МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1989

УДК 539.375

В. И. АСТАФЬЕВ

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА УПРОЧНЕНИЯ НА ХАРАКТЕР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Определены асимптотики напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях неустановившейся ползучести с анизотропным упрочнением. Показано, что упрочнение не влияет на характер асимптотики напряжений у вершины трещины, совпадающей с асимптотикой для теории установившейся ползучести. В случае неподвижной трещины процесс упрочнения происходит во всей области перед вершиной трещины, уменьшая скорость деформаций ползучести до значения, соответствующего состоянию установившейся ползучести. В случае движущейся трещины к ее вершине примыкает область неупрочненного материала, скорость деформаций ползучести в которой максимальна.

1. Введение. В последнее время большое внимание уделяется вопросам докритического подрастания трещин в условиях высокотемпературной ползучести. При теоретическом моделировании роста трещины необходимо знать характер распределения напряжений у ее вершины. Практически во всех теоретических моделях используется асимптотика теории установившейся ползучести, в которой тензор скоростей деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{\bullet}$ и девиатор тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\sigma}-{}^1/_3(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\bullet}={}^3/_2 p_s^{\bullet}(\sigma_e)\boldsymbol{\sigma}'/\sigma_e \tag{1.1}$$

где $\sigma_e=({}^3/_2\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}'^2)^{1/2}$ — интенсивность напряжений, $\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}$ — след тензора $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{I}$ — единичный тензор, $p_s^{\bullet}(\sigma)$ — скорость деформаций ползучести при одноосном растяжении напряжением σ. Для степенного закона ползучести $p_s^{\bullet}=B\sigma^n$ асимптотика напряжений у вершины трещины имеет точно такой же вид как и в нелинейной теории упругости или деформационной теории пластичности со степенным упрочнением [1—3]:

$$\boldsymbol{\sigma}(r,\ \varphi,\ t)=(C^*(t)/BI_n r)^{1/(n+1)}\boldsymbol{\Sigma}(\varphi) \tag{1.2}$$

Здесь r, φ — полярные координаты, связанные с вершиной трещины, I_n и $\boldsymbol{\Sigma}(\varphi)$ — константа и безразмерные функции полярного угла φ, определенные для различных значений показателя нелинейности n в [3]. Независящий от контура C^* — интеграл теории установившейся ползучести, входящий в (1.2), аналогичен J-интегралу теории упругости [1—3], если заменить в нем перемещения $\mathbf{u}$ и деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ на скорости перемещений $\mathbf{v}$ и скорости деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{\bullet}$ [4]

$$C^*=\oint_\Gamma\left(\frac{n}{n+1}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{\bullet})\nu_1-(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}_{,1})\right)ds \tag{1.3}$$

Процесс упрочнения, происходящий на неустановившейся стадии ползучести, меняет напряженно-деформированное состояние вблизи вершины трещины. Так в случае неподвижной трещины в [5] было найдено поле напряжений для определяющих соотношений теории ползучести со степенным упрочнением [6], а в [7] — для определяющих соотношений теории анизотропного упрочнения типа соотношений [8]. Анализ взаимодействия процессов упрочнения и роста трещины в этих работах не проводился.

В [9] для описания процесса упрочнения в условиях ползучести привлекалась тензорная внутренняя переменная. Была показана эффективность использования такой переменной для сложных прграмм нагружения. Естественно возникает задача определения поля напряжений и скоростей деформаций у вершины неподвижной или растущей трещины в материале, процесс упрочнения в котором описывается с помощью тензорной внутренней переменной.

2. Неподвижная трещина. Определяющие соотношения, описывающие процесс упрочнения при ползучести с помощью тензорной внутренней переменной $\boldsymbol{\alpha}$ можно представить в виде [9]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}={}^3/_2(p_s^{\cdot}+a_s/t_s)\boldsymbol{\sigma}'/\sigma_e-a_s\boldsymbol{\alpha}/(t_s\Delta p)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\cdot}=({}^3/_2\Delta p\boldsymbol{\sigma}'/\sigma_e-\boldsymbol{\alpha})/t_s \tag{2.2}$$

Здесь $p_s^{\cdot}(\sigma_e)$ — скорость деформации на установившейся стадии ползучести, $a_s(\sigma_e)$ — деформация, характеризующая степень упрочнения материала на стадии неустановившейся ползучести, $t_s(\sigma_e)$ — время, характеризующее протяженность процесса упрочнения, $\Delta p(\sigma_e)$ — деформация, характеризующая величину обратной ползучести материала после снятия нагрузки.

