МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1989

УДК 539.376

И. И. БУГАКОВ

О ПРИНЦИПЕ СЛОЖЕНИЯ КАК ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СРЕД С ПАМЯТЬЮ

Принцип сложения по Больцману строится для сред, свойства которых не зависят от промежуточных состояний, т. е. от механического воздействия. В настоящей работе принцип обобщается в шкале внешнего времени на упрочняющиеся среды. При этом рамки принципа существенно расширяются.

Показывается, что ряд известных уравнений согласуется с принципом при его расширенном толковании. Строятся новые уравнения. Связь между напряжениями и упругими деформациями может быть нелинейной. Показывается, что уравнения удовлетворяют термодинамическим неравенствам.

1. Введение. Принцип сложения (суперпозиции) Больцмана является основополагающим в линейной теории сред с памятью (наследственных сред). Он сохраняет силу для сред со старением и со свойствами, зависящими от внешних немеханических воздействий. Модифицированный принцип сложения применяется к нелинейным средам [1—6], при этом постепенно осознается фундаментальная роль принципа и в нелинейной механике сплошных сред [4, 5].

В настоящей работе дается дальнейшее обобщение принципа для физически нелинейных сред без старения. Деформации полагаются малыми. Влияние немеханических воздействий не учитывается; поэтому, в частности, процессы считаются изотермическими. Принцип сложения формулируется в шкале «внешнего» времени t, анализ ограничивается вязкоупругими средами, при этом допускаются механически необратимые деформации.

Отдельно рассматриваются среды со свойствами, не зависящими от механического воздействия (идеальные среды) и зависящими от него (упрочняющиеся среды); при этом уравнения не детализируются настолько, чтобы можно было различать эффекты упрочнения и эффекты разупрочнения. Строятся трехмерные определяющие уравнения для сред с общего вида анизотропией. Один из возможных методов идентификации предложен в [7].

2. Принцип сложения напряжений. Как известно, когда тензор деформаций рассматривается как следствие тензора напряжений: $e(t)=F\{\sigma(\tau)\}$, $\tau\in[0,t]$, тогда используется принцип сложения деформаций, а когда тензор напряжений рассматривается как следствие тензора деформаций: $\sigma(t)=\Psi\{e(\tau)\}$ — принцип сложения напряжений. В нелинейной теории они альтернативны [8, 9] и представляют собой две различные точки зрения на одно и то же явление — вязкоупругость. Ниже для определенности тензор напряжений рассматривается как функционал тензора деформаций.

Пусть две истории деформаций, $e_1(\tau)$ и $e_2(\tau)$, по-отдельности влекут за собой напряжения $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$. Принцип сложения напряжений постулирует, что история деформаций $e(\tau)=e_1(\tau)+e_2(\tau)$ приводит к напряжениям $\sigma(t)=\sigma_1(t)+\sigma_2(t)$, т. е. постулируется аддитивность.

При линейной связи между σ и e деформации $e_1(\tau)$, $e_2(\tau)$ могут быть отличны от нуля и в пересекающихся, и в одних и тех же интервалах времени. Допустим случай $e_1(\tau)=e_2(\tau)$. Тогда $e(\tau)=2e_1(\tau)$, $\sigma(t)=2\sigma_1(t)$, т. е. имеет место однородность.

В случае нелинейной связи складываются, как правило, только эффекты последовательных воздействий, т. е. воздействий, отличных от нуля в непересекающихся интервалах τ. При этом свойство однородности утрачивается и сохраняется лишь частичная аддитивность, а именно аддитивность по времени. Так, принцип сложения напряжений — синоним аддитивности напряжений по времени.

