МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1989

УДК 539.374

Я. А. ЭЮБОВ

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Предлагается вариационный принцип смешанного типа для вязкоупругих тел, позволяющий учитывать накопление повреждений в материале и геометрическую нелинейность.

1. Построение вариационного принципа. Как известно [1], вязкоупругое деформирование может сопровождаться процессом накопления повреждений и имеется определенный круг задач, где существенно взаимодействие этих процессов. Для описания этого взаимодействия в физические соотношения вязкоупругости вводится ω — параметр повреждаемости в качестве структурного параметра [1]. Исходя из этого, соотношения вязкоупругости, считая объемную деформацию упругой, можно представить следующим образом [1]:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}g_{ij}\sigma^{ke}g_{ke}+\frac{3}{2}\int_0^t k(t-\tau,\omega)\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}g_{ij}\sigma^{ke}g_{ke}\right)d\tau \tag{1.1}$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформации, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, σ_{ij} — компоненты тензора напряжения, g_{ij} — компоненты метрического тензора, k — ядро ползучести, t — время.

Это соотношение замыкается кинетическим уравнением повреждаемости, которое, считая, что скорость поверждаемости не зависит от вязкоупругой деформации и является инвариантной величиной, возьмем в виде [1]:

$$\omega^{\cdot}=\varphi(\omega,I),\quad I^2={}^3/_2(\sigma^{ij}-{}^1/_3(g^{ij}\sigma^{ke}g_{ke}))(\sigma_{ij}-{}^1/_3(g_{ij}\sigma^{ke}g_{ke})) \tag{1.2}$$

где φ — функция повреждаемости, I — второй инвариант тензора напряжения.

Приведенные соотношения являются нелинейными, что затрудняет решение конкретных задач. Анализ усугубляется при учете больших перемещений, что характерно для задач вязкоупругости. Поэтому для решения конкретных задач целесообразно применять приближенные методы, в частности вариационные. Приведем один из возможных функционалов:

$$J=\int_V\Big\{\sigma^{ij\cdot}\varepsilon_{ij}^{\cdot\cdot}+\sigma^{ij}u_{,j}^{k\cdot}u_{k,i}^{\cdot\cdot}-\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}\sigma^{ij\cdot}+\frac{\nu}{E}g_{ij}\sigma^{ke\cdot}g_{ke}\sigma^{ij\cdot}-$$

$$-B_{1ij}\sigma^{ij\cdot}-B_{2ij}\sigma^{ij\cdot}\omega^{\cdot}+B_{2ij}\Big[\omega^{\cdot\cdot}-\frac{\partial\varphi}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ke}}\sigma^{ke\cdot}(1-\delta_k^i\delta_e^j)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\omega}\omega^{\cdot}\Big]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial I}-\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ij}}\right)^{-1}\omega^{\cdot}\Big\}dV-\int_{S_\sigma}T_0^{i\cdot}u_i^{\cdot\cdot}ds+\int_{S_u}T^{i\cdot}(u_i^{\circ\cdot\cdot}-u_i^{\cdot\cdot})ds$$

$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{,i}u_{k,j})$$

$$B_{1ij}=\frac{3}{2}\int_0^t K_t''(t-\tau,\omega)\sigma_{pq}A_{ij}^{pq}d\tau+\frac{3}{2}K_t'(0,\omega)\sigma_{pq}^{\cdot}A_{ij}^{pq}+\frac{3}{4}K(0,\omega)A_{pqij}\sigma^{pq\cdot}$$

$$B_{2ij}={}^3/_2(K_\omega'(0,\omega)\sigma_{pq}A_{ij}^{pq},\quad A_{ij}^{pq}=\delta_i^p\delta_i^q-{}^1/_3(g_{ij}g^{pq})$$