Прежде чем анализировать поле напряжений у вершин трещины на неустановившейся стадии ползучести, сконкретизируем вид зависимостей $p_s^{\cdot}(\sigma_e)$, $a_s(\sigma_e)$, $t_s(\sigma_e)$ и $\Delta p(\sigma_e)$. В [10] было показано, что величину t_s для многих сталей и сплавов можно считать постоянной и не зависящей от σ_e. Аппроксимируем зависимости $p_s^{\cdot}(\sigma_e)$, $a_s(\sigma_e)$ и $\Delta p(\sigma_e)$ степенными функциями $p_s^{\cdot}=B\sigma_e^{n}$, $a_s=B_0\sigma_e^{n_0}$, $\Delta p=B_1\sigma_e^{n_1}$. Учитывая условие $\Delta p\leqslant a_s$, справедливое практически для всех экспериментальных данных по ползучести с разгрузкой [11], получаем, что при выбранной аппроксимации $n_1\leqslant n_0$. Ограничимся далее материалами, для которых кривые ползучести подобны [6]. В рамках выбранной аппроксимации для $p_s^{\cdot}(\sigma_e)$, $a_s(\sigma_e)$ и $\Delta p(\sigma_e)$ условие подобия кривых ползучести означает, что $p_s^{\cdot}(\sigma_e)/a_s(\sigma_e)=\text{const}$, т. е. $n_0=n$. В результате соотношения (2.1), (2.2) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}={}^3/_2(B+B_0/t_s)\sigma_e^{n-1}\boldsymbol{\sigma}'-(B_0/B_1t_s)\sigma_e^{n-n_1}\boldsymbol{\alpha} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\cdot}=({}^3/_2B_1\sigma_e^{n_1-1}\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{\alpha})/t_s \tag{2.4}$$

Для неподвижной трещины, когда $\boldsymbol{\alpha}^{\cdot}=\partial\boldsymbol{\alpha}/\partial t$, из (2.4) следует, что

$$\boldsymbol{\alpha}(r,\varphi,t)={}^3/_2B_1\int\limits_0^t\sigma_e^{n_1-1}(r,\varphi,\tau)\boldsymbol{\sigma}'(r,\varphi,\tau)\exp(-(t-\tau)/t_s)\,d(\tau/t_s) \tag{2.5}$$

Соотношения (2.3), (2.5) показывают, что при решении канонической сингулярной задачи для тела с полубесконечной трещиной [1] переменные r, φ и t разделяются и решение $\boldsymbol{\sigma}(r,\varphi,t)$, $\boldsymbol{\alpha}(r,\varphi,t)$ можно представить в виде $\boldsymbol{\sigma}=r^{\lambda}\boldsymbol{\Sigma}(\varphi)T_1(t)$, $\boldsymbol{\alpha}=r^{\mu}\mathbf{A}(\varphi)T_2(t)$. Из соотношения (2.5) следует

$$\mu=n_1\lambda,\qquad \mathbf{A}(\varphi)={}^3/_2\Sigma_e^{n_1-1}(\varphi)\boldsymbol{\Sigma}(\varphi)$$

$$T_2(t)=B_1\int\limits_0^t T_1^{n_1}(\tau)\exp(-(t-\tau)/t_s)\,d(\tau/t_s)$$

В результате для параметра λ и функций $\boldsymbol{\Sigma}(\varphi)$ получается та же задача на собственные значения, что и в случае установившейся ползучести или нелинейной теории упругости [1—3], т. е. $\lambda=-1/(n+1)$, а функции $\boldsymbol{\Sigma}(\varphi)$ имеют вид, определенный в [3]. Таким образом напряжение $\boldsymbol{\sigma}$ определяется соотношением (1.2) теории установившейся ползучести, а для величин $\varepsilon^{\cdot}$ и $\alpha^{\cdot}$ можно записать

$$\varepsilon^{\cdot}=B\left\{1+\varkappa-\varkappa\int\limits_0^t\left(\frac{C^*(\tau)}{C^*(t)}\right)^{n_1/(n+1)}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{t-\tau}{t_s}\right)d\frac{\tau}{t_s}\right\}\left(\frac{C^*(t)}{BI_nr}\right)^{n/(n+1)}\mathbf{E}(\varphi) \tag{2.6}$$

$$\alpha=B_1\left\{\int\limits_0^t\left(\frac{C^*(\tau)}{C^*(t)}\right)^{n_1/(n+1)}\exp\left(-\frac{t-\tau}{t_s}\right)d\frac{\tau}{t_s}\right\}\left(\frac{C^*(t)}{BI_nr}\right)^{n/(n+1)}\mathbf{A}(\varphi) \tag{2.7}$$