Пусть задана непрерывная или кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая функция $e(\tau)$ и интервал $0, t$ разбит на малые подынтервалы $[\tau_0=0, \tau_1)$, $[\tau_i, \tau_2), \ldots, [\tau_i, \tau_{i+1}), \ldots, [\tau_{n-1}, \tau_n=t)$, в которых $e(\tau)$ — гладкая функция. На границах этих подынтервалов деформации мысленно мгновенно уменьшаются до нуля и так же мгновенно принимают прежние значения (фиг. 1). Существенно, чтобы любой реальный процесс, например ABA, был идеально упругим [4, 5]. Такие «разгрузки» никак не влияют на свойства среды. Вследствие этого процессы деформации без разгрузок и с разгрузками оказываются неразличимыми с точки зрения неупругого поведения среды. Процесс $e(\tau)$ без разгрузок можно представить как совокупность последовательных элементарных деформаций $e_i(\tau)$, $\tau\in[\tau_i, \tau_{i+1})$, причем $e_i(\tau)=e(\tau)$ внутри этого промежутка и $e_i(\tau)=0$ вне его. Каждую из элементарных деформаций можно аппроксимировать прямоугольным «импульсом» [10] с уровнем e_i° (это обстоятельство существенно используется в п. 5).

Каждый импульс тензора деформаций $e_i(\tau)$ вызывает тензор напряжений $\sigma_i(t)$. Учитывается изменение во времени напряжений в образце с нулевой деформацией при $t>\tau_{i+1}$ (эффект памяти). Значения $\sigma_i(t)$ при $t>\tau_{i+1}$ обозначаются $\Delta\sigma_i(t)$. Для одномерного случая форма графиков элементарного воздействия и отклика показана на фиг. 2, а, б.

По принципу сложения тензор напряжений в момент t от всех предшествовавших воздействий имеет вид

$$\sigma(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\sigma_i(t) \tag{2.1}$$

3. Идеальные среды. По Больцману, тензор $\Delta\sigma_i(t)$ зависит от времени $t-\tau_i$, прошедшего после приложения импульса, тензора e_i° и длительности $\Delta\tau_i$ импульса. Больцман постулировал пропорциональность между $\Delta\sigma_i(t)$ и e_i° и пришел к линейному определяющему уравнению. По Персо $\Delta\sigma_i(t)$ — нелинейная функция e_i° [2], так что

$$\Delta\sigma_i(t)=\varphi_*(t-\tau_i, e_i^\circ)\Delta\tau_i \quad (t>\tau_{i+1}) \tag{3.1}$$

где $\varphi_*(t-\tau, 0)=\varphi_*(\infty; e)=0$. Следует отметить, что Персо рассматривал одномерный случай. Подставив (3.1) в (2.1), рассматривая сумму как риманову и используя предельный переход, можно получить нелинейное уравнение

$$\sigma(t)=\int_0^t\varphi_*[t-\tau, e(\tau)]\,d\tau.$$

Нижний предел интегрирования понимается как предел слева, а верхний как предел справа.

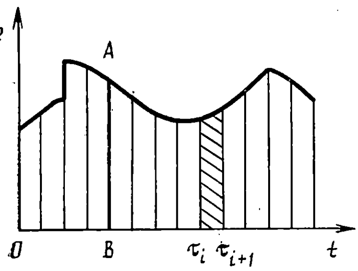
Можно представить, что функция φ_* содержит сингулярную часть как аддитивную составляющую. Выделение ее приводит к уравнению типа Персо

$$\sigma(t)=c{:}e(t)-\int_0^t\varphi[t-\tau, e(\tau)]\,d\tau \tag{3.2}$$

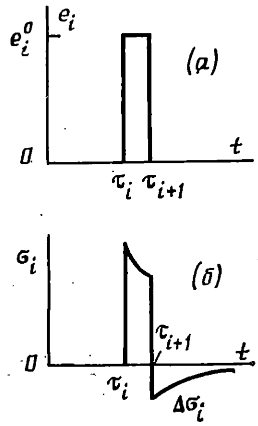
где c — тензор модулей упругости, φ — регулярная тензорная функция. В более общем случае

$$\sigma(t)=\Phi[e(t)]-\int_0^t\varphi[t-\tau, e(\tau)]\,d\tau \tag{3.3}$$

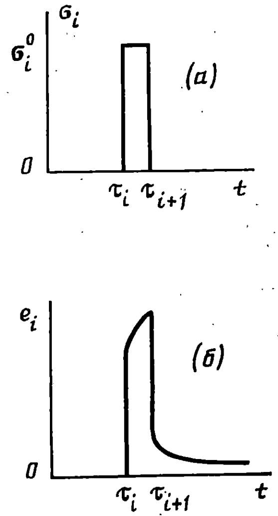
где Φ — тензорная функция e; $\Phi(0)=0$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Как видно, нелинейная упругость не противоречит принципу сложения [11].