где u_i — вектор перемещения (запятая означает ковариантное дифференцирование), δ_j^i — символ Кронекера; штрих означает дифференцирование по указанному аргументу, а точка — дифференцирование по t. При записи функционала (1.3) считалось, что задача формулируется для случая, когда граничные условия разделены: S_σ — часть поверхности области V, занимаемой телом, на которой заданы усилия $T_0^k=\sigma^{ij}(\delta_j^k+u_{,j}^k)n_i$ (n_i — вектор нормали), а на оставшейся части поверхности задан вектор перемещения u_i°. Варьируемыми величинами являются $u_i^{\cdot\cdot}$, $\sigma^{ij\cdot}$, $\omega^\cdot$. При этом предполагается, что оператор варьирования δ действует лишь на варьируемые величины [3]. Кроме того, величины $[(\partial\varphi/\partial I)(\partial I/\partial\sigma^{ij})]^{-1}$ по $\sigma^{ij\cdot}$ не варьируются.

Предлагаемый принцип гласит, что те функции, которые определяют стационарное значение функционала (1.3) при вышеописанных условиях варьирования, определяют также нелинейное поведение вязкоупругого тела с учетом повреждаемости, т. е. они удовлетворяют уравнениям равновесия $[\sigma^{ij}(\delta_j^k+u_{,j}^k)]_{,i}=0$, определяют перемещения через напряжения, удовлетворяют граничным условиям $T^i=T_0^i(x\in S_\sigma)$, $u_i=u_i^\circ$ $(x\in S_u)$ и при этом выполняется кинетическое уравнение повреждаемости (1.2).

Докажем приведенное утверждение. Для этого найдем первую вариацию функционала (1.3). С учетом условий варьирования, она имеет вид

$$\delta J=\int_V\Big\{\delta\sigma^{ij\cdot}\varepsilon_{ij}^{\cdot\cdot}-[\sigma^{ij\cdot}(\delta_j^k+u_{,i}^k)]_{,i}\delta\omega_k^{\cdot\cdot}-(\sigma^{ij}u_{,j}^{k\cdot})_{,i}\,\delta u_k^{\cdot\cdot}-$$

$$-\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}\delta\sigma^{ij\cdot}+\frac{\nu}{E}g_{ij}g_{ke}\sigma^{ke\cdot\cdot}\,\delta\sigma^{ij\cdot}-B_{1ij}\,\delta\sigma^{ij\cdot}-$$

$$-\frac{3}{4}K(0,\omega)A_{pqij}\,\delta\sigma^{pq\cdot}\sigma^{ij\cdot}-B_{2ij}\,\delta\sigma^{ij\cdot}\omega^\cdot-B_{2ij}\sigma^{ij\cdot}\,\delta\omega^\cdot+$$

$$+B_{2ij}\left(\omega^{\cdot\cdot}-\frac{\partial\varphi}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ke}}(1-\delta_k^i\delta_e^j)-\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\omega^\cdot\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ij}}\right)^{-1}\delta\omega^\cdot\Big\}dV-$$

$$-\int_S[\sigma^{ij\cdot}(\delta_j^k+u_{,j}^k)+\sigma^{ij}u_{,j}^{k\cdot}]n_i\delta u_k^{\cdot\cdot}\,ds-\int_{S_\sigma}T_0^{i\cdot}\delta u_i^{\cdot\cdot}\,ds-$$

$$-\int_{S_u}[\delta T^{i\cdot}(u_i^{\cdot\cdot}-u_i^{\circ\cdot\cdot})+T^{i\cdot}\,\delta u_i^{\cdot\cdot}]ds$$

Уравнения Эйлера функционала (1.3) есть

$$\{[\sigma^{ij}(\delta_j^k+u_{,j}^k)]_{,i}\}=0$$

$$\varepsilon_{ij}^{\cdot\cdot}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}-\frac{\nu}{E}g_{ij}\sigma^{ke\cdot\cdot}g_{ke}+B_{1ij}+\frac{3}{4}K(0,\omega)A_{pqij}\sigma^{pq\cdot}+B_{2ij}\omega^\cdot$$

$$B_{2ij}\sigma^{ij\cdot}=B_{2ij}\left[\omega^{\cdot\cdot}-\frac{\partial\varphi}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ke}}(1-\delta_k^i\delta_e^j)-\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\omega^\cdot\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ij}}\right)^{-1}\quad(x\in V)$$

$$[\sigma^{ij}(\delta_j^k+u_{,j}^k)n_i]^\cdot=T_0^{i\cdot}(x\in S_\sigma),\quad u_i^{\cdot\cdot}=u_i^{\circ\cdot\cdot}(x\in S_u)$$