Здесь $\varkappa=B_0/Bt_s$, $\mathbf{E}(\varphi)={}^3/_2\Sigma_e^{n-1}(\varphi)\mathbf{\Sigma}(\varphi)$, а зависимость C^* — интеграла от времени t определяется характером изменения внешней нагрузки, приложенной к телу с трещиной. Независящий от контура C_s^* — интеграл теории неустановившейся ползучести, вычисленный по (1.3) в соответствии с (1.2) и (2.6), будет выражаться через C^* — интеграл теории установившейся ползучести следующим образом:

$$C_s^*=C^*(t)\left\{1+\varkappa-\varkappa\int\limits_0^t\left(\frac{C^*(\tau)}{C^*(t)}\right)^{n_1/(n+1)}\exp\left(-\frac{t-\tau}{t_s}\right)d\frac{\tau}{t_s}\right\} \tag{2.8}$$

В случае постоянной нагрузки ($C^*=\text{const}$):

$$\varepsilon^{\cdot}=B(1+\varkappa e^{-t/t_s})(C^*/BI_nr)^{n/(n+1)}\mathbf{E}(\varphi)$$

$$\alpha=B_1(1-e^{-t/t_s})(C^*/BI_nr)^{n/(n+1)}\mathbf{A}(\varphi)$$

$$C_s^*=C^*(1+\varkappa e^{-t/t_s})$$

т. е. $\varepsilon^{\cdot}$, α и C_s^* асимптотически выходят на стационарные состояния теории установившейся ползучести.

3. Растущая трещина. Характерной особенностью определяющих соотношений (1.1) теории установившейся ползучести является то, что распределение напряжений (1.2) справедливо как для неподвижной трещины, так и для растущей с произвольной скоростью $l^{\cdot}(t)$. В случае ползучести с упрочнением полная производная по времени $\alpha^{\cdot}$, фигурирующая в кинетическом уравнении (2.2), будет

$$\alpha^{\cdot}=\partial\alpha/\partial t-l^{\cdot}(t)(\cos\varphi\partial\alpha/\partial r-r^{-1}\sin\varphi\partial\alpha/\partial\varphi) \tag{3.1}$$

Таким образом переменные r, φ и t уже не разделяются и можно установить лишь асимптотическое поведение функций $\sigma(r,\varphi,t)$ и $\alpha(r,\varphi,t)$ при $r\to0$ и $r\to\infty$. Будем искать решение $\sigma(r,\varphi,t)$ и $\alpha(r,\varphi,t)$ при $r\to0$ и $r\to\infty$ в виде $\sigma(r,\varphi,t)=r^\lambda\mathbf{\Sigma}(\varphi)T_1(t)$, $\alpha(r,\varphi,t)=r^\mu\mathbf{A}(\varphi)T_2(t)$. Из (3.1) следует, что при $r\to\infty$ в выражении для $\alpha^{\cdot}$ можно пренебречь слагаемым $l^{\cdot}(t)(\cos\varphi\partial\alpha/\partial r-r^{-1}\sin\varphi\partial\alpha/\partial\varphi)$ по сравнению с $\partial\alpha/\partial t$. Это означает, что при $r\to\infty$ справедливы соотношения (1.2), (2.6) и (2.7) случая неподвижной трещины. При $r\to0$ в выражении (3.1) можно пренебречь уже величиной $\partial\alpha/\partial t$ по сравнению с $l^{\cdot}(t)(\cos\varphi\partial\alpha/\partial r-r^{-1}\sin\varphi\partial\alpha/\partial\varphi)$. В результате при $r\to0$ из соотношения (2.4) следует, что $\mu=1+n_1\lambda$, $T_2(t)=B_1T_1^{n_1}(t)/l^{\cdot}(t)t_s$, а функции $\mathbf{A}(\varphi)$ удовлетворяют уравнению $\mu\cos\varphi\mathbf{A}(\varphi)-\sin\varphi\partial\mathbf{A}/d\varphi=-{}^3/_2\Sigma_e^{n_1-1}(\varphi)\mathbf{\Sigma}(\varphi)$ с условием регулярности $\mu\mathbf{A}(0)=-{}^3/_2\Sigma_e^{n_1-1}(0)\mathbf{\Sigma}(0)$ (начальное условие для $\mathbf{A}(\varphi)$). Для найденного значения μ вкладом от второго слагаемого $B_0\sigma_e^{n-n_1}\alpha/B_1t_s$ в определяющем соотношении (2.3) можно пренебречь и записать его при $r\to0$ в аналогичном (1.1) виде: $\varepsilon^{\cdot}={}^3/_2B(1+\varkappa)\sigma_e^{n-1}\sigma'$. Это означает, что снова $\lambda=-1/(n+1)$, т. е. асимптотика для $\sigma(r,\varphi,t)$ и при $r\to0$ имеет вид (1.2). Выражение для $\varepsilon^{\cdot}$ и α при $r\to0$ можно записать как

$$\varepsilon^{\cdot}(r,\varphi,t)=B(1+\varkappa)(C^*/BI_nr)^{n/(n+1)}\mathbf{E}(\varphi) \tag{3.2}$$

$$\alpha(r,\varphi,t)=(B_1/l^{\cdot}(t)t_s)r(C^*/BI_nr)^{n_1/(n+1)}\mathbf{A}(\varphi) \tag{3.3}$$

