МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1989

УДК 539.374

Э. И. БЛИНОВ

О ВОЗМОЖНОМ ПУТИ ПОСТРОЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИИ

Теория деформации твердого тела во времени, учитывающая неравновесность состояния и поэтому названная кинетической, построена на основании только основных законов термодинамики, из которых сделаны новые выводы. Полученные таким образом уточнение теории пластичности учитывает влияние времени на напряженно-деформированное состояние твердого тела.

1. Введение. Как известно, со времени основополагающих исследований Сен-Венана и Леви в теории пластичности эффектами влияния времени на деформацию обычно пренебрегается. Однако многие изделия в настоящее время испытывают деформации в условиях существенно изменяющихся температур и скоростей внешних воздействий, когда эффекты влияния времени выдвигаются в число основных и во многом определяют картину процесса. Естественно поэтому, что проблема соответствующего уточнения определяющих соотношений теории пластичности уже довольно давно привлекает внимание исследователей. Так попытки учета влияния времени на деформацию в теории пластичности предпринимались, например, в работах [1—6].

Предпринимались попытки построения теорий деформации твердого тела и исходя непосредственно из основных законов термодинамики [3—6]. Однако сделать в этом направлении удалось пока немногое главным образом потому, что равновесные и неравновесные состояния в процессе необратимой деформации твердого тела, как правило отождествлялись, а так же и по ряду других причин.

Основная идея кинетических теорий деформации, как теорий, учитывающих неравновесность состояния в процессе деформирования твердого тела, реализована путем разделения напряжений на «равновесные» и «неравновесные» в [6] в рамках энтропийного подхода к этому процессу. В публикуемой работе дается построение кинетической теории деформации твердого тела во времени, основанной на энергетическом подходе. Построение такой теории начнем с анализа термодинамики процесса деформации металлического конгломерата. В отличие от жидкостей и газов деформация твердого тела имеет специфическую особенность, отмеченную в [3, 7]. Эта особенность заключается в том, что как бы медленно ни нагружалось твердое тело обязательно наступит момент, начиная с которого его деформация будет зависеть от истории нагружения. С точки зрения темродинамики это означает, что при квазистатическом нагружении твердого тела может происходить процесс необратимой деформации, составленный из последовательности равновесных состояний [3, 7]. Очевидно, что при нагружениях с конечными скоростями деформация является существенно неравновесным необратимым термодинамическим процессом. Поэтому создание теории деформации твердого тела во времени является задачей неравновесной термодинамики. Полагая в основу создаваемой теории, как это принято в неравновесной термодинамике твердого тела, основные законы сохранения и принципы объективности, непрерывности, локальности и существования основного состояния, переходим от реального твердого тела к сплошной среде, а в ней от глобальных параметров объема и давления к локальным — тензорам напряжений и деформаций. При этом под термодинамической системой понимается малая окрестность точки сплошной среды, характеризующая состояние в этой точке, или так называемый феноменологический элемент [4].

Согласно принципу существования основного состояния (нулевому началу термодинамики), если в какой-либо момент процесса зафиксировать внешние параметры системы и далее поддерживать их неизменными, то система со временем придет в состояние полного (термодинамического) равновесия. При этом поддерживание внешних параметров неизменными вовсе не означает изолирования системы. Требование изоляции более сильное условие и здесь излишне. Для образца (элемента), деформируемого в обычных условиях (неизменяемость электромагнитных и других немеханических, кроме температурного полей), полную систему внешних параметров образуют компоненты тензора деформаций и температура. Это и означает (в силу нулевого начала), что с фиксированием компонент тензора деформаций и температуры образец (элемент) со временем приходит в состояние термодинамического равновесия путем релаксации напряжений. В результате каждому состоянию элемента в любом процессе можно сопоставить вполне определенное равновесное его состояние, а именно то, в которое перешел бы элемент из данного состояния, если бы в последнем зафиксировать его деформацию и температуру. Это позволяет, в свою очередь, тензор напряжений в любом состоянии элемента представить в виде суммы двух тензоров.

$$\sigma_{ij}=\varphi_{ij}+\psi_{ij} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{1.1}$$

где φ_{ij} — компоненты тензора напряжений в соответствующем данному равновесном состоянии; ψ_{ij} — компоненты тензора напряжений, характеризующего разницу между данным и соответствующим ему равновесным состоянием, так что $\psi_{ij}=\sigma_{ij}-\varphi_{ij}$ — компоненты тензора данных (полных) напряжений. Следуя [6], тензор напряжений φ_{ij} будем называть тензором равновесных, а ψ_{ij} — тензором неравновесных напряжений.

