МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1989

УДК 539.375

Л. Г. КОЛТОН

МЕДЛЕННЫЙ РОСТ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН

Рассматривается квазистатическое развитие системы прямолинейных трещин в плоском упругом теле под действием медленно меняющихся внешних нагрузок. Доказано, что при отсутствии лавинообразного роста трещин, критерии статической механики хрупкого разрушения позволяют определить скорости роста трещин. Исследованы условия, при которых скорости определены однозначно. Показано, что устойчивый рост (по отношению к малому возмущению длин трещин) обеспечивается при торможении части трещин. Для энергетического критерия разрушения Гриффитса и для периодических систем трещин эта задача рассматривалась в [1–3]. Близкие вопросы изучались в [4–7].

1. Постановка задачи. Пусть в плоском теле под действием внешних сил, зависящих от параметра нагружения τ, развивается n прямолинейных краевых трещин. Текущее положение трещин задается вектором их длин l. Предположим, что изменение нагрузок и рост трещин происходит достаточно медленно, так что динамическими эффектами можно пренебречь.

Развитие трещин рассматривается в рамках механики хрупкого разрушения: считается, что i-я трещина не растет, если параметр разрушения в ее вершине K_i не достиг критического значения $2\gamma_i$. Не рассматривается усталостный рост трещин, при изучении которого предполагают, в частности, что трещина может расти и при параметрах разрушения, меньших критического.

В зависимости от используемого критерия разрушения в качестве параметров K_i могут быть взяты коэффициенты интенсивности напряжений K_1, K_2 (силовой критерий), производная энергии по длине трещины — $\partial W/\partial l_i$ (критерий Гриффитса) и другие [8]. В общем случае параметры разрушения $K_i(l(\tau), \tau)$ определяются полем перемещений при текущих длинах l и параметре нагружения τ.

Будем говорить, что $l(\tau)$ является траекторией медленного роста трещин (или просто траекторией), если при всех τ существует правосторонняя производная $l^\cdot(\tau)=dl/d\tau$ и выполнены соотношения

$$\begin{gathered} K_i(l(\tau), \tau)<2\gamma_i,\ l_i^\cdot(\tau)=0 \\ K_i(l(\tau), \tau)=2\gamma_i,\ l_i^\cdot(\tau)\geqslant 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

Неотрицательность $l_i^\cdot$ следует из физически очевидного условия незарастания трещин.

Предположим, что параметры разрушения K_i непрерывно дифференцируемы по l и τ. Обозначим матрицу $A(l, \tau)=-\|\partial K_i/\partial l_j\|$ и вектор $f(l, \tau)=\{\partial K_i/\partial\tau\}$ $(i, j=1, \ldots, n)$. На траектории существуют полные односторонние производные по параметру τ:

$$dK/d\tau=-Al^\cdot+f,\ K=\{K_i\}\ (i=1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что на траектории медленного роста трещин выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered} K_i(l(\tau), \tau)<2\gamma_i,\ l_i^\cdot=0,\ K_i(l(\tau), \tau)=2\gamma_i \\ (A(l(\tau), \tau)\ l^\cdot(\tau)-f(l(\tau), \tau))_i>0,\ l_i^\cdot(\tau)=0 \\ (A(l(\tau), \tau)l^\cdot(\tau)-f(l(\tau), \tau))_i=0,\ l_i^\cdot(\tau)\geqslant 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Если параметр разрушения K_i в одной или нескольких трещинах превосходит критическое значение $2\gamma_i$, то происходит лавинообразный рост трещин, описать который в рамках статической механики разрушения, видимо, невозможно. Однако можно найти такие значения длин трещин l^* и параметра нагружения τ^*, при которых $K_i(l^*, \tau^*)\leqslant 2\gamma_i$ $(i=1, \ldots, n)$ и начинается лавинообразное развитие трещин. Считаем, что при лавинообразном развитии трещины растут столь быстро, что можно пренебречь изменением τ^* и l^*. Длины трещин на начальном этапе лавинообразного роста изменяются по закону $l\approx l^*+t\cdot\xi$ где $t\geqslant 0$ «быстрое время», $\xi=\{\xi_i\}$ $(i=1, \ldots, n)$ — вектор производных от длин трещин по t.