Теория Больцмана — Персо описывает поведение сред без упрочнения. Действительно, напряжение $\Delta\sigma_i(t)$, вызванное выделенным импульсом деформаций, не зависит от того, действовали до и после него другие импульсы или не действовали. Хотя перед импульсом $e_i(\tau)$ имеются напряжения, вызванные предшествовавшими деформациями, среда ведет себя так, как если бы импульс $e_i(\tau)$ был первым. В соответствии с этим представлением механическое воздействие не влияет на свойства среды, приводя лишь к чисто геометрическим изменениям в ней. Следует подчеркнуть, что это утверждение относится не только к линейному, но и к нелинейному отклику на механическое воздействие.

По аналогии с идеально пластическими такую среду можно назвать идеально вязкоупругой.

Тогда, когда неупругая деформация аморфных полимеров связана с изменением набора конформаций макромолекул, неупругий процесс есть релаксационный процесс перехода из одного равновесного состояния в другое и потому он не связан с какими-либо дефектами структуры. Ясно, что теория Больцмана — Персо должна находить наилучшее применение именно к таким материалам. Действительно, сопоставление теории с экспериментальными данными, полученными при одноосном растяжении на двух аморфных полимерах (полиметилметакрилат и целлулоид) дало положительные результаты. Осевая деформация изменялась по ступенчатым [12] и ступенчатым циклическим законам [6]. При

$$\varphi[t-\tau, e(\tau)]=\varphi_1(t-\tau):\Phi[e(\tau)] \tag{3.4}$$

где φ_1 — тензорная функция четвертого ранга, соотношение (3.3) принимает вид уравнения типа Работнова [13], разрешенного относительно напряжений:

$$\sigma(t)=\Phi[e(t)]-\int_0^t \varphi_1(t-\tau):\Phi[e(\tau)]d\tau=\int_0^t E(t-\tau):d\Phi[e(\tau)] \tag{3.5}$$

где $E(\alpha)$ — тензор релаксационных модулей, $dE(\alpha)/d\alpha=\varphi_1(\alpha)$, $E(0)=1$.

Если функция φ представима в виде (3.4), то второе соотношение (3.5) можно получить с помощью суммы (2.1), приняв, что

$$\Delta\sigma_i(t)=E(t-\tau_i):[\Phi(e_i^\circ)-\Phi(\overset{\circ}{e}_{i-1})] \tag{3.6}$$

Согласно (2.1), (3.6), макропроцесс представим в виде суммы последовательных наложений деформаций («догружений»). Принцип, на котором основано такое представление, называют принципом наложения [1]. Как видно, он допустим тогда, когда тензор напряжений — линейный функционал функции деформации Ф. Этот принцип имеет более узкую область приложений, чем принцип сложения (требуется подобие кривых релаксации напряжений в координатах σ, t, т. е. сохраняющаяся во времени степень нелинейности). В то же время уравнение (3.5) — более простое в математическом отношении, чем (3.2), (3.3).

По терминологии [8] уравнения (3.2), (3.3), (3.5) относятся к главной теории релаксации.

