МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1989

УДК 539.3


А. А. ЛОКШИН, Е. А. САГОМОНЯН

# ФАКТОРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ, И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧАХ УПРУГОСТИ

Получено обобщение одной теоремы [1, 2] о факторизации нелинейного волнового уравнения на случай, когда правая часть уравнения является функцией времени. Получено одноволновое уравнение, описывающее распространение перемещений в плавно неоднородном стержне в случае малой квадратичной нелинейности и приведено его асимптотическое решение. Рассмотрен также случай взаимодействия малой квадратичной нелинейности и памяти, получено соответствующее уравнение для перемещений.

**1. Основная теорема.** Пусть на стержень плотности $\rho=\mathrm{const}$, определяющее уравнение которого имеет вид $\sigma=b(\varepsilon)$, действует внешняя нагрузка $F(t)$, рассчитанная на единицу длины. Уравнение для перемещений в лагранжевых координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{F(t)}{\rho} \tag{1.1}$$

*Теорема.* Каждое гладкое решение любого из уравнений (1.2), (1.3):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{\rho}\int_0^t F(t)\,dt+\mathrm{const} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{\rho}\int_0^t F(t)\,dt+\mathrm{const} \tag{1.3}$$

$$g(z)\equiv\frac{1}{\rho^{1/2}}\int_0^z (b'(z))^{1/2}\,dz+\mathrm{const} \tag{1.4}$$

является также решением уравнения (1.1).

Доказательство. Пусть, например, $u(t, x)$ является решением уравнения (1.3). Проверим, что тогда $u(t, x)$ удовлетворяет и уравнению (1.1). Подставляя $\partial u/\partial t$ из (1.3) в левую часть (1.1), последовательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho}\int_0^t F(t)\,dt+\mathrm{const}\right\}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=$$

$$=g'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{F(t)}{\rho}-\frac{1}{\rho}b'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=$$

$$=g'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left\{g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho}\int_0^t F(t)\,dt+\mathrm{const}\right\}+\frac{F(t)}{\rho}-$$

$$-\frac{1}{\rho}b'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(g'^2-\frac{b'}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(t)}{\rho}\equiv\frac{F(t)}{\rho}$$

Таким образом, мы доказали, что функция $u(t, x)$, удовлетворяющая (1.3), удовлетворяет также (1.1). Аналогично доказывается утверждение теоремы, относящееся к уравнению (1.2). Теорема доказана.

**2. Решение граничной задачи.** Будем теперь считать функцию $F(t)$ тождественно равной нулю при $t\leqslant 0$ и поставим следующую граничную задачу для уравнения (1.1):

$$u=\partial u/\partial t=0 \text{ при } x>0,\ t=0;\qquad u(t,0)=u_0(t) \tag{2.1}$$

Здесь предполагается, что $u_0(t)$ — гладкая функция, тождественно равная нулю при $t\leqslant 0$.

Из физических соображений ясно, что (до возникновения ударных волн) решение задачи (1.1), (2.1) будет иметь одноволновой характер. Следовательно, будет справедливо уравнение (1.2), соответствующее волне, распространяющейся вправо. Заметим, что в силу первого из условий (2.1) $\partial u/\partial x=\partial u/\partial t=0$ при $x>0$, $t=0$. Поэтому, полагая в (1.3) $t=0$, можно получить, что в (1.2) и (1.4) неопределенные постоянные следует положить равными нулю. Итак, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{\rho}\int_0^t F(t)\,dt,\qquad g(z)\equiv\frac{1}{\rho^{1/2}}\int_0^z (b'(z))^{1/2}\,dz \tag{2.2}$$

Задачу (2.1), (2.2) невозможно решить непосредственно методом характеристик, поскольку уравнение (2.2) не является квазилинейным. Однако метод характеристик все же удается применить к этой задаче, если переформулировать ее в терминах деформаций.

