

УДК 539.3

© 1989

А. Н. ГУЗЬ, Дж. А. МУСАЕВ

ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО
ДЕФОРМИРОВАННОМ НЕКРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ
НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

На основе трехмерной линеаризованной теории упругости при конечных начальных деформациях рассматривается распространение продольных волн в бесконечно длинном сплошном несжимаемом трансверсально изотропном некруговом цилиндре с произвольным упругим потенциалом, нагруженным в осевом направлении. Исследованию распространения упругих волн в предварительно напряженных телах посвящены работы [1-4].

1. Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим продольные волны, распространяющиеся вдоль оси цилиндра ox_3 . Предположим, что некруговое поперечное сечение трансверсально изотропного несжимаемого цилиндра имеет две оси симметрии (ox_1, ox_2), а ось изотропии совпадает с осью ox_3 .

Исследование выполним в лагранжевых координатах, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми. Компоненты начального состояния обозначим индексом «нуль».

Начальное состояние цилиндра, соответствующее нагружению вдоль оси ox_3 , имеет вид

$$u_n^0 = \delta_{in}(\lambda_i - 1)x_i, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^{-1/2}, \lambda_3 = \lambda \quad (1.1)$$

$$\sigma_{in}^{*0} = \sigma_{33}^{*0} \delta_{i3} \delta_{n3}, \sigma_{33}^{*0} = \text{const}$$

где u_n^0 — компоненты вектора перемещений; λ_i — коэффициент удлинения вдоль оси ox_i ; σ_{in}^{*0} — обобщенные начальные напряжения; δ_{in} — символ Кронекера.

При аналитическом (точном) методе решения задачи о распространении продольных волн в некруговом цилиндре с начальными напряжениями в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости получается дисперсионное уравнение в виде бесконечного определителя (кроме цилиндра кругового поперечного сечения). Наличие специальных функций, входящих в элементы этих определителей, приводит к значительным трудностям вычислительного характера. В связи с этим, для решения поставленных задач в работе применяется вариационный метод, предложенный в [5].

Учитывая, что мы исследуем распространение продольных волн вдоль оси цилиндра с начальными состояниями (1.1), решение задачи представим в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1(x_1, x_2) \sin(\lambda k x_3 - \omega t) \\ u_2 &= v_2(x_1, x_2) \sin(\lambda k x_3 - \omega t) \\ u_3 &= v_3(x_1, x_2) \cos(\lambda k x_3 - \omega t) \\ p &= v_4(x_1, x_2) \sin(\lambda k x_3 - \omega t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где k — волновое число; ω — круговая частота; λ — коэффициент удлинения вдоль оси ox_3 , введение которого позволяет учесть изменение размеров тела за счет начальной деформации [1].

Рассмотрим функционал [5]:

$$J(u, p) = \int_0^T \int_V \left(\frac{1}{2} \kappa_{i\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} u_{m,i} + p \lambda_m^{-1} u_{m,m} - \frac{1}{2} \rho u_m \cdot u_m \right) dv dt \quad (1.3)$$

Из вариационного уравнения

$$\delta J(u, p) = 0 \quad (1.4)$$

полученного из условия стационарности функционала (1.3), следуют линеаризованные уравнения движения, условия несжимаемости и граничные условия на свободной боковой поверхности цилиндра.

Используя (1.2), приведем вариационное уравнение (1.4) к двумерному случаю и запишем его в развернутом виде