Пусть $Q(\sigma)$ — тензорная функция напряжений, $Q(0)=0$. Принцип сложения (2.1) можно переформулировать для нее. Тогда в левой части зависимости (3.1) будет $\Delta Q[\sigma_i(t)]$ и вместо (3.3) будет

$$Q[\sigma(t)]=\Phi[e(t)]-\int_0^t \varphi[t-\tau, e(\tau)]\,d\tau$$

При условии (3.4) это соотношение принимает вид уравнения типа Москвитина [14]:

$$Q[\sigma(t)]=\int_0^t E(t-\tau):d\Phi[e(\tau)]$$

4. Упрочняющиеся среды. В [4] сформулирован принцип сложения в шкале термодинамического («внутреннего») времени. В этой шкале свойства среды остаются неизменными, как по Больцману—Персо, но сама шкала изменяется с изменением степени термодинамической необратимости процесса. В [5] учтена возможность изменения свойств и в этой шкале. Введение шкалы внутреннего времени позволяет распространить принцип сложения на упругопластические и упруговязкопластические среды. Теории, в которых используется внутреннее время, называют, по Валанису, эндохронными.

Можно, однако, отказаться от постулата Больцмана—Персо, пользуясь, по-прежнему, шкалой внешнего времени t и ограничиваясь вязкоупругими средами. При таком подходе появляется возможность рассмотреть в рамках принципа сложения неэндохронные определяющие соотношения.

Предполагается, что на тензор напряжений $\Delta\sigma_i(t)$, вызванный элементарным импульсом — тензором деформаций $e_i(\tau)$, влияют другие импульсы:

$$\Delta\sigma_i(t)=\varphi_*(t, \tau_i, e_i^\circ, \tau_k, e_k^\circ, \Delta\tau_k)\Delta\tau_i \qquad (4.1)$$

где $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$; индекс k пробегает все эти значения или часть из них для каждого значения i. По-прежнему считается, что $\Delta\sigma_i(t)=0$ при $t<\tau_i$, однако теперь состояние среды к моменту τ_i зависит от предшествовавших импульсов. Это приводит к тому, что при $t>\tau_{i+1}$ релаксация напряжений ускоряется или замедляется по сравнению с релаксацией в идеальных средах. Последующие по отношению к $e_i(\tau)$ импульсы тоже ускоряют или замедляют релаксацию напряжений при $t>\tau_{i+1}$.

Аналогом может служить эффект предыстории температуры и эффект повышения или понижения температуры в процессе деформирования. Эффект последующих нагружений в случае заданной истории напряжений продемонстрирован в [3, 15] на полимерах: аморфнокристаллическом (полиэтилен высокой плотности) и аморфном (жесткий полиуретан).

Исходя из зависимостей (2.1), (4.1), можно получить самые различные нелинейные определяющие уравнения, которые основаны на принципе сложения в шкале t и учитывают влияние механических воздействий не только на поведение, но и на свойства среды. Те или иные конкретные уравнения получаются в зависимости от того, как организованы аргументы функции φ_* в (4.1). Ниже приводятся примеры.

Пусть в зависимости (4.1) учитывается эффект только последующих импульсов, действовавших в интервале $\tau \in [\tau_i, t)$. Индекс k соответственно пробегает значения от i до $n-1$. Пусть при этом зависимость (4.1) имеет форму

$$\Delta\sigma_i(t) = \varphi_{1*}\left[\sum_{k=i}^{n-1} g(e_k^\circ)\Delta\tau_k\right] : e_i^\circ g(e_i^\circ)\Delta\tau_i \tag{4.2}$$

где g — скалярная функция тензорного аргумента ($g>0$), φ_{1*} — тензор четвертого ранга. Видно, что все импульсы вносят вклад, не зависящий от положения подынтервала $\Delta\tau_k$ на отрезке $\rho \in [\tau, t)$. Использование (2.1), (4.2) приводит к эндохронному соотношению

$$\sigma(t) = c : e(t) - \int_0^t \varphi_1[\xi(t) - \xi(\tau)] : e(\tau) g[e(\tau)]\, d\tau \tag{4.3}$$

где принято, что внутреннее время $\xi(t)$ зависит от деформаций [16]:

$$\xi(t) = \int_0^t g[e(\rho)]\, d\rho, \quad \xi(t) - \xi(\tau) = \int_\tau^t g[e(\rho)]\, d\rho \tag{4.4}$$

Пусть теперь в зависимости (4.1) учитывается эффект только предшествовавших моменту τ_i импульсов [17] (наклеп), так что индекс k пробегает значения от 0 до $i-1$ и при этом зависимость (4.1) имеет форму

$$\Delta\sigma_i(t) = \varphi_{2*}\left[t - \tau_i, \sum_{k=0}^{i-1} q(\tau_i - \tau_k) : e_k^\circ \Delta\tau_k\right] : e_i^\circ \Delta\tau_i \tag{4.5}$$

Весовая тензорная функция $q(\tau_i - \tau_k)$ определяет вклад каждого предшествовавшего импульса в зависимости от его положения по отношению к моменту τ_i. При $\tau > \tau_i$ значение суммы остается неизменным.