2. Диссипативная функция и уравнения состояния. В термомеханике тип сплошной среды (в смысле «реологического закона» исследуемого материала) полностью определяется спецификой ее диссипации, для феноменологического элемента обычно записываемой в виде диссипативной функции, а соотношения между напряжениями и деформациями, найденные по известной диссипативной функции, являются соотношениями, определяющими среду [4].

В общем виде диссипативная функция элемента сплошной среды (Φ) выражается вторым началом термодинамики, сформулированным в виде локального неравенства Клаузиуса — Дюгема

$$\Phi=\dot{s}+(q_i/T)_{,i}\geqslant 0 \tag{2.1}$$

которое здесь является суммой неравенств Планка и Фурье.

Конкретизацию диссипативной функции для исследуемого типа сред проведем воспользовавшись полученным в виде (1.1) результатом применения к их элементу нулевого начала и первым началом термодинамики в форме уравнения притока тепла

$$q_{i,\,i}=\dot{u}-\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{2.2}$$

Подставим теперь в (2.1) значение $(q_i/T)_{,i}$, а затем значение $-q_{i,\,i}$ из (2.2). При этом получим равенство

$$T(\dot{s}-\Phi)=q_iT_{,i}/T+\dot{u}-\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем ε_{ij} — компоненты тензора полных относительных деформаций; u, s — плотности внутренней энергии и энтропии; T — абсолютная температура; q_i — компоненты вектора скорости потока тепла. Обозначение декартова тензора обычное. Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, а по повторяющимся индексам происходит суммирование. Точка вверху означает дифференцирование по времени t, а после запятой — производную по соответственной координате.

Имеет смысл принять, что $u=u(\varepsilon_{ij}^e, \eta_{ij}, T)$, $s=s(\varepsilon_{ij}^e, \eta_{ij}, T)$, где $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^e+\varepsilon_{ij}^i$ (ε_{ij}^e, ε_{ij}^i — компоненты тензоров обратимой и необратимой составляющих полной относительной деформации ε_{ij}); η_{ij} — компоненты некоторого тензора второго ранга, связанного с неравновесностью в системе. При этом можем записать

$$u^{\cdot}=\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}^e}\varepsilon_{ij}^{\cdot e}+\frac{\partial u}{\partial \eta_{ij}}\eta_{ij}^{\cdot}+\frac{\partial u}{\partial T}T^{\cdot}, \quad s^{\cdot}=\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}^e}\varepsilon_{ij}^{\cdot e}+\frac{\partial s}{\partial \eta_{ij}}\eta_{ij}^{\cdot}+\frac{\partial s}{\partial T}T^{\cdot} \tag{2.4}$$

Подставив значение $u^{\cdot}$ в (2.3) и учитывая (1.1), получим соотношение

$$T(s^{\cdot}-\Phi)=(\partial u/\partial \varepsilon_{ij}^e-\varphi_{ij})\varepsilon_{ij}^{\cdot e}+(\partial u/\partial \eta_{ij}-\psi_{ij})\eta_{ij}^{\cdot}+ \tag{2.5}$$
$$+\partial u/\partial T T^{\cdot}-(\varphi_{ij}\varepsilon_{ij}^{\cdot i}+\psi_{ij}\mu_{ij}^{\cdot}-q_i T_{,i}/T)$$

$$\mu_{ij}^{\cdot}=\varepsilon_{ij}^{\cdot}-\eta_{ij}^{\cdot} \tag{2.6}$$

В правой части соотношения (2.5) линейную форму от тех же скоростей $\varepsilon_{ij}^{\cdot e}$, $\eta_{ij}^{\cdot}$, $T^{\cdot}$, что и в (2.4), представляют три первых члена, т. е. можно принять

$$Ts^{\cdot}=\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}^e}-\varphi_{ij}\right)\varepsilon_{ij}^{\cdot e}+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_{ij}}-\psi_{ij}\right)\eta_{ij}^{\cdot}+\frac{\partial u}{\partial T}T^{\cdot} \tag{2.7}$$

и, следовательно, искомая диссипативная функция

$$\Phi=(\varphi_{ij}\varepsilon_{ij}^{\cdot i}+\psi_{ij}\mu_{ij}^{\cdot}-q_i T_{,i}/T)T^{-1} \tag{2.8}$$

Причем второй закон термодинамики требует, чтобы $\Phi\geqslant 0$.