В случае движущейся трещины C_s^* — интеграл теории неустановившейся ползучести, вычисленный в соответствии с (1.3), (1.2), (2.6) и

(3.2), оказывается уже зависящим от контура интегрирования Г и меняется от значения $(1+\varkappa)C^*$ для бесконечного малого контура до значения $C_s^*(t)$, определенного по (2.8), для бесконечно большого контура.

Анализируя характер распределения напряжений у вершины трещины в целом, можно отметить следующее. Для неподвижной трещины поле напряжений у ее вершины в случае неустановившейся ползучести совпадает с полем напряжений теории установившейся ползучести (1.2) и в процессе упрочнения происходит лишь уменьшение скорости деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}$ да рост внутренней переменной α до значений, соответствующих состоянию установившейся ползучести (при этом характер распределения $\dot{\varepsilon}$ и α по r в процессе упрочнения не меняется). В случае движущейся трещины к ее вершине примыкает область, в которой за счет взаимодействия процессов упрочнения и развития трещины начинает меняться характер распределения функций $\dot{\varepsilon}$ и α по r. Величина α обращается в нуль в вершине трещины в отличие от бесконечно большого ее значения в случае неподвижной трещины. На достаточном удалении от вершины движущейся трещины влияние процесса развития трещины исчезает и процесс изменения $\dot{\varepsilon}$ и α происходит точно также, как и в случае неподвижной трещины.

Характерной особенностью напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины является то, что поле напряжений у ее вершины имеет точно такое же распределение, что и в случае неподвижной трещины и совпадающее с распределением напряжений теории установившейся ползучести. Упрочнение не оказывает влияния на процесс деформирования и трещина движется по неупрочненному материалу. Это объясняется тем, что за счет разгрузки берегов движущейся трещины процесс упрочнения у ее вершины приобретает противоположное направление — компоненты тензора α у вершины трещины за счет разгрузки становятся отрицательными, а суммарная величина параметра α в вершине трещины становится равной нулю (см. (3.3) при $r=0$). В связи с этим скорость деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}$ становится больше, процесс ползучести протекает интенсивнее, а величина C_s^*-интеграла в процессе всего движения трещины оказывается в $(1+\varkappa)$ раз больше, чем величина C^*-интеграла теории установившейся ползучести (в случае неподвижной трещины величина C_s^*-интеграла теории неустановившейся ползучести в $(1+\varkappa)$ раз больше величины C^*-интеграла лишь при $t=0$ в момент приложения нагрузки, а затем в соответствии с (2.8) величина C_s^*-интеграла начинает убывать и асимптотически стремиться к величине C^*-интеграла теории установившейся ползучести).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черепанов Г. П.* О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476–488.
2. *Rice J. R., Rosengren G. F.* Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardering material // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. N. 1. P. 1–12.
3. *Hutchinson J. W.* Singular behaviour at the end of tensile crack in hardering materials // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. N. 1. P. 13–31.
4. *Landes J. D., Begley J. A.* A fracture mechanics approach to creep crack growth // Mechanics of Crack Growth: ASTM Spec. Tech. Publ. 590. Philadelphia: Amer. Soc. for Testing and Mater., 1976. P. 128–148.
5. *Riedel H.* Creep deformation at crack tips in elastic-viscoplastic solids // J. Mech. and Phys. Solids. 1981. V. 29. N. 1. P. 35–49.
6. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
7. *Kubo S.* Creep recovery and hardering effects on the stress field near a crack tip under variable loads // Creep Struct: 3rd Symp., Leicester, 1980. Berlin: Springer, 1981. P. 606–610.
8. *Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.* К построению теории ползучести с анизотропным упрочнением // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 148–152.
9. *Астафьев В. И.* Описание упрочнения при ползучести с помощью тензорной внутренней переменной // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 132–140.
10. *Быковцев Г. И., Горелов В. И.* Об одной закономерности в ползучести металлов // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1080–1082.
11. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник/Под общ. ред. С. А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983. 101 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию 24.II.1987