Рассмотрим следующие условия лавинообразного роста трещин:

1. Лавинообразный рост начинается, если возможен рост трещин, в которых достигнуто предельное значение параметров разрушения, без изменения внешней нагрузки, причем в растущих трещинах параметры разрушения принимают значения большие или равные критическим, а в стоящих — не превосходящие критических. Сформулируем это в виде условия 1: существует вектор $\xi=\{\xi_i\}$, $\xi_i\geqslant 0$ $(i=1, \ldots, n)$ такой, что если $K_i<2\gamma_i$, то $\xi_i=0$; при $K_i=2\gamma_i$ либо $\xi_i>0$ и $(A\xi)_i\leqslant 0$, либо $\xi_i=0$ и $(A\xi)_i\geqslant 0$.

2. Если предположить, что при лавинообразном росте трещин дополнительно к условию 1 требуется, чтобы скорости трещин ξ_i были пропорциональны изменению параметров разрушения, то условие начала лавинообразного роста трещин записывается в следующей форме. Условие 2: существует вектор $\xi=\{\xi_i\}$, $\xi_i\geqslant 0$ $(i=1, \ldots, n)$ и число $\lambda\geqslant 0$ такие, что, если $K_i<2\gamma_i$, то $\xi_i=0$; при $K_i=2\gamma_i$ либо $\xi_i>0$ и $(A\xi)_i=-\lambda\xi_i$, либо $\xi_i=0$ и $(A\xi)_i\geqslant$ $\geqslant 0$.

3. При применении критерия Гриффитса $K_i=-\partial W/\partial l_i$ обычно предполагают [1—7], что лавинообразный рост трещин начинается, если возможен рост трещин, сопровождающийся выделением энергии без изменения внешней нагрузки. При начале лавинообразного роста полная энергия $W^\vee$ (учитывая поверхностную энергию, потраченную на образование трещин) равна

$$W^\vee=W^\vee(l^*, \tau^*)+\sum_{i=1}^{n}(2\gamma_i-K_i)\xi_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial l_i\,\partial l_j}\xi_i\xi_j+\ldots$$

Поскольку линейный член обращается в нуль, то главный член изменения энергии определяется квадратичной формой $(A\xi, \xi)=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial^2W/$ $/dl_idl_j$. Условие 3 сформулируем в виде : лавинообразный рост трещин начинается, если существует вектор $\xi=\{\xi_i\}$, $\xi\neq 0$, $\xi_i\geqslant 0$, $\xi_i=0$ при $K_i<2\gamma_i$ такой, что $(A\xi, \xi)\leqslant 0$. Формально условие 3 может применяться независимо от критерия Гриффитса.

Отметим, что при выполнении условия 2 выполняются условия 1 и 3, т. е. если лавинообразный рост трещин невозможен в смысле условия 1 или 3, то он невозможен и в смысле условия 2. Обратное неверно, однако, если матрица A симметрична (например, при использовании критерия Гриффитса), то из условия 3 следует, что существует $\min(A\xi, \xi)$ при $|\xi|=$ $=1$, $\xi_i\geqslant 0$. Вектор ξ^*, на котором достигается этот минимум, по теореме Куна — Таккера [9] удовлетворяет условию 2.