Отметим, что диссипативная функция в виде (2.8) впервые была получена в [6], но на основании энтропийного подхода к явлению деформации твердого тела.

Сравнивая правые части (2.7) и второго равенства (2.4) получаем уравнения состояния в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}^e}-\varphi_{ij}=T\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}^e}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta_{ij}}-\psi_{ij}=T\frac{\partial s}{\partial \eta_{ij}}, \quad \frac{\partial u}{\partial T}=T\frac{\partial s}{\partial T}$$

Введя в рассмотрение плотность свободной энергии $F=u-Ts$, эти же уравнения можно записать так:

$$\varphi_{ij}=\partial F/\partial \varepsilon_{ij}^e, \quad \psi_{ij}=\partial F/\partial \eta_{ij}, \quad -s=\partial F/\partial T \tag{2.9}$$

Первое и последнее из этих соотношений есть классические соотношения для напряжений (равновесных) и энтропии, что свидетельствует в пользу принятия (2.7).

3. Определяющие уравнения. Получив диссипативную функцию находим определяющие соотношения исследуемой среды. Третий член справа в (2.8) связан с теплопроводностью, определяя часть диссипации, ею обусловленную. Но законы теплопроводности хорошо известны. Они мало зависят от того обратимой или необратимой является деформация, т. к. теплопроводность представляет собой структурно нечувствительное явление. Поэтому, чтобы не усложнять исследований, дальше пойдем путем, отличным от предложенного в [6].

Исключим теплопроводность из рассмотрения и будем считать поле температуры однородным, так что $T_{,i}=0$, хотя, может быть, и изменяющимся во времени (достаточно медленно). При этом диссипативная функция принимает вид

$$\Phi=(\varphi_{ij}\varepsilon_{ij}^{\cdot i}+\psi_{ij}\mu_{ij}^{\cdot})T^{-1}\geqslant 0 \tag{3.1}$$

откуда следует, что каждая из «термодинамических» (обобщенных) сил φ_{ij} и ψ_{ij} является некоторым функционалом от всех обобщенных скоростей, т. е. от $\varepsilon_{ij}^{\cdot i}$ и $\mu_{ij}^{\cdot}$. Но из неравенства (3.1) невозможно установить конкретный вид этих функционалов. Поэтому ограничимся следующим. Связь между равновесными напряжениями и обобщенными скоростями представляет собой определяющие соотношения только равновесного процесса, в котором $\eta_{ij}^{\cdot}=0$ по определению и, следовательно, согласно (2.6), $\mu_{ij}^{\cdot}=\varepsilon_{ij}^{\cdot}$. Таким образом, равновесные напряжения фактически связаны только со скоростями деформаций, а это — определяющие уравнения упругопластичности, которые будем принимать за уже известные соотношения между равновесными напряжениями и скоростями деформаций. Причем, согласно принятому разделению деформаций ($\varepsilon_{ij}^{\cdot}=\varepsilon_{ij}^{e}+\varepsilon_{ij}^{i}$), за соотношения между φ_{ij} и $\varepsilon_{ij}^{\cdot e}$ будем принимать определяющие уравнения теории упругости, а за соотношения между φ_{ij} и $\varepsilon_{ij}^{\cdot i}$ — определяющие уравнения теории пластичности. Далее, поскольку с переходом в равновесное состояние будет как $\psi_{ij}=0$, так и $\mu_{ij}^{\cdot}=\varepsilon_{ij}^{\cdot}$, т. е. $\mu_{ij}^{\cdot}$ как самостоятельный параметр при этом исчезает, то соотношения между ψ_{ij} и скоростями $\varepsilon_{ij}^{\cdot i}$ и $\mu_{ij}^{\cdot}$ должны быть такими, чтобы из $\mu_{ij}^{\cdot}=0$ следовало $\psi_{ij}=0$ (и наоборот). Это позволяет записать соотношение

$$\mu_{ij}^{\cdot}=a_{ijmn}\psi_{mn} \tag{3.2}$$

где a_{ijmn} некоторым образом зависит от T и от скорости $\varepsilon_{ij}^{\cdot i}$, причем зависимость от скорости $\varepsilon_{ij}^{\cdot i}$ здесь дает возможность учесть влияние пластической деформации на ползучесть и релаксацию, которой в первом приближении можно пренебречь.

