МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1989

УДК 539.3

И. А. СОЛДАТЕНКОВ

ЗАДАЧА ОБ ИЗНАШИВАНИИ ПОЛУПЛОСКОСТИ ДИСКОВЫМ КОНТРТЕЛОМ

Плоские контактные задачи при наличии износа рассматривались ранее, например, в [1–3]. Ниже приводится решение задачи об изнашивании полуплоскости вращающимся жестким диском, движущимся вдоль ее границы. Ищется стационарное в системе координат связанной с диском решение.

Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению второго рода, решение которого известно [4]. Анализ полученного решения позволяет выявить некоторые закономерности процесса изнашивания полуплоскости диском, совершающим одновременно вращательное и поступательное движения.

Рассматривается следующая постановка контактной задачи при наличии износа. Жёсткий диск радиуса R прижимается с постоянной силой Q к границе упругой полуплоскости и поступательно перемещается вдоль неё влево со скоростью V, совершая при этом вращение с угловой скоростью ω (фигура). Положительное направление вращения показано на фигуре. Скорости V и ω считаются постоянными, $V>0$.

В результате фрикционного воздействия диска на полуплоскость последняя изнашивается. Скорость линейного износа W_ξ полуплоскости в некоторой точке ξ её границы принимается пропорциональной контактному давлению p_ξ в этой точке и абсолютной величине $|\omega R-V|$ скорости скольжения диска по полуплоскости [1]:

$$\frac{d}{dt}W_\xi(t)=\alpha|\omega R-V|p_\xi(t) \tag{1}$$

Введём в рассмотрение неподвижную относительно центра диска систему координат XY, расположенную так, как это показано на фигуре. Будем искать стационарное в этой системе координат решение поставленной контактной задачи.

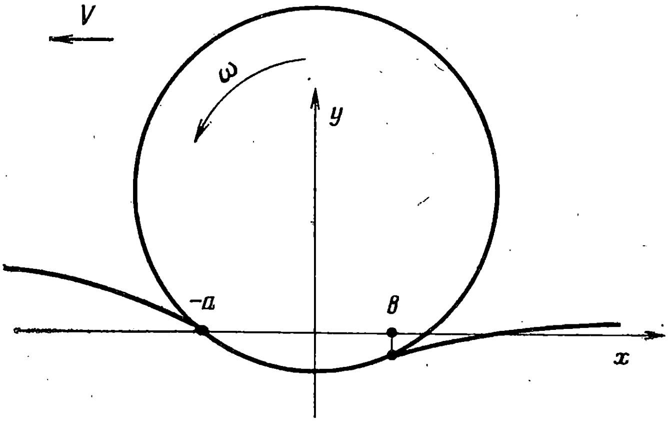
А именно. Обозначим через $W(x)$ и $p(x)$ распределения износа и контактного давления в системе координат XY. В силу предполагаемой стационарности искомого решения, распределения $W(x)$ и $p(x)$ от времени не зависят. Найдём $W(x)$ и $p(x)$.

Прежде всего установим связь $W(x)$ и $p(x)$, которая существует в силу закона износа (1). Для этого зафиксируем некоторую точку ξ границы полуплоскости, примем за начало отсчёта времени t момент входа точки ξ в область контакта и обозначим через t_x момент времени, при котором точка ξ будет иметь координату x в системе XY. Тогда, очевидно, имеют место следующие равенства:

$$t_x=(a+x)V^{-1} \tag{2}$$

$$W_\xi(t_x)=W(x),\ W_\xi(t)|_{t\leqslant 0}=W(x)|_{x\leqslant -a}=0 \tag{3}$$

$$p_\xi(t)=p(-a+Vt) \tag{4}$$



с помощью которых из (1) нетрудно получить:

$$W(x)=\int_{0}^{t_x}\alpha\,|\,\omega R-V\,|\,p(-a+V\eta)\,d\eta=\alpha\frac{|\,\omega R-V\,|}{V}\int_{-a}^{x}p(s)\,ds \tag{5}$$

Далее выпишем условие контакта диска с изнашиваемой полуплоскостью:

$$W'(x)-v'(x)=-g'(x),\quad x\in[-a,\ b] \tag{6}$$

где $v(x)$ — упругое перемещение границы полуплоскости по оси Y (в системе XY), $g(x)$ — форма контактирующей поверхности диска, которая при a и $b\ll R$ может быть представлена в виде $g(x)=(2R)^{-1}\cdot x^2$, штрих означает дифференцирование по x.

В предположении малости износа W и скорости V производную v' можно представить выражением

$$v'(x)=-\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\int_{-a}^{b}p(s)\frac{ds}{s-x}-\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\tau_{xy}(x,y)\,|_{y=0} \tag{7}$$

соответствующим статической задаче о деформировании полуплоскости [1]. В равенстве (7): E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала полуплоскости, $\tau_{xy}(x,\ y)\,|_{y=0}$ — контактное касательное напряжение, которое может быть выражено через контактное давление согласно закону Амонтона — Кулона $\tau_{xy}(x,\ y)\,|_{y=0}=\mathrm{sgn}(\omega R-V)(fp(x)+\tau_0)$, где f — коэффициент трения скольжения, τ_0 — адгезионная составляющая трения.