Использование (2.1), (4.5) приводит к соотношению

$$\sigma(t) = c : e(t) - \int_0^t \varphi_2\left[t - \tau, \int_0^\tau q\,(\tau - \rho) : e(\rho)\, d\rho\right] : e(\tau)\, d\tau \tag{4.6}$$

Аналогичное соотношение, в котором $e(t) = F\{\sigma(\tau)\}$, предложено в [17]. В конкретизированной форме соотношение типа (4.6) предложено в [18].

Если функцию $q(\tau_i - \tau_k)$ в (4.5) заменить на $q(t - \tau_k)$, то вклад каждого из предшествовавших импульсов будет определяться его положением по отношению к моменту t и будет изменяться при $\tau > \tau_i$. Соответствующее более общее определяющее уравнение получается из (4.6) заменой $q(\tau - \rho)$ на $q(t - \rho)$. Аналогичное, но более конкретизированное соотношение предложено в [19].

Если учесть эффект и предшествовавших, и последующих импульсов, соответственно видоизменив зависимость (4.5), то можно прийти, например, к соотношению

$$\sigma(t) = c : e(t) - \int_0^t \varphi_3\left[t - \tau, \int_0^\tau q_1(t - \rho_1) : e(\rho_1)\, d\rho_1 + \right.$$

$$\left. + \int_\tau^t q_2(t - \rho_2) : e(\rho_2)\, d\rho_2\right] : e(\tau)\, d\tau$$

которое отражает тот факт, что предшествовавшие воздействия могут иначе влиять на свойства, чем последующие.

С помощью (2.1), (4.1) можно получить и соотношение

$$\sigma(t)=c{:}e(t)-\int_0^t\varphi_4\left\{a(t-\tau),\ \int_0^\tau g_1[t-\rho_1,e(\rho_1)]\,d\rho_1+\right.$$
$$\left.+\int_\tau^t g_2[t-\rho_2,e(\rho_2)]\,d\rho_2\right\}{:}\Phi[e(\tau)]\,d\tau$$

где a — константа, которая может принимать значение $a=0$; допустимо принять, что $g_1=g_2$. Оно тоже учитывает эффект всех импульсов и как частный случай содержит эндохронное соотношение (4.3), (4.4).

Пусть теперь тензор напряжений $\Delta\sigma_i(t)$ в (4.1) по-прежнему зависит от всех предшествовавших моменту τ_i и последующих вплоть до момента t импульсов $e_k(\tau)$, причем зависит следующим образом:

$$\Delta\sigma_i(t)=\left[\varphi_{1*}(t-\tau_i)+\sum_{p=0}^{n-1}\varphi_{2*}(t-\tau_i,t-\tau_p){:}e_p{}^\circ\,\Delta\tau_p+\right.$$
$$\left.+\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1}\varphi_{3*}(t-\tau_i,t-\tau_p,t-\tau_q){:}e_p{}^\circ{:}e_q{}^\circ\,\Delta\tau_p\,\Delta\tau_q+\ldots\right]{:}e_i{}^\circ\,\Delta\tau_i \qquad (4.7)$$

Использование той же самой зависимости (2.1) теперь приводит к кратно-интегральному представлению типа Вольтерра

$$\sigma(t)=\Phi[e(t)]-\sum_{m=1}^{M}\underbrace{\int_0^t\cdots\int_0^t}_{m}\varphi_m(t-\tau_1,t-\tau_2,\ldots,t-\tau_m)\prod_{s=1}^{m}e(\tau_s)\,d\tau_s$$

где $\Phi(e)$ — сумма степенного многочлена, символы скалярного произведения опущены (в [8] дана несколько иная интерпретация ряда, получающегося после подстановки (4.7) в (2.1)).