$$\begin{aligned} & - \int_S \left\{ \left[\lambda^{-1} a_{11} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \lambda^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda^{-1} \mu_{12} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - k^2 (\lambda \mu_{13} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \lambda^2 \sigma_{33}^{*0} - \rho c^2) v_1 - \lambda^{1/2} (a_{13} + \mu_{13}) k \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \lambda^{1/2} \frac{\partial v_4}{\partial x_1} \right] \delta v_1 + \right. \\ & \quad \left. + \left[\lambda^{-1} a_{11} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \lambda^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda^{-1} \mu_{12} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} - k^2 (\lambda \mu_{13} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \lambda^2 \sigma_{33}^{*0} - \rho c^2) v_2 - \lambda^{1/2} (a_{13} + \mu_{13}) k \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \lambda^{1/2} \frac{\partial v_4}{\partial x_2} \right] \delta v_2 + \right. \\ & \quad \left. + \left[\lambda^{1/2} (a_{13} + \mu_{13}) k \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \lambda^2 \mu_{13} \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \right) - k^2 (\lambda^4 a_{33} + \lambda^2 \sigma_{33}^{*0} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \rho c^2) v_3 + k v_4 \right] \delta v_3 + \left[k v_3 - \lambda^{1/2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta v_4 \right\} dS + \\ & \quad + \int_L \left\{ \left[N_1 \left(\lambda^{-1} a_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda^{-1} a_{12} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \lambda^{1/2} a_{13} k v_3 + \lambda^{1/2} v_4 \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + N_2 \lambda^{-1} \mu_{12} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \right] \delta v_1 + \left[N_1 \lambda^{-1} \mu_{12} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + N_2 \left(\lambda^{-1} a_{11} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \lambda^{-1} a_{12} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \lambda^{1/2} a_{13} k v_3 + \lambda^{1/2} v_4 \right) \right] \delta v_2 + \left[N_1 \mu_{13} \left(\lambda^2 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \lambda^{1/2} k v_1 \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. + N_2 \mu_{13} \left(\lambda^2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \lambda^{1/2} k v_2 \right) \right] \delta v_3 \right\} dL = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где S, L — поверхность и контур поперечного сечения цилиндра в первом квадранте; $a_{nm}, \mu_{nm}, \sigma_{33}^{*0}$ определяются через упругий потенциал [1, 5]; $c = \omega/k$ — фазовая скорость продольных волн.

2. Дисперсионное уравнение. Исходя из симметрии поперечного сечения цилиндра, функции $v_n(x_1, x_2)$, входящие в решения (1.2), представим в виде

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M A_{nm} x_1^{2n+1} x_2^{2m} \\ v_2(x_1, x_2) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M B_{nm} x_1^{2n} x_2^{2m+1} \\ v_3(x_1, x_2) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M C_{nm} x_1^{2n} x_2^{2m} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$v_4(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M D_{nm} x_1^{2n} x_2^{2m} \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в вариационное уравнение (1.5), в результате обычных процедур получаем линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных коэффициентов A_{nm} , B_{nm} , C_{nm} и D_{nm} , входящих в (2.1):

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M [b_{i1}(n, m, n_1, m_1, c^2) A_{nm} + b_{i2}(n, m, n_1, m_1, c^2) B_{nm} + b_{i3}(n, m, n_1, m_1, c^2) C_{nm} + b_{i4}(n, m, n_1, m_1, c^2) D_{nm}] = 0 \quad (2.2)$$

($i=1, \dots, 4$; $n_1=0, 1, \dots, N$; $m_1=0, 1, \dots, M$)

Выражения для b_{ij} , зависящие также от формы поперечного сечения цилиндра, коэффициентов линеаризованных уравнений состояний a_{ij} , μ_{ij} , начального напряженного состояния и волнового числа k , ввиду их громоздкости здесь не приводятся. Из условия существования нетривиальных решений системы (2.2) получаем в виде определителя дисперсионное уравнение

$$\Delta(\rho c^2, k, \sigma_{33}^{*0}, \lambda, a_{ij}, \mu_{ij}) = 0 \quad (2.3)$$

описывающее продольные волны в бесконечно длинном сплошном трансверсально изотропном несжимаемом некруговом цилиндре с начальными состояниями (1.1). В результате решения уравнения (2.3) определяем фазовую скорость продольных волн.