2. Определение скоростей роста трещин. Введем множества $N=\{1,\ldots$ $\ldots, n\}$, $I=\{i\in N|K_i=2\gamma_i\}$, J_1, $J_0\subseteq N$, векторы $l_J^{\boldsymbol{\cdot}}=\{l_i^{\boldsymbol{\cdot}}\}$, $f_J=\{f_i\}$, $\xi_J=\{\xi_i\}$, $K_J=\{K_i\}$ $(i\in J)$, матрицы $A_{JJ_1}=\|A_{ij}\|$, $(i\in J,\ j\in J_1)$ и конусы $V_J=\{\xi_J|\xi_i\geqslant 0,$ $i\in J\}$. Тогда (1.3) эквивалентно вариационному неравенству

$$(A_{II}l_I^{\boldsymbol{\cdot}}-f_I,\ \xi_I-l_I^{\boldsymbol{\cdot}})\geqslant 0\ \ (l_I^{\boldsymbol{\cdot}}\in V_I,\ \forall\xi_i\in V_I) \tag{2.1}$$

и условию $l_i^{\boldsymbol{\cdot}}=0$, $i\in N\backslash I$. Исследуем свойства неравенства (2.1).

Лемма 1. Пусть однородное вариационное неравенство

$$(A_{II}\xi_I^\circ,\ \xi_I-\xi_I^\circ)\geqslant 0\ \ (\xi_I^\circ\in V_I,\ \forall\xi_I\in V_I) \tag{2.2}$$

имеет единственное решение $\xi_I^\circ=0$. Тогда множество решений неравенства (2.1) ограничено.

Для доказательства предположим, что существуют $\xi_I^{(i)}$ решения (2.1) такие, что $|\xi_I^{(i)}|\to\infty$ при $i\to\infty$. Выберем подпоследовательность $\xi_I^{(j)}$ так, чтобы существовал вектор $\xi_I^\circ=\lim_{j\to\infty}(\xi_I^{(j)}/|\xi_I^{(j)}|)$. Переходя в (2.1) к пределу, получаем, что ξ_I° является решением (2.2), $|\xi_I^\circ|=1$.

Рассмотрим отображение $S(A_{II},f_I)\xi_I=u_I$ [10], зависящее от A_{II} и f_I, действующее по правилу

$$(u_I,v_I-u_I)+(A_{II}\xi_I-\xi_I-f_I,v_I-u_I)\geqslant 0\ (u_I\in V_I,\ \forall v_I\in V_I)$$

Решения вариационного неравенства (2.1) являются неподвижными точками рассматриваемого отображения: $S_{II}(A_{II},f_I)l_I^\bullet=l_I^\bullet$.

Лемма 2. Пусть существует непрерывная матрица — функция $B_{II}(t)$ такая, что $B_{II}(0)=A_{II}$, $B_{II}(1)=E$ (E — единичная матрица) и при любом $t\in[0,1]$ неравенство

$$(B_{II}(t)\xi_I^\circ,\ \xi_I-\xi_I^\circ)\geqslant 0\ (\xi_I^\circ\in V_I,\ \forall\xi_I\in V_I) \tag{2.3}$$

имеет единственное решение $\xi_I^\circ=0$. Пусть все решения вариационного неравенства (2.1) по модулю меньше R (см. лемму 1). Тогда степень отображения $E-S(A_{II},f_I)$ на сфере радиуса R [11] есть $\Gamma(A_{II},f_I)=1$.

Отображение $S(A_{II},(1-2t)f_I)\xi$, $t\in[0,1/2]$ не имеет неподвижной точки на сфере радиуса R в силу ограниченности решений (2.1), а отображение $S(2(t-1/2)B_{II},0)\xi$, $t\in[1/2,1]$ — по условию (2.3). Тем самым построена гомотопия между $S(A_{II},f_I)$ и $S(E,0)=E$ и, следовательно [11], доказано утверждение леммы.

Теорема 1. Если не выполнено условие 2 начала лавинообразного роста трещин, то существует решение вариационного неравенства (2.1).

Для доказательства теоремы заметим, что при $B_{II}=tE+(1-t)A_{II}$ выполнены условия леммы 2, откуда по теореме Брауэра [11] следует утверждение теоремы.