Преобразуем эту систему. Из выражения (1.1) имеем

$$\varepsilon_{ij}^{c\cdot\cdot}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}-\frac{\nu}{E}g_{ij}\sigma^{ke\cdot\cdot}g_{ke}+\frac{3}{2}\int_0^t K_t''(t-\tau,\omega)\sigma_{pq}A_{ij}^{pq}\,d\tau+$$

$$+{}^3/_2(K_t'(0,\omega)\sigma_{pq}A_{ij}^{pq})+{}^3/_2(K_\omega'(0,\omega)\omega^\cdot\sigma_{pq}A_{ij}^{pq})+{}^3/_2(K(0,\omega)\sigma_{pq}^{\cdot}A_{ij}^{pq})$$

или же с учетом введенных обозначений B_{kij} получим

$$\varepsilon_{ij}^{c\cdot\cdot}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}-\frac{\nu}{E}g_{ij}\sigma^{ke\cdot\cdot}g_{ke}+B_{1ij}+\frac{3}{4}K(0,\omega)A_{pqij}\sigma^{pq\cdot}+B_{2ij}\omega^{\cdot}$$

т. е. имеем $\varepsilon_{ij}^{\cdot\cdot}=\varepsilon_{ij}^{c\cdot\cdot}$. Считая, что $B_{2ij}[(\partial\varphi/\partial I)(\partial I/\partial\sigma^{ij})]^{-1}\neq 0$, т. е. что σ_{ij} независимы, имеем

$$\sigma^{ij\cdot}\frac{\partial\varphi}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ij}}=\omega^{\cdot\cdot}-\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\omega^{\cdot}-\frac{\partial\varphi}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial\sigma^{ke}}\sigma^{ke\cdot}(1-\delta_k^{\ i}\delta_e^{\ j})$$

Или после очевидного преобразования: $[\omega^{\cdot}-\varphi(\omega, I)]^{\cdot}=0$.

Уравнения Эйлера окончательно представим в виде

$$\begin{aligned}&\{[\sigma^{ij}(\delta_j^k+u_{,j}^{\ k})]_{,i}\}=0,\quad \{\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^c\}^{\cdot\cdot}=0\quad (x\in V)\\&\{T^i-T_0^{\ i}\}^{\cdot}=0\ \ (x\in V),\quad \{u_i-u_i^{\circ}\}^{\cdot\cdot}=0\ \ (x\in S_u)\end{aligned}\tag{1.4}$$

Из вида системы (1.4) имеем, что ее можно проинтегрировать по времени. Для этого поставим начальные условия. Первоначально решим нелинейную вязкоупругую задачу с вышепоставленными граничными условиями, но с ядром равным $K(t-\tau, 0)$. За начальное условие для решения (1.4) примем решение построенной вязкоупругой задачи с этим ядром. Кроме того, сюда необходимо присовокупить начальные условия для функции поврежлаемости: $\omega=0$, $\omega^{\cdot}=\varphi(0, I(0))$, $t=0$. Очевидно, что поставленное так начальное условие позволяет проинтегрировать систему (1.4), причем после интегрирования получается система аналогичная (1.4). Получаемая таким образом система совпадает с приведенными выше соотношениями, что доказывает предложенный принцип.

Из выражения для функционала следует, что хотя в подынтегральном выражении и есть деление, но (1.3) не имеет особенности так как в случае, когда φ не зависит от σ^{ij}, функция ω находится независимо. Относительно выбора начальных условий отметим, что для интегрирования системы (1.4) необходимо было знать не только напряженно-деформированное состояние в момент времени $t=0$, но и скорость изменения этого состояния в начальный момент.