В случае коротких волн ($ka \rightarrow \infty$, a — характерный размер поперечного сечения цилиндра) при аппроксимации (2.1) из дисперсионного уравнения (2.3) получаем

$$\rho c_{x_1}^2 = \rho c_{x_2}^2 = \lambda \mu_{13} + \lambda^2 \sigma_{33}^{*0} \quad (2.4)$$

Формула (2.4) определяет скорости распространения волн сдвига в неограниченном теле с начальными напряжениями (1.1) [1].

Задавая конкретную форму поперечного сечения цилиндра и вид упругого потенциала, из дисперсионного уравнения (2.3) можно получить ряд частных случаев.

3. Эллиптический цилиндр. Рассмотрим распространение продольных волн в предварительно деформированном цилиндре эллиптического поперечного сечения. Обозначим через a и b малый и большой полуоси эллипса в деформированном состоянии.

В этом случае коэффициенты системы уравнений (2.2) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} b_{11} &= \beta^{-1} [G_{13} k^2 a b A(1, 1) - \lambda^{-1} a_{11} l 2n(2n+1) A(1, 0)] + \\ &+ \lambda^{-1} [\mu_{12} l^{-1} 4m m_1 / (\beta - 2) + a_{11} l (2n+1)] A(0, 1) \\ b_{12} &= \lambda^{-1} \{ a_{12} (2m+1) A(0, 1) + 2n [\mu_{12} - (2m+1) (2\beta)^{-1} (a_{11} + a_{12})] A(1, 0) \} \\ b_{13} &= \lambda^2 k b [2n \beta^{-1} (a_{13} + \mu_{13}) A(1, 0) - a_{13} A(0, 1)] \\ b_{14} &= \lambda^{1/2} [A(0, 1) - 2n \beta^{-1} A(1, 0)] \\ b_{21} &= \lambda^{-1} \{ 2m \mu_{12} A(0, 1) + (2n+1) [a_{12} - m \beta^{-1} (a_{11} + a_{12})] A(1, 0) \} \\ b_{22} &= (\beta + 2)^{-1} [G_{13} k^2 a b A(2, 0) - \lambda^{-1} \mu_{12} l 2n(2n-1) A(2, -1)] + \\ &+ \lambda^{-1} [2n \mu_{12} l + \beta^{-1} a_{11} l^{-1} (2m+1) (2m_1+1)] A(1, 0) \\ b_{23} &= \lambda^2 k a [(a_{13} + \mu_{13}) \beta^{-1} 2m - a_{13}] A(1, 0) \\ b_{24} &= \lambda^{1/2} (l \beta)^{-1} (2m_1+1) A(1, 0) \\ b_{31} &= \lambda^2 k b [\mu_{13} A(0, 1) - \beta^{-1} (a_{13} + \mu_{13}) (2n+1) A(1, 0)] \\ b_{32} &= \lambda^2 k a [\mu_{13} - \beta^{-1} (a_{13} + \mu_{13}) (2m+1)] A(1, 0) \\ b_{33} &= \lambda \beta^{-1} l [(\lambda^4 a_{33} + \lambda^2 \sigma_{33}^{*0} - \rho c^2) (ka)^2 A(1, 0) + \lambda \mu_{13} (1 - \\ &- 2n) 2n A(1, -1)] + \lambda^2 \mu_{13} [2nl + 4m m_1 l^{-1} / (\beta - 2)] A(0, 0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
b_{34} &= -\lambda^{1/2} k a \beta^{-1} A(1, 0), \quad b_{44} = \lambda^{1/2} \beta^{-1} (2n+1) A(1, 0) \\
b_{42} &= \lambda^{1/2} (l\beta)^{-1} (2m+1) A(1, 0), \quad b_{43} = b_{34}, \quad b_{44} = 0 \\
\beta &= 2m+2m_1+1, \quad G_{13} = \lambda(\lambda\mu_{13} + \lambda^2\sigma_{33}^{*0} - \rho c^2), \quad l = b/a \\
A(r, q) &= {}^{1/2}\pi [2(m+m_1+r)-1]!! [2(n+n_1+q)-1]!! \{ [2(m+m_1+r) + \\
&\quad + 2(n+n_1+q)]!! \}^{-1}, \quad (m+m_1+r) > 0, \quad (n+n_1+q) > 0 \\
A(r, q) &= {}^{1/2}\pi [2(n+n_1+q)-1]!! \{ [2(n+n_1+q)]!! \}^{-1}, \quad (m+m_1+r) = 0 \\
A(r, q) &= {}^{1/2}\pi [2(m+m_1+r)-1]!! \{ [2(m+m_1+r)]!! \}^{-1}, \quad (n+n_1+q) = 0
\end{aligned}$$