Каждое решение неравенства (2.1) удовлетворяет условиям

$$A_{J_0J_0}l_{J_0}^\bullet=f_{J_0},\quad A_{J_1J_0}l_{J_0}^\bullet\geqslant f_{J_1},\quad l_{J_1}^\bullet=0 \tag{2.4}$$

где $J_0\equiv J_0(l_I)=\{i\in I|l_i^\bullet>0\}$, $J_1=I\backslash J_0$. Следовательно, если все главные миноры матрицы A_{II} не вырождены, то неравенство (2.1) имеет конечное число решений. Для определения количества решений вычислим индекс каждого решения.

Лемма 3. Пусть $l_I^\bullet$ изолированная неподвижная точка отображения $S(A_{II},f_I)$, минор $A_{J_0J_0}$ не вырожден, во втором условии (2.4) имеет место строгое неравенство. Тогда индекс неподвижной точки есть

$$\gamma(l_I^\bullet)=\operatorname{sign}(\det A_{J_0J_0}) \tag{2.5}$$

В достаточно малой окрестности точки $l_I^\bullet$:

$$\xi_I-S(A_{II},f_I)\xi_I=C_{II}(\xi_I-l_I^\bullet),\qquad C_{II}=\begin{Vmatrix}A_{J_0J_0} & A_{J_0J_1}\\ 0 & E\end{Vmatrix}$$

следовательно [11], индекс неподвижной точки есть $\gamma(l_I^\bullet)=\operatorname{sign}(\det C_{II})$.

Решения неравенства (2.1), удовлетворяющие условиям Леммы 3, будем называть регулярными. Если $l_I^\bullet$ не является регулярным решением (2.1), но все главные миноры A_{II} не вырождены, то для вычисления $\gamma(l_I^\bullet)$ можно рассмотреть отображение $S(A_{II},f_I+\delta_I)$ при этом δ_I выбрать так, чтобы: в некоторой окрестности $l_I^\bullet$ все неподвижные точки $S(A_{II},f_I+\delta_I)$ были регулярными; в этой окрестности отображение $S(A_{II},f_I)$ имело единственную неподвижную точку $l_I^\bullet$, а отображение $S(A_{II},f_I+\delta_I)$ не менее одной неподвижной точки; на границе этой окрестности не существовало неподвижных точек отображения $S(A_{II},f_I+t\delta_I)$ при $t\in[0,1]$. Тогда индекс $\gamma(l_I^\bullet)$ будет равен сумме индексов регулярных неподвижных точек отображения $S(A_{II},f_I+\delta_I)$, расположенных в этой окрестности.

Так как сумма индексов неподвижных точек равна степени отображения, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть не выполнено условие 2 начала лавинообразного роста. Если $\det A_{JJ}>0$ $\forall J\subset I$, то неравенство (2.1) имеет единственное решение. Если $\exists J\subset I$, такое что $\det A_{JJ}<0$, то существует вектор f_I при котором неравенство (2.1) имеет несколько решений.

3. Существование траекторий медленного роста трещин. *Теорема 3.* Пусть функции $K_i(l, \tau)$ дважды-дифференцируемы; $K_i(l^\circ, \tau^\circ)\leqslant 2\gamma_i (i\in N)$, матрица $A_{II}(l^\circ, \tau^\circ)$ не удовлетворяет условию 2 начала лавинообразного роста; при $l=l^\circ$, $\tau=\tau^\circ$ существует регулярное решение вариационного неравенства (2.1). Тогда существует траектория медленного роста трещин $l(\tau)$, $\tau\in[\tau^\circ, \tau^\circ+\delta]$ такая, что $l(\tau^\circ)=l^\circ$.

