода параметр $1-n_0J$ является мерой отклонения пространственного распределения включений от периодического (регулярной решетки). Область значений числовой концентрации включений, для которой полученная формула для коэффициента затухания остается физически непротиворечивой, выделяется условием $1-n_0J>0$ (ср. [7]).

Рассмотрим в заключение среду с малой концентрацией волокон ($v_f\ll 1$) одинаковых размеров и ориентации. Пусть волновая нормаль составляет угол θ с осью армирования (x_3). Используя предыдущие соотношения, можно показать, что коэффициенты затухания трех изонормальных волн (квазипродольной (1), квазипоперечной (2) и чисто поперечной (3)) представляются в виде

$$\gamma_i={}^1/_2n_0Q_i\quad(i=1,\,2,\,3) \tag{3.12}$$

где Q_1, Q_2, Q_3 — полные сечения рассеяния соответствующих волн на одном волокне. В случае абсолютно жестких волокон ($E\to\infty$, $p\to0$) выражения для Q_i оказываются одними и теми же для всех рассмотренных выше форм волокон и имеют вид

$$\begin{gathered}Q_1=\frac{4\pi}{135\eta}(\alpha l)^4l^2\frac{2+3\eta^5}{(\ln\delta_1)^2}\cos^4\theta,\quad Q_3=0\\ Q_2=\frac{4\pi}{135}(\beta l)^4l^2\frac{2+3\eta^5}{(\ln\delta_1)^2}\sin^2\theta\cos^2\theta\end{gathered} \tag{3.13}$$

Эти соотношения совпадают с главным членом асимптотики по δ_1 точных выражений для Q_i, полученных в [6], при решении задачи рассеяния длинных волн на жестком сфероиде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канаун С. К.* Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 655–665.
2. *Канаун С. К., Левин В. М.* О построении эффективного волнового оператора для среды с изолированными неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. № 5. 1984. С. 67–76.
3. *Gubernatis J. E., Domeny E., Krumhansl J. A.* Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials // J. Appl. Phys., 1977. V. 48. No. 7. P. 2804–2811.
4. *Канаун С. К.* Равновесие однородной упругой среды, армированной прямолинейным жестким стержнем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 789–800.
5. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199. № 3. С. 571–575.
6. *Willis J. R.* A polarisation approach to the scattering of elastic waves. I. Scattering by a single inclusion // J. Mech. Phys. Solids. 1980. V. 28. P. 287–305.
7. *Willis J. R.* A polarisation approach to the scattering of elastic waves. II Multiple scattering from inclusion // J. Mech. Phys. Solids. 1980. V. 28. P. 307–327.

Ленинград, Петрозаводск

Поступила в редакцию
11.II.1989