Рассмотрим длинноволновое (низкочастотное) приближение ($ka < 1$). В этом случае для цилиндра эллиптического поперечного сечения применим согласно (2.1) следующую аппроксимацию

$$\begin{aligned}
v_1 &= A_{00}x_1, \quad v_2 = B_{00}x_2, \quad v_3 = D_{00} \\
v_3 &= C_{00} + C_{10}x_1^2 + C_{01}x_2^2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Учитывая (3.2) и (3.1), из дисперсионного уравнения (2.3) в длинноволновом приближении с точностью до $(ka)^2$ после ряда преобразований получаем следующее выражение для определения фазовой скорости продольных волн

$$\begin{aligned}
\rho c^2 &= \lambda^2 \sigma_{33}^{*0} + [\lambda^2 a_{33} - 2\lambda^{-1} a_{13} + {}^{1/2}(a_{11} + a_{12})\lambda^{-4}] \times \\
&\quad \times \lambda^2 [1 - {}^{1/16}(1+l^2)(ka)^2]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Заметим, что выражения (3.1) и (3.3) найдены для случая конечных (больших) начальных деформаций с учетом изменения размеров тела за счет начальной деформации. Аналогичные выражения для второго варианта теории малых начальных деформаций [1, 5], без учета изменения размеров тела за счет начальной деформации, следуют из (3.1) и (3.3) при $\lambda=1$, $\sigma_{33}^{*0} = \sigma_{33}^0$ и вычислением a_{nm} , μ_{nm} по соответствующим формулам [1, 5].

Рассмотрим закономерности влияния начальных напряжений на скорости распространения продольных волн в сплошном эллиптическом цилиндре из несжимаемого высокоэластического материала с конкретной формой упругого потенциала. Исследование проведем для тела с потенциалом Трелоара (неогуковского тела).

4. Неогуковское тело. В этом случае имеют место соотношения [5]:

$$\begin{aligned}
W^0 &= G A_1^0, \quad \sigma_{33}^{*0} = G(1-\lambda^{-3}), \quad a_{11} = 2G\lambda \\
a_{33} &= 2G\lambda^{-5}, \quad a_{12} = a_{13} = 0, \quad \mu_{12} = G\lambda, \quad \mu_{13} = G\lambda^{-2}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где W^0 — упругий потенциал, A_1^0 — первый алгебраический инвариант тензора деформаций Грина.

Учитывая (4.1), из (3.3) получаем следующую формулу для определения скорости распространения продольных волн в предварительно деформированном эллиптическом цилиндре из неогуковского материала

$$\rho c^2 / G = \lambda^2 - \lambda^{-1} + 3\lambda^{-1} [1 - {}^{1/16}(1+l^2)(ka)^2] \tag{4.2}$$

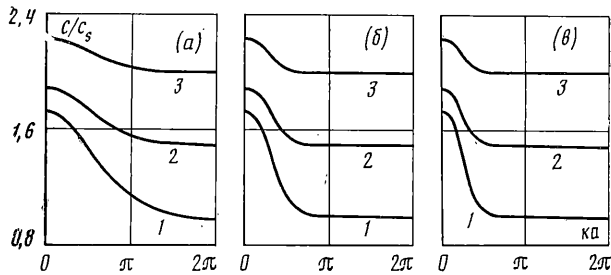
Отметим, что при $a=b$ из формулы (4.2) следует результат работы [6], полученный точным методом при длинноволновом приближении для кругового цилиндра. Это показывает высокую эффективность вариационного метода решения.