Заметим, что, полагая в уравнении (2.2) $x=0$, сразу получаем граничное условие для деформаций

$$u_0'(t)+g(\varepsilon_0(t))=\frac{1}{\rho}\int_0^t F(t)\,dt,\qquad \varepsilon_0(t)\equiv\partial u/\partial x|_{t=0} \tag{2.3}$$

Предыдущее равенство может быть переписано в эквивалентном виде

$$\varepsilon_0(t)=g^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\int_0^t F(t)\,dt-u_0(t)\right) \tag{2.4}$$

(очевидно, что $\varepsilon_0(t)=0$ при $t\leqslant 0$). Далее, из первого из соотношений (2.1) следует

$$\varepsilon=\partial\varepsilon/\partial t=0 \text{ при } x>0,\ t=0 \tag{2.5}$$

Равенства (2.4) и (2.5) представляют собой соответственно граничное и начальное условие для задачи в деформациях.

Наконец, нелинейное одноволновое уравнение, описывающее распространение деформаций, сразу получается дифференцированием уравнения (2.2) по $x$:

$$\partial\varepsilon/\partial t+(b'(\varepsilon)/\rho)^{1/2}\partial\varepsilon/\partial x=0 \tag{2.6}$$

Задача (2.4)—(2.6) легко интегрируется методом характеристик. Действительно, уравнения характеристик для (2.6) имеют вид

$$dt/dx=(\rho/b'(\varepsilon))^{1/2};\ d\varepsilon/dx=0$$

откуда, используя граничное условие для деформации, получаем

$$\varepsilon(t,x)=\varepsilon_0(\tau),\quad t=x(\rho/b'(\varepsilon_0(\tau)))^{1/2}+\tau \tag{2.7}$$

Поскольку $\varepsilon_0(t)=0$ при $t\leqslant 0$, начальные условия для деформаций будут удовлетворяться автоматически. Теперь, учитывая граничное условие для перемещений, окончательно получаем решение поставленной задачи в перемещениях

$$u(t,x)=\int_0^x \varepsilon(t,x)\,dx+u_0(t) \tag{2.8}$$

Здесь функция $\varepsilon(t, x)$ параметрически определена соотношениями (2.7). Проверим, что функция (2.8) действительно является искомым решением. Действительно, справедливость условий (2.2) очевидна, поскольку в силу сделанных предположений $u_0(0)=u_0'(0)=0$. Покажем, что функция (2.8) удовлетворяет уравнению движения (1.1). Для этого в силу теоремы из п. 1 достаточно установить, что данная функция удовлетворяет одноволновому уравнению (1.2). Имеем, дифференцируя (2.8) по $t$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_0'(t)+\int_0^x \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}dx$$

и используя для $\partial\varepsilon/\partial t$ выражение (2.6) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_0'(t)-\frac{1}{\rho^{1/2}}\int_0^x (b'(\varepsilon))^{1/2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}dx=u_0'(t)-g(\varepsilon(t,x))+g(\varepsilon_0(t))$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=u_0'(t)+g(\varepsilon_0(t))=\frac{1}{\rho}\int_0^t F(t)\,dt$$

что и требовалось установить.

**3. Случай нелинейной наследственности.** Рассмотрим нелинейный наследственно-упругий стержень плотности $\rho=\text{const}$ с определяющим соотношением вида

$$(1-\gamma R^*)\varepsilon=A\sigma+\gamma B\sigma^2 \tag{3.1}$$

Здесь $\gamma$ — малый параметр ($0<\gamma\ll 1$), $R^*$ — оператор свертки с ядром $R(t)$:

$$R^*u(t)\equiv\int_{-\infty}^t R(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

где $\varepsilon$ — деформация, $\sigma$ — напряжение. Разрешая (3.1) относительно $\sigma$ с точностью до членов порядка $O(\gamma^2)$, имеем

$$\sigma=(1-\gamma R^*)A^{-1}\varepsilon+k\gamma A^{-2}\varepsilon^2,\quad k\equiv -BA^{-1} \tag{3.2}$$

Рассмотрим уравнение волны напряжений, движущейся вправо (см. [3], а также [1]):

$$(A\rho)^{1/2}(1-k\gamma\sigma)(\partial\sigma/\partial t)+(1-{}^1\!/_2\gamma R^*)(\partial\sigma/\partial x)=0 \tag{3.3}$$