Доказательство. Пусть ξ_I° — регулярное решение вариационного неравенства при $l=l^\circ$, $\tau=\tau^\circ$. Обозначим $J_0=\{i\in I|\xi_i^\circ>0\}$, $J_1=I\backslash J_0$. Определим непрерывно-дифференцируемую функцию $\xi_N(l, \tau)$: $\xi_{N\backslash J_0}(l, \tau)=0$, $\xi_{J_0}(l, \tau)=A^{-1}_{J_0J_0}(l, \tau)f_{J_0}(l, \tau)$. Решение дифференциального уравнения $\dot{l}(\tau)=\xi_N(l, \tau)$ с начальными условиями $l(\tau^\circ)=l^\circ$ дает траекторию медленного роста на интервале $[\tau^\circ, \tau^\circ+\delta]$, где $\delta>0$ выбрано так, чтобы на этом интервале $\det A_{J_0J_0}\neq 0$, $\xi_N(l, \tau)\geqslant 0$, $A_{J_1J_0}\xi_{J_0}-f_{J_1}>0$, $K_{N\backslash I}(l, \tau)<2\gamma_{N\backslash I}$. Для существования траектории медленного роста трещин вместо регулярности решения вариационного неравенства (2.1) ξ_I° при $\tau=\tau^\circ$, $l=l^\circ$ можно потребовать, чтобы для некоторых ε, $\delta>0$ существовало решение неравенства $\xi(l, \tau)$ непрерывное при $\tau\in[\tau^\circ, \tau^\circ+\delta]$, $l=l^\circ+(\tau-\tau^\circ)\eta$, $|\eta-\xi^\circ|<\varepsilon$, $\xi(l^\circ, \tau^\circ)=\xi_I^\circ$.

4. Единственность и устойчивость траекторий. Будем говорить, что траектория медленного роста трещин $l(\tau)$ не разветвляется при $\tau\in(\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta]$, если любая траектория, совпадающая с l при $\tau=\tau_1\in(\tau^\circ, \tau+\Delta]$ совпадает с l при всех $\tau\in[\tau_1, \tau^\circ+\Delta]$. Здесь и далее в этом пункте предполагается, что на всем интервале $[\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta]$ матрица $A(l(\tau), \tau)$ не удовлетворяет условиям 2 лавинообразного роста.

Решением сужения вариационного неравенства (2.1) на конус V_M $M\subset I$ будем называть вектор $\xi_I^{(M)}$, удовлетворяющий условиям

$$(A_{MM}\xi_M^{(M)}-f_M, \xi_M-\xi_M^{(M)})\geqslant 0 \quad (\forall\xi_M\in V_M, \xi_M^{(M)}\in V_M, \xi_{I\backslash M}^{(M)}=0).$$

Это решение будем называть регулярным, если $\det A_{J_0(\xi^{(M)})J_0(\xi^{(M)})}\neq 0$ $(A_{MM}\xi_M^{(M)}-f_M)_i\neq 0$ $\forall i\in I\backslash J_0(\xi^M)$, где $J_0(\xi^{(M)})=\{j\in I|\xi_j^{(M)}>0\}$.

Лемма 4. Пусть $l(\tau)$ — траектория медленного роста, $l_I(\tau^\circ)$ — регулярное решение неравенства (2.1). Для того, чтобы существовал интервал $(\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta)$, на котором траектория $l(\tau)$ не разветвляется, необходимо и достаточно, чтобы $\dot{l}_I(\tau^\circ)$ было единственным решением сужения этого неравенства на конус V_{J_0}.

Эта лемма позволяет из нескольких траекторий, совпадающих при $\tau=\tau^\circ$, выбрать те, которые не будут разветвляться на достаточно малом интервале. Можно показать, что, если $\dim A_{II}\leqslant 3$ и все решения (2.1) регулярны, то всегда существует не разветвляющаяся траектория. Для матриц большей размерности это неверно.

Условие неразветвления траекторий — достаточно слабое условие. Естественно предположить, что реализуются только траектории устойчивые к малым возмущениям [3].