Таким образом, отказ от предположения о независимости свойств вязкоупругих сред от механического воздействия расширяет рамки принципа сложения, позволяет включить в основанную на нем теорию те определяющие соотношения, которые ранее считались противоречащими этому принципу. Единственным условием выполнения принципа в шкале t остается упругость при мгновенных изменениях деформаций. При этом упругость может быть не обязательно линейной.

5. Тензор деформаций как функционал тензора напряжений. Совместимость с термодинамикой. Как отмечалось, уравнения $e(t)=F\{\sigma(\tau)\}$ строятся на основе принципа сложения деформаций. История $\sigma(\tau)$ представляется в виде совокупности последовательных элементарных импульсов нагружения, одним из которых является импульс $\sigma_i(\tau)$ в интервале $\tau\in[\tau_i,\tau_{i+1})$; $\sigma_i(\tau)=0$ при $\tau<\tau_i$ и $\tau\geqslant\tau_{i+1}$. Для одномерного случая форма импульса и вызванной им деформации $e_i(t)$ как функции времени даны на фиг. 3, а, б. Формулируется зависимость для отклика на выделенный импульс и используется принцип сложения деформаций.

Уравнения, основанные на этом принципе, чаще проверяются в эксперименте, чем предыдущие. Сопоставление уравнений для идеальных сред с экспериментами на аморфных полимерах при заданных программах $\sigma=\sigma(\tau)$ дано в [3, 6, 7] и многих других работах. Уравнения интегрального типа применяют не только к полимерам, но и к низкомолекулярным материалам: грунтам, бетонам [1], металлам и сплавам (см. [20]). Сопоставление уравнений для упрочняющихся сред с экспериментами на мягкой углеродистой стали, алюминиевом сплаве Д-16 и кристаллическом полимере политетрафторэтилен дано в [7, 21], где применялось эндохронное уравнение типа Шепери с внутренним временем, зависящим от напряжений.

Для определяющих уравнений, основанных на принципе сложения, представляет интерес, прежде всего, совместимость с термодинамикой элементарного процесса в виде импульса. Предшествующее состояние считается недеформированным (но предшествовавшее воздействие может влиять на свойства упрочняющейся среды). Поскольку такой процесс замкнут, уместно использовать подход, основанный на рассмотрении циклических процессов. Процессы, по-прежнему, считаются изотермическими.

Вначале принимается, что $\sigma(t)=\Psi\{e(\tau)\}$. Как следует из уравнений термодинамики необратимых процессов, для импульса произвольной формы, замкнутого по деформациям, должно быть [22]:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma_i(\tau):e_i^{\cdot}(\tau)\,d\tau\geqslant 0 \tag{5.1}$$

(по индексу i суммирования нет), т. е. работа напряжений неотрицательна. Поскольку импульс прямоугольный, неупругий процесс реализуется при $e_i^{\cdot}(\tau)=0$. Поэтому работа в (5.1) есть работа напряжений на упругих деформациях e_i° в момент τ_i наложения деформаций и в момент τ_{i+1} снятия их, т. е. равна нулю. Таким образом, в (5.1) имеет место знак равенства.

Работа в макропроцессе деформаций $e(\tau)$ в интервале $\tau\in[0,t]$ есть сумма работ в элементарных импульсах. Поэтому, если в конце процесса $e(t)=0$, она равна нулю, а если $e(t)\neq 0$, она равна работе напряжений на упругих деформациях, равных $e(t)$, т. е. положительна. Следовательно, любые уравнения, основанные на принципе сложения напряжений, удовлетворяют термодинамическому неравенству (5.1). Материальные функции релаксации задаются так, чтобы отклик на воздействие в виде прямоугольного импульса при различных уровнях e_i° (см. фиг. 2, а) имел вид графика на фиг. 2, б.