Подставляя сюда вместо $\sigma$ его выражение через $\varepsilon$ по формуле (3.2) после несложных преобразований и отбрасывая члены $O(\gamma^2)$ порядка, получим соответствующее одноволновое уравнение для деформаций в виде

$$(A\rho)^{1/2}(1+{}^1\!/_2\gamma R^*)(\partial\varepsilon/\partial t)+(\partial/\partial x)(\varepsilon+{}^1\!/_2k_1\gamma\varepsilon^2)=0,\quad k_1\equiv -BA^{-2} \tag{3.4}$$

Выведем теперь одноволновое уравнение для перемещений. Подставляя в (3.4) $\varepsilon=\partial u/\partial x$, имеем

$$(A\rho)^{1/2}(1+{}^1\!/_2\gamma R^*)(\partial/\partial t)(\partial u/\partial x)+(\partial/\partial x)\{(\partial u/\partial x)+{}^1\!/_2k_1\gamma(\partial u/\partial x)^2\}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{(A\rho)^{1/2}(1+{}^1\!/_2\gamma R^*)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+{}^1\!/_2k_1\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}=0$$

$$(A\rho)^{1/2}(1+{}^1\!/_2\gamma R^*)(\partial u/\partial t)+\partial u/\partial x+{}^1\!/_2k_1\gamma(\partial u/\partial x)^2=f(t) \tag{3.5}$$

Ясно, что если по условию задачи $u=0$ перед фронтом волны, то в (3.5) следует положить $f\equiv0$, и одноволновое уравнение для перемещений окончательно принимает вид

$$(A\rho)^{1/2}(1+{}^1/_2\gamma R^*)(\partial u/\partial t)+\partial u/\partial x+{}^1/_2k_1\gamma(\partial u/\partial x)^2=0 \tag{3.6}$$

Так как $\varepsilon=\partial u/\partial x$, то, полагая в (3.6) $x=0$, сразу получаем связь между граничным значением для перемещений $u(t,\ 0)\equiv u_0(t)$ и граничным значением для деформаций $\varepsilon(t,\ 0)\equiv\varepsilon_0(t)$

$$(A\rho)^{1/2}(1+{}^1/_2\gamma R^*)u_0'(t)+\varepsilon_0(t)+{}^1/_2k_1\gamma\varepsilon_0^2(t)=0 \tag{3.7}$$

откуда

$$\varepsilon_0(t)=\frac{-1+[1-2k_1\gamma(A\rho)^{1/2}(1+{}^1/_2\gamma R^*)u_0'(t)]^{1/2}}{k_1\gamma} \tag{3.8}$$

Перед радикалом выбран знак «плюс», поскольку именно при таком выборе знака (3.8) при $\gamma\to0$ переходит в соответствующую граничную функцию линейно-упругой задачи.

Теперь граничную задачу для деформаций можно решить методом работы [6], после чего решение исходной задачи для перемещений получим по формуле

$$u(t,x)=\int_0^x\varepsilon(t,x)\,dx+u_0(t)$$

**4. Случай плавной неоднородности.** Идея, развитая в двух предыдущих пунктах применима также в следующей ситуации. Рассмотрим нелинейный стержень плотности $\rho=\rho(\gamma x)$, $0<\gamma\ll1$ с определяющим соотношением вида $\varepsilon=A\sigma+\gamma B\sigma^2$. Разрешая это соотношение относительно $\sigma$, с точностью до $O(\gamma^2)$ имеем:

$$\sigma=A^{-1}\varepsilon+k\gamma A^{-2}\varepsilon^2,\quad k\equiv-B/A \tag{4.1}$$

Из результатов [4] (см. также [2]) следует, что одноволновое уравнение, описывающее волну напряжений, распространяющуюся вправо, таково

$$(A\rho)^{1/2}(1-k\gamma\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{\gamma\rho'}{4\rho}\sigma=0 \tag{4.2}$$