2. Пример. Рассмотрим задачу о растяжении прямолинейного стержня прямоугольного сечения $1\times 2h$ и длиной l. Пусть стержень растягивается равномерно распределенной по торцам нагрузкой интенсивности $Q(t)$. Определяющее соотношение вязкоупругости для одномерного случая и кинетическое уравнение повреждаемости возьмем в виде (A, B — постоянные):

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+A\int_0^t\frac{\sigma}{(1-\omega)^m}d\tau,\qquad \omega^{\cdot}=B\frac{\sigma^p}{(1-\omega)^q}\tag{2.1}$$

С учетом лишь нелинейности продольного перемещения u (в задачах растяжения прогиб равен нулю), функционал (1.3) примет вид

$$\begin{aligned}J=\int_0^l\int_{-h}^h\Big\{&\sigma^{\cdot}\left[\frac{\partial u^{\cdot\cdot}}{\partial x}+\left(\frac{\partial u^{\cdot\cdot}}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u^{\cdot\cdot}}{\partial x}\right]+\sigma\frac{\partial u^{\cdot}}{\partial x}\frac{\partial u^{\cdot\cdot}}{\partial x}-\frac{1}{E}\sigma^{\cdot\cdot}\sigma^{\cdot}-\\&-{}^1/_2(1-\omega)^{-m}A\sigma^{2\cdot}-A(1-\omega)^{-m-1}m\sigma\omega^{\cdot}\sigma^{\cdot}+[\omega^{\cdot\cdot}-{}^1/_2B\sigma^pq\omega^{\cdot}(1-\omega)^{-q-1}]\times\\&\times\omega^{\cdot}(Am/BP)\sigma^{2-p}(1-\omega)^{-1+q-m}\Big\}dx\,dz-2hQ^{\cdot}[u^{\cdot\cdot}(l)-u^{\cdot\cdot}(0)]\end{aligned}$$

где x — продольная координата. Примем, что все искомые величины не зависят от поперечной координаты z, а зависимость от x представим следующим образом:

$$\sigma=N_1/(2h),\quad u=u_1x,\quad \omega=\omega_1\tag{2.3}$$

где N_1, u_1, ω_1 — искомые функции времени и нагрузки. Учитывая аппроксимацию (2.3) в функционале (2.2), получим (индексы 1 опущены):

$$J=l\{N^{\cdot}(u^{\cdot\cdot}+u^{2\cdot}+uu^{\cdot\cdot})+Nu^{\cdot}u^{\cdot\cdot}-(E2h)^{-1}N^{\cdot\cdot}N^{\cdot}-0{,}5A(1-\omega)^{-m}(2h)^{-1}N^{2\cdot}-$$
$$-A(1-\omega)^{-m-1}m(2h)^{-1}N\omega^{\cdot}N^{\cdot}+[\omega^{\cdot\cdot}-0{,}5BN^{p}(2h)^{-p}q\omega^{\cdot}(1-\omega)^{-q-1}]\times$$
$$\times\omega^{\cdot}(Am/BP)(1-\omega)^{-m-1+q}N^{2-p}(2h)^{p-1}-2hQ^{\cdot}u^{\cdot\cdot}\}$$

Так как варьируемыми функциями являются $N^{\cdot}$, $\omega^{\cdot\cdot}$, $\omega^{\cdot}$, то условие стационарности приведенной функции определяется из следующей системы:

$$\partial J/\partial u^{\cdot\cdot}=N^{\cdot}(1+u)+Nu^{\cdot}-2hQ^{\cdot}=0$$

$$\partial J/\partial N^{\cdot}=u^{\cdot\cdot}+u^{2\cdot}+uu^{\cdot\cdot}-(E2h)^{-1}N^{\cdot\cdot}-A(1-\omega)^{-m}N^{\cdot}/2h-$$
$$-A(1-\omega)^{-m-1}m\omega^{\cdot}N/2h=0 \qquad (2.4)$$

$$\partial J/\partial\omega^{\cdot}=-A(1-\omega)^{-m-1}mNN^{\cdot}(4h^{2})^{-1}+$$

$$+[\omega^{\cdot\cdot}-BN^{p}(2h)^{-p}q\omega^{\cdot}(1-\omega)^{-q-1}(Am/BP)N^{2-p}2h^{p-2}(1-\omega)^{-m-1+q}$$