Под допустимым δ-возмущением траектории $l(\tau)$ будем понимать вектор длин трещин l_1 такой, что $|l(\tau^\circ)-l_1|<\delta$, $K_i(l_1, \tau^\circ)<2\gamma_i$, $i\in N$. Траекторию медленного роста трещин $l_1(\tau)$ с начальными условиями $l_1(\tau^\circ)=l_1$ будем называть δ-возмущенной траекторией.

Будем говорить, что траектория $l(\tau)$ устойчива в замкнутом интервале $[\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что любая δ-возмущенная траектория $l_1(\tau)$ удовлетворяет $|l(\tau^\circ+\Delta)-l_1(\tau^\circ+\Delta)|<\varepsilon$. Траектория устойчива в полуоткрытом интервале $(\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta]$ если она устойчива в любом замкнутом интервале $[\tau_1, \tau^\circ+\Delta]\subset(\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta]$. Очевидно, что для устойчивости необходимо, чтобы траектория не разветвлялась.

Рассмотрим поведение δ-возмущенной траектории, если исходная траектория не разветвляется. Для простоты предположим, что $J_0=I=N$, A_{II}, f_I постоянны и решения сужения неравенства (2.1) на конус V_M для каждого $M\subset I$ регулярны. Обозначим $J_0(\xi_I)=\{j\in I|\xi_j>0\}$, $J_-(\xi_I)=\{j\in I|(A_{II}\xi_I-f_I)_j<0\}$. В начальный момент времени τ° на возмущенной траектории предельные соотношения $K_i(l_1(\tau), \tau)=2\gamma_i$ выполнены для индексов i, принадлежащих некоторому множеству $M_0\subset I$, следовательно, $l_1^\cdot(\tau^\circ)$ является решением сужения неравенства на V_{M_0}. При $\tau>\tau^\circ$ на траектории $l_1(\tau^\circ)$ предельные соотношения выполняются для трещин с номерами $i\in J_0(l_1^\cdot(\tau^\circ))$. Параметры разрушения $K_i(l_1(\tau), \tau)$ при $i\in J_-(l_1^\cdot(\tau^\circ))$ растут. В момент τ_1 некоторые из них достигнут предельного значения. Отметим, что множество $J_-(l_1^\cdot(\tau^\circ))$ не пусто, так как из леммы 4 следует, что $l_I^\cdot(\tau^\circ)$ единственное решение вариационного неравенства. Обозначим $M_1=\{i\in I|K_i(l_1(\tau_1), \tau_1)=2\gamma_i\}$. Тогда $J_0(l_1^\cdot(\tau^\circ))\subset M_1\subset J_0(l_1^\cdot(\tau^\circ))\cup J_-(l_1^\cdot(\tau^\circ))$, причем первое включение строгое. Вектор скоростей трещин $l_1^\cdot(\tau_1)$ будет решением сужения неравенства (2.1) на конус V_{M_1} и т. д. Поскольку множество решений всевозможных сужений вариационного неравенства (2.1) конечно, то либо при некотором $k>0$ $l_1^\cdot(\tau_k)=l_0^\cdot(\tau_k)$, либо $l_1^\cdot(\tau_{m+k})=l_1^\cdot(\tau_m)$ для некоторого $m>0$. В первом случае $M_k=\{i\in I|K_i(l_1(\tau_k), \tau_k)=2\gamma_i\}$ и из невырожденности матрицы A_{II} следует, что $l_1(\tau_k)=l_0(\tau_k)$. Приведенные рассуждения позволяют сформулировать лемму.