Подставляя сюда выражение для $\sigma$ через $\varepsilon$ и отбрасывая члены порядка $O(\gamma^2)$, получаем одноволновое уравнение для деформаций в виде

$$(A\rho)^{1/2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon+\frac{1}{2}k_1\gamma\varepsilon^2\right)-\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'}{\rho}\varepsilon=0,\qquad k_1\equiv\frac{B}{A^2} \tag{4.3}$$

Выведем теперь одноволновое уравнение для перемещений. Подставляя в (4.3) $\varepsilon=\partial u/\partial x$ перепишем (4.3) в виде

$$A^{1/2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{k_1\gamma}{\rho^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'}{\rho^{3/2}}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4.4}$$

Непосредственно убеждаемся, что уравнение (4.4) с точностью до членов порядка $O(\gamma^2)$ представимо в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{A^{1/2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{k_1\gamma}{\rho^{1/2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'}{\rho^{3/2}}u\right\}=0$$

откуда

$$A^{1/2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{k_1\gamma}{\rho^{1/2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'}{\rho^{3/2}}u=f(t)$$

Однако, если перед фронтом волны $u=0$, то в предыдущем уравнении следует положить $f\equiv0$, и одноволновое уравнение для перемещений окончательно принимает вид

$$(A\rho(\gamma x))^{1/2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}k_1\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'(\gamma x)}{\rho(\gamma x)}u=0 \qquad (4.5)$$

Пусть теперь задано граничное значение для перемещений $u(t, 0)\equiv\equiv u_0(t)$. Тогда граничное значение для деформаций $\varepsilon(t, 0)\equiv\varepsilon_0(t)$ вычисляется из (4.5), где следует положить $x=0$:

$$(A\rho(0))^{1/2}u_0'(t)+\varepsilon_0(t)+{}^1/_2k_1\gamma\varepsilon_0^2(t)+{}^1/_4\gamma\rho'(0)u_0(t)/\rho(0)=0 \qquad (4.6)$$

Вспомогательная граничная задача

$$\varepsilon=0 \text{ при } x>0,\ t=0;\ \varepsilon(t, 0)=\varepsilon_0(t) \qquad (4.7)$$

для уравнения (4.3) решается методом характеристик (здесь $\varepsilon_0(t)$ является корнем квадратного уравнения (4.6), причем как и в (3.8) следует выбрать знак плюс перед радикалом). Действительно, запишем уравнения характеристик для (4.3), пренебрегая членами порядка $O(\gamma^2)$:

$$\frac{dt}{dx}=(A\rho)^{1/2}(1-k_1\gamma\varepsilon),\qquad \frac{d\varepsilon}{dx}=\frac{1}{4}\frac{\gamma\rho'}{\rho}\varepsilon$$

откуда

$$\varepsilon(t, x)=\varepsilon_0(\tau)\rho^{1/4}(\gamma x)$$

$$t=\int_0^x(A\rho(\gamma x))^{1/2}(1-k_1\gamma\varepsilon_0(\tau)\rho^{1/4}(\gamma x))\,dx+\tau \qquad (4.8)$$

Здесь через $\tau$ обозначено значение $t$ при $x=0$.

Теперь решение граничной задачи для перемещений $u=0$ при $x>0$, $t=0$; $u(t, 0)=u_0(t)$ дается, как и в п. 3, формулой

$$u(t,x)=\int_0^x\varepsilon(t,x)\,dx+u_0(\tau)$$

где $\varepsilon(t, x)$ определяется параметрически уравнениями (4.8). При вычислении интенсивности возникающих в этой задаче ударных волн можно воспользоваться, например, методом работы [5].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Локшин А. А.* Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 104–108.
2. *Локшин А. А., Сагомонян Е. А.* Факторизация нелинейного волнового оператора и нелинейный аналог метода ВКБ в теории распространения упругих волн // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 95–97.
3. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. *Гринфельд М. А.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 883–898.
6. *Локшин А. А., Ицкович М. А.* Распространение нестационарных волн напряжения в наследственно-упругой среде / Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 59–60.



Москва

Поступила в редакцию 3.III.1987