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений, поставим начальные условия. Исходя из приведенного вариационного принципа имеем, что оно определяется из решения вышепоставленной задачи, но при следующем определяющем соотношении, отличном от (2.1):

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+A\int_0^t\sigma\,d\tau$$

Очевидно, что эту задачу необходимо решать в тех же предположениях, при которых строился функционал (2.2) и, используя аналогичный метод. В частности можно воспользоваться вариационным принципом Рейснера для вязкоупругих тел [1]. Итак, функционал имеет вид:

$$J=\int_0^l\int_{-h}^{h}\left\{\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{1}{2E}\sigma^2-\right.$$
$$\left.-A\sigma\int_0^t\sigma\,d\tau\right\}dx\,dz-2hQ[u(l)-u(0)]$$

где варьируемыми величинами являются u,σ, а интеграл по времени не варьируется.

Приняв аппроксимацию (2.3), определяющую систему представим следующим образом

$$N(1+u)=2hQ; \qquad u+0{,}5u^2=N(E2h)^{-1}+A(2h)^{-1}\int_0^t N\,d\tau \qquad (2.5)$$

Так из системы (2.5) определяются начальные условия для решения системы уравнений (2.4), а именно: при $t=0$ из (2.5) находим $u, u^{\cdot}, N, N^{\cdot}$. Дополним эти начальные условия следующими

$$\omega=0,\ \omega^{\cdot}=B[N(0)/2h]^{p} \quad (t=0) \qquad (2.6)$$

Таким образом, для решения системы дифференциальных уравнений (2.4) имеем начальные условия (2.6), определенные из (2.5). В общем случае систему необходимо решать численно.

Рассмотрим частный случай, когда мгновенной деформацией можно пренебречь. В этом случае систему (17) можно один раз проинтегрировать. Тогда исключив N и приняв Q const, получим

$$u^{\cdot}(1+u)=A(1-\omega)^{-m}Q(1+u)^{-1}, \quad \omega^{\cdot}=B(1-\omega)^{-q}Q^{p}(1+u)^{-p}$$

где начальные условия имеют вид: $\omega=0$; $u=0$. Отсюда имеем

$$t=B^{-1}\int_0^{\omega}(1-\omega)^q Q^{-p}\{(A/B)Q^{1-p}((3-P)/(q-m+1))\times$$
$$\times[1-(1-\omega)^{q-m+1}]+1\}^{p/(3-p)}\,d\omega$$

Критическое время разрушения t_* определяется из условия $\omega=1$:

$$t_*=B^{-1}\int_0^1(1-\omega)^q Q^{-p}\{1-(A/B)Q^{1-p}((3-P)/(q-m+1))\times$$
$$\times[(1-\omega)^{q-m+1}-1]\}^{p/(3-p)}\,d\omega \qquad (2.7)$$

Величина t_* зависит, в отличие от геометрически линейной теории от параметров A и m определяющего соотношения. Отметим, что случай, когда интеграл (2.7) имеет особенность, соответствует бесконечному удлинению стержня без разрушения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Сергеев М. В.* Смешанный вариационный принцип теории ползучести в задачах длительной прочности // Изв. АН СССР. МТТ. № 6. 1982. С. 112–116.
3. *Эюбов Я. А.* Об учете повреждаемости при расчете конструкций, проявляющих вязкоупругие свойства // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1989. № 2. С. 39–42.

Баку

Поступила в редакцию
5.I.1988