Теперь принимается, что $e(t)=F\{\sigma(\tau)\}$. Для импульса произвольной формы, замкнутого по напряжениям, должно быть

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e_i(\tau):\sigma_i^{\cdot}(\tau)\,d\tau\leqslant 0 \tag{5.2}$$

т. е. дополнительная работа неположительна. Так как импульс прямоугольный, имеет место, как и в предыдущем случае, знак равенства. Переходя к макропроцессу нагружения, можно убедиться, что любые уравнения, основанные на принципе сложения деформаций, удовлетворяют неравенству (5.2). При этом не имеет значения степень механической обратимости деформаций ползучести, так как предположение о ней не используется. Материальные функции ползучести подбираются так, чтобы отклик на воздействие в виде прямоугольного импульса при различных уровнях σ_i° (см. фиг. 3, а) имел вид графика на фиг. 3, б.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат. 1952. 323 с.
2. *Persoz B.* Le principe de superposition de Boltzmann // Cahier Groupe Franc. Études Rhéol. 1957. T. 2. No 1. P. 18–39.
3. *Nolte K. G., Findley W. N.* Multiple step, nonlinear creep of polyurethane predicted from constant stress creep by three integral representation // Trans. Soc. Rheol. 1971. Vol. 15. No 1. P. 111–133.
4. *Вакуленко А. А.* Суперпозиция в реологии сплошной среды // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. 1970. № 1. С. 69–74.
5. *Вакуленко А. А.* К теории необратимых процессов // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер.: Мат., мех., астрон. 1969. Вып. 2. С. 84–90.
6. *Бугаков И. И.* Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука. 1973. 288 с.
7. *Бугаков И. И., Чеповецкий М. А.* Сравнительное исследование нелинейных уравнений вязкоупругости // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. XXVII. № 1. С. 56–63.

8. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука. 1970. 280 с.
9. *Бугаков И. И.* Исследование взаимосвязи между нелинейными уравнениями вязкоупругости, основанными на принципах сложения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер.: Мат., мех., астрон. 1987. Вып. 2. С. 47–51.
10. *Вакуленко А. А., Чебанов В. М.* О реологии вязкоупругой среды // Инж. журн. Мех. твердого тела. 1966, № 4. С. 127–129.
11. *Бугаков И. И.* Расчет нелинейного вязкоупругого поведения изотропных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. Л.: Судостроение. 1985. С. 4–8.
12. *Lai J. S. Y., Findley W. N.* Stress relaxation of nonlinear viscoelastic material under uniaxial strain // Trans. Soc. Rheol. 1968. Vol. 12. No 2. P. 259–280.
13. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука. 1977. 384 с.
14. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука. 1972. 327 с.
15. *Вилкс У. К., Крегерс А. Ф.* Сложное нагружение нелинейно ползучего полимерного материала // Мех. полимеров. 1967. № 3. С. 421–426.
16. *Schapery R. A.* On thermodynamic constitutive theory and its application to various nonlinear materials // Thermoinelasticity. Proc. IUTAM Symp. Wien-N. Y.: Springer-Verlag. 1970. P. 259–285.
17. *Ужахов А. М.* О существовании и единственности решений исходных нелинейных интегральных уравнений модифицированной наследственной теории ползучести // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Техн. н. 1979. № 2. С. 21–24.
18. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1981. 344 с.
19. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1984. 336 с.
20. *Клебанов Я. М., Сорокин О. В.* Приложение теории наследственности к описанию ползучести с частично обратимым анизотропным упрочнением // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Изд. ГГУ. 1984. С. 3–9.
21. *Бугаков И. И.* Эндохронные уравнения вязкоупругости и их экспериментальная проверка // Сб. докл. I конф. по механике. Прага-Братислава, 1987. Т. 3. С. 280–283.
22. *Клюшников В. Д.* Проблема определяющих уравнений: возможности и ограничения // Механика неоднородных структур. Матер. I. Всесоюз. конф. Киев.: Наук. думка. 1986. С. 87–91.

Ленинград

Поступила в редакцию
21.VI.1988