Лемма 5. Пусть $l(\tau)$ — траектория медленного роста трещин, не разветвляющаяся при $\tau\in(\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta]$, все решения сужений вариационного неравенства (2.1) на конусы $V_M \forall M\subset I$ регулярны и не существует последовательности $\xi_I^{(M_i)}$ решений сужения неравенства (2.1) на V_{M_i}, $M_i\subset J_0$ $(i=0,\dots,k)$, такой, что $J_0(\xi_I^{(M_i)})\subset M_{i+1}\subset J_0(\xi_I^{(M_i)})\cup J_-(\xi_I^{(M_i)})$, $M_{i+1}\setminus J_0(\xi_I^{(M_i)})\neq\varnothing$, $\xi_I^{(M_k)}=\xi_I^{(M_1)}$. Тогда существует $\Delta_1<\Delta$ такое, что траектория $l(\tau)$ устойчива при $\tau\in(\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta_1]$. Кроме того, для любого $\tau_1\in(\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta_1]$ существует $\delta>0$ такое, что любая δ — возмущенная в точке τ_1 траектория $l_1(\tau)$, $l_{1j}(\tau_1)=l_j(\tau_1)$, $j\in N\setminus J_0$ совпадает с невозмущенной при $\tau=\tau^\circ+\Delta_1$.

Эти утверждения следуют из того, что при некотором $\tau\in[\tau^\circ, \tau^\circ+\Delta_1]$

$$K_i(l_1(\tau), \tau)=2\gamma_i=K_i(l(\tau), \tau) \quad (i\in J_0)$$

$$l_{1j}(\tau)=l_{1j}(\tau_1), \ l_j(\tau)=l_j(\tau_1) \quad (j\in N\setminus J_0)$$

$$|l_1(\tau_1)-l(\tau_1)|<\delta, \ \det A_{J_0J_0}\neq 0$$

Для матриц, размерность которых не превосходит двух, обязательно одна из траекторий устойчива, однако для матриц большей размерности это не верно.

5. Случай матриц, близких к симметричным. Если рассматривается периодическая система трещин под действием периодической нагрузки или в качестве критерия разрушения используется критерий Гриффитса, то матрица A_{II} — симметрична. Решения вариационного неравенства (2.1) в этом случае являются точками локальных экстремумов на множестве V_I функций [1, 2]:

$$\Phi_I(\xi_I)={}^1/_2(A_{II}\xi_I, \xi_I)-(f_I\xi_I) \tag{5.1}$$

Условия 1, 2 и 3 начала лавинообразного развития трещин для симметричных матриц совпадают. Не выполнение этих условий означает, что функция $\Phi_I(\xi_I)$ ограничена снизу, следовательно, существует ее минимум на конусе V_I.

Лемма 6. Пусть l_I — регулярное решение неравенства (2.1). l_I единственное решение сужения неравенства (2.1) на конус V_{J_0} тогда и только тогда, когда $l_I^\cdot$ является точкой локального минимума функции (5.1). Если $l_I^\cdot$ — локальный минимум функции $\Phi_I(\xi_I)$, то не существует последовательности $\xi_I^{(M_0)}$ из условий леммы 5.

Поскольку, как следует из лемм 4, 5, устойчивость траекторий зависит только от расположения решений неравенства (2.1) и его сужений, то справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и существуют непрерывные матрица $B_{II}(t)$ и вектор $g_I(t)$, $t\in[0, 1]$ такие, что $B_{II}(0)=A_{II}(l^\circ, \tau^\circ)$, $g_I(0)=f_I(l^\circ, \tau^\circ)$, $B_{II}(1)$ — симметрична, $B_{II}(1)$ не удовлетворяет условию начала лавинообразного роста трещин (1.6), при любом $J\subset I$ решения неравенства $(B_{JJ}(t)\xi_J^*-g_J(t), \xi_J-\xi_J^*)\geqslant 0$ $(\xi_J^*\in V_J\forall\xi_J\in V_J)$ регулярны. Тогда существует не разветвляющаяся траектория $l(\tau)$, $l(\tau^\circ)=l^\circ$. Любая не разветвляющаяся траектория удовлетворяет условим леммы 5 и, следовательно, устойчива.