Получим еще одно необходимое соотношение. Для этого разложим выражение свободной энергии $F=F(\varepsilon_{ij}^{e}, \eta_{ij}, T)$ в ряд Тейлора по отношению к естественному состоянию, в котором $\varepsilon_{ij}^{e}=0$; $\eta_{ij}=0$, $T=T_0$ (через $T=T_0$ обозначена абсолютная температура равновесного состояния, в котором как деформация так и напряжения равны нулю) и пренебрежем всеми степенями выше второй. При этом, учитывая вышепринятые ограничения, из второго уравнения состояния (2.9) получим соотношение

$$\psi_{ij}=b_{ijmn}\eta_{mn} \tag{3.3}$$

где b_{ijmn} — механические материальные константы.

Соотношения (3.2) и (3.3), с учетом (2.6), дают тензорное дифференциальное уравнение

$$\psi_{ij}+C_{ijmn}\psi_{mn}^{\cdot}=A_{ijmn}\varepsilon_{mn}^{\cdot} \tag{3.4}$$

Это уравнение, вместе с определяющими уравнениями теории упругопластичности, связывающими равновесные напряжения и деформации, образуют систему определяющих соотношений построенной теории, учитывающей «влияние времени» на необратимую деформацию.

Согласно принципу макроскопической определенности в соответствие феноменологическому элементу может быть поставлено тело конечных размеров, например, образец в виде тонкостенной цилиндрической трубки. Это дает возможность следующим образом конкретизировать математическую формулировку полученной теории. Проведя эксперименты, отражающие суть исследуемого конкретного случая деформации, достаточно медленно (квазистатически) получим результаты для описания которых выбираем подходящий вариант теории пластичности. Его определяющие уравнения принимаем за соотношения между равновесными напряжениями и скоростями необратимых деформаций. Например, для случаев простого нагружения можно ограничиться относительно простыми определяющими уравнениями деформационной теории пластичности или теории течения с регулярной поверхностью нагружения, в то время как при сложных нагружениях необходимо принимать определяющие уравнения теории течения с сингулярной поверхностью нагружения, или теории скольжения.

Здесь уместно отметить, что если за соотношения между равновесными напряжениями и скоростями необратимых деформаций принять определяющие уравнения теории течения с регулярной поверхностью нагружения, то полученный таким образом случай предложенной выше теории деформации будет совпадать с одним из вариантов теории, учитывающей микронапряжения [1]. Можно установить и другие аналоги.

Построенная теория деформации твердого тела во времени, как предложенная в [6], учитывает неравновесность состояния в процессе его деформации и, следовательно, тоже является кинетической. Но, в отличие от рассмотренного в [6] энтропийного подхода, эта теория разработана на основании энергетического подхода к явлению деформирования твердого тела. Полученные при этом результаты принципиально отличаются от приведенных в [6]. Вместе с тем условия вывода соотношения (3.2) допускают его запись в виде $\mu_{ij,\,-\lambda}=a_{ijmn}\psi_{mn}$, где $0<\lambda\leqslant1$ — показатель дробной производной по времени. Поэтому обобщение изложенной в [6] теории, приведенное в [9], распространяется и на полученную кинетическую теорию деформации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 99–110.
2. *Русинко К. Н.* Теория пластичности и неустановившейся ползучести. Львов: Вища шк., 1981. 148 с.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
4. *Вакуленко А. А.* О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. № 1. С. 3–35.
5. *Хорошун Л. П.* Термодинамические основы реологии // Прикл. Механика. 1965. Т. 1. № 1. С. 92–97.
6. *Русинко К. Н., Блинов Э. И.* Аналитическое описание термоупругопластического деформирования твердого тела // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 11. С. 48–53.
7. *Вакуленко А. А.* К вопросу о возможности необратимых квазистатических процессов в микросистеме // ПММ. 1984. Вып. 4. С. 700–704.
8. *Блинов Э. И.* Математическое описание неустановившейся ползучести // Пробл. прочности. 1984. № 6. С. 15–18.
9. *Блинов Э. И.* К вопросу обобщения кинетической теории деформации // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Горький: Горьк. ун-т, 1988. С. 10–15.

Львов

Поступила в редакцию
10.V.1988