При отсутствии начальных напряжений, т. е. при $\lambda=1$, формула (4.2) принимает следующий вид

$$\rho c^2 = E [1 - {}^{1/16}(1+l^2)(ka)^2] \tag{4.3}$$

где $E=3G$ — модуль Юнга. В случае $ka=0$ из (4.3) получаем результат классической теории: $c = (E/\rho)^{1/2}$.

Для определения влияния начальных напряжений на скорости распространения продольных волн в эллиптическом цилиндре из неогуковского материала проведено численное исследование дисперсионного уравнения (2.3) с учетом (4.1) и (3.1).



Была определена первая мода продольных волн, соответствующая наименьшим положительным корням дисперсионного уравнения.

В таблице приведено сравнение значений $c/c_s = c_1, c_2, c_3$ ($c_s = (G/\rho)^{1/2}$) соответствующих количеству уравнений $R=12, 24, 40$, содержащихся в системе алгебраических уравнений (2.2), для различных ka, l в случае $\lambda=1$. Из таблицы следует, что для рассматриваемых значений параметров с достаточной степенью точности можно ограничиться исследованием определителя 24-го порядка.

На фигуре представлена зависимость c/c_s от величины ka для значений коэффициента удлинения $\lambda=1; 1,5; 2$ (соответственно кривые 1, 2, 3) и отношения полуосей эллипса $l=1, 2, 3$ (соответственно фрагменты а, б, в).

Таким образом, на основе проведенных исследований можно сделать следующие выводы. Применяемый вариационный метод исследования распространения продольных волн в предварительно напряженном некруговом цилиндре является вы-

l	ka	c_1	c_2	c_3
1	0,6283	1,6897	1,6897	1,6897
	1,8850	1,4040	1,4024	1,4024
	3,1416	1,1452	1,1451	1,1451
	5,0265	1,0231	1,0116	1,0112
	6,2832	1,0041	0,9847	0,9831
2	0,6283	1,6069	1,6066	1,6066
	1,8850	1,0692	1,0657	1,0657
	3,1416	1,0067	0,9947	0,9940
	5,0265	0,9956	0,9800	0,9767
	6,2832	0,9937	0,9724	0,9691
3	0,6283	1,4167	1,4153	1,4153
	1,8850	1,0120	1,0027	1,0024
	3,1416	0,9972	0,9837	0,9814
	5,0265	0,9947	0,9812	0,9770
	6,2832	0,9931	0,9707	0,9680

сокоэффективным, о чем свидетельствуют результаты, приведенные в таблице, а также сравнение результатов для кругового цилиндра, полученных при длинноволновом приближении, с точными и вариационными методами.

Начальные растягивающие напряжения, характеризующие коэффициентом удлинения λ , при больших значениях λ существенно увеличивают скорости распространения продольных волн в предварительно напряженном цилиндре из неогукковского материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 1. 373 с.; Т. 2. 1986. 535 с.
2. Гузь А. Н., Мусаев Дж. А. О распространении изгибных волн в некруговых цилиндрах с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 6. С. 1343-1345.
3. Мусаев Дж. А. Распространение изгибных волн в предварительно деформированном эллиптическом цилиндре из несжимаемого материала // Изв. АН АзССР. Сер. физ. техн. и мат. наук. 1984. № 3. С. 52-56.
4. Мусаев Дж. А. Изгибные волны в сжимаемом некруговом цилиндре с начальными напряжениями // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 2. С. 7-12.
5. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
6. Suhubi E. S. Small longitudinal vibration of an initially stretched circular cylinder // Intern. J. Eng. Sci. 1965. V. 2. N 5. P. 509-517.

Киев, Баку

Поступила в редакцию.
10.X.1988.