Если A_{II} и f_I удовлетворяют условиям теоремы 4, то существует $\varepsilon>0$ такое, что при $|A_{II}'-A_{II}|<\varepsilon$ матрица A_{II}' и правая часть также удовлетворяют условиям этой теоремы.

Пусть в качестве параметра разрушения используется значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений K_1. Аналогично [12] можно показать, что в этом случае $A_{II}=\Gamma_1 C_{II}+\Gamma_2 D_{II}+S_{II}$, где Γ_1, Γ_2 и S_{II} — диагональные матрицы, C_{II} — симметричная матрица. На диагонали матрицы Γ_1 стоят коэффициенты интенсивности $K_{1j}=2\gamma_j$, на диагонали Γ_2 — коэффициенты интенсивности касательных напряжений K_{2j}. Матрицы C_{II}, D_{II} зависят только от конфигурации области и положения трещин. Если коэффициенты интенсивности $K_{2j}=0$, то матрица $B_{II}(t)=\Gamma^*(t)A_{II}$ и вектор $g_I(t)=\Gamma^*(t)f_I$, $\Gamma^*=((1-t)E+t\Gamma_1)^{-1}$ удовлетворяют условиям теоремы 4. Следовательно, если не выполнены условия начала лавинообразного развития трещин, то при достаточно малых K_{2j} существует устойчивая траектория медленного роста.

Рассмотрим рост периодической системы краевых трещин в полуплоскости, развивающихся при остывании полуплоскости. Эта задача численно исследовалась в [3]. Было установлено, что пока длины трещин малы и их взаимодействие незначительно, растут все трещины и их длины одинаковы. При некотором критическом значении параметра нагружения появляются три возможных траектории роста: растут все трещины, растут только четные или только нечетные трещины. Первая траектория не устойчива, вторая и третья – устойчивы. Поэтому начиная с критического значения параметра нагружения трещины растут через одну, причем реализовавшаяся траектория (вторая или третья) будет единственной до следующего критического значения параметра нагружения. При этом значения параметра вновь произойдет остановка части трещин и т. д. до начала лавинообразного роста некоторых трещин.

Видимо, описанная картина характерна для медленного развития произвольной системы трещин хрупкого разрушения. Это подтверждают результаты настоящей статьи: критические значения параметра нагружения соответствуют появлению нерегулярных решений неравенства (2.1), при наличии нескольких траекторий на устойчивых часть трещин останавливается, устойчивая траектория не разветвляется до появления нерегулярных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nguen Quoc Son.* Stabilité et bifurcation en rupture et en plasticité // C. R. Acad. Sci. 1981. Ser. II. T. 292. No. 11. P. 817–820.
2. *Nguen Quoc Son.* Bifurcation et analyse post-critique en rupture fragile et en plasticité // C. R. Acad. Sci. 1985. Ser. II. T. 300. No. 6. P. 191–194.
3. *Nemat-Nasser S., Sumi Y., Keer L. M.* Unstable growth of tension cracks in brittle solids: stable and unstable bifurcations, snap-through, and imperfection sensitivity // Intern. J. Solids and Struct. 1980. V. 16. No. 11. P. 1017–1035.
4. *Болотин В. В.* Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР, МТТ. 1983. № 4. С. 153–160.
5. *Болотин В. В.* Механика зарождения и начального развития усталостных трещин // Физико-химическая механика материалов. 1986. № 1. С. 18–23.
6. *Линьков А. М.* Проблема устойчивости с учетом разупрочнения // Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 36. № 1. С. 56–71.
7. *Линьков А. М., Пронин Л. Н.* Об оценках устойчивости упругопластических систем // Исследования по упругости и пластичности: Проблемы теории трещин и механика разрушения. Л.: Изд-во ЛГУ. 1986. Вып. 15. С. 71–79.
8. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
9. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1980. 256 с.
10. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.
11. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956. 392 с.
12. *Назаров С. А.* Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 124–129.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.VIII.1987