Исключая из (6) с помощью равенств (5), (7) функции $W(x)$ и $v(x)$, придёт к уравнению для $p(x)$:

$$mp(x)+n\int_{-a}^{b}p(s)\frac{ds}{s-x}=F(x) \tag{8}$$

$$F(x)=-g'(x)-\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\tau_0\,\mathrm{sgn}(\omega R-V) \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}f\,\mathrm{sgn}(\omega R-V)+\frac{\alpha}{V}\,|\,\omega R-V\,| \\ n&=2(1-\nu^2)(\pi E)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Кроме того, имеет место условие равновесия:

$$Q=\int_{-a}^{b}p(x)\,dx \tag{11}$$

Решение $p(x)$ уравнения (8) нетрудно получить, если воспользоваться методикой, изложенной в [4]. Предполагая, что функция $p(x)$ принадлежит классу Гёльдера на $[-b, a]$ и ограничена на концах области контакта, будем иметь:

$$p(x) = \frac{m}{m^2+(\pi n)^2} F(x) - \frac{n}{m^2+(\pi n)^2} (a+x)^{1/2-\theta} (b-x)^{1/2+\theta} \times$$

$$\times \int_{-a}^{b} \frac{F(s)\,ds}{(a+s)^{1/2-\theta}(b-x)^{1/2+\theta}(s-x)}, \quad x \in [-a, b] \tag{12}$$

при условии:

$$\int_{-a}^{b} \frac{F(x)\,dx}{(a+x)^{1/2-\theta}(b-x)^{1/2+\theta}} = 0 \tag{13}$$

$$\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{m}{\pi n}, \quad -\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2} \tag{14}$$

С учётом выражений (9) и $g'(x) = x/R$, равенства (12) и (13) примут вид:

$$p(x) = \left(Rm \sqrt{1+\left(\pi \frac{n}{m}\right)^2} \right)^{-1} (a+x)^{1/2-\theta} (b-x)^{1/2+\theta} \tag{15}$$

$$\frac{a-b}{2} = \theta(a+b) + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} R\tau_0 \operatorname{sgn}(\omega R - V) \tag{16}$$

В свою очередь, равенство (11) с помощью выражения (15) будет иметь вид:

$$(a+b)^2 = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{QR}{(1/4-\theta^2)} \tag{17}$$

Равенства (15)—(17) полностью определяют распределение контактного давления $p(x)$. Путём интегрирования выражения (15) согласно соотношению (5), находится распределение износа $W(x)$. В общем случае $W(x)$ выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса [5].

Проанализируем полученные выражения (15)—(17) и рассмотрим некоторые случаи.

Прежде всего заметим, что решение (15)—(17) при отсутствии износа ($\alpha=0$) и $\omega=0$ в точности совпадает с полученным в [3] решением контактной задачи для параболического штампа с трением.

Наличие износа влияет как на эпюру контактного давления $p(x)$, так и на расположение области контакта. В частности, как это следует из (10), (14), (16) и (17), износ вызывает смещение центра области контакта в направлении поступательного перемещения диска (против оси X), компенсируя тем самым смещение центра области контакта обусловленное силами трения при $\omega R - V < 0$ и усиливая это смещение при $\omega R - V > 0$.

Интересным представляется случай $\omega R/V = 1 - (1-2\nu)(1+\nu)f/(E\alpha)$, при $\omega R/V < 1$, когда, в силу (10), $m=0$, и следовательно, $\theta=0$. Контактное давление в этом случае имеет такой же вид, как и при взаимодействии параболического штампа с полуплоскостью без трения и износа [1], за тем исключением, что центр эпюры смещён на величину $(1-2\nu)\cdot(1+\nu)R\tau_0/E$ против направления поступательного перемещения диска (в направлении оси X). Соответствующее распределение износа $W(x)$ согласно (5) имеет вид:

$$W(x) = \frac{\alpha|\omega R - V|E}{2RV(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2}\left(x - \frac{b-a}{2} \right) \sqrt{(a+x)(b-x)} + \right.$$

$$+\frac{(a+b)^2}{8}\left[\arcsin\left(2\frac{x+a}{a+b}-1\right)+\frac{\pi}{2}\right]\Bigg\}$$

Наконец заметим, что при отсутствии вращения диска ($\omega=0$) решение (15)–(17) не зависит от скорости V поступательного перемещения диска.

Полученное решение может быть использовано для анализа процесса обработки материала абразивным инструментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 184 с.
2. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Математические методы в контактных задачах с износом // В кн.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела.– М.: Наука, 1984. С. 77–89.
3. *Горячева И. Г., Добычин М. Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1989