МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1989

УДК 539.374

Э. С. МАКАРОВ

ВАРИАНТ ПОСТРОЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ХЕМОПЛАСТИЧНОСТИ

Предлагается вариант построения теории хемопластичности, в рамках которого используются совместные инварианты тензора напряжений и тензора химического потенциала. Даются решения некоторых плоских задач о предельных состояниях, обобщающие известные в теории пластичности неоднородных тел результаты. Полученные зависимости могут быть использованы при оценке предельных нагрузок в условиях коррозии под напряжением, совместной пластической деформации разных металлов и так далее.

1. Построение теории хемопластичности. Теория хемопластичности возникает как обобщение классической теории пластичности [1, 2], если условие текучести формулируется с учетом свойств химического потенциала, впервые подробно рассмотренных в [3], и представляет в таком виде обобщение условия Губера — Мизеса — Ольшака

$$s_{ij}^{\circ} s_{ij}^{\circ} = 2k^2 \tag{1.1}$$

где s_{ij}° — девиатор обобщенных напряжений, k — функция пластической неоднородности, равная пределу текучести при чистом сдвиге, изменяющемуся от точки к точке.

Зависимость между тензорами напряжений σ_{ij}, обобщенных напряжений σ_{ij}° и относительного химического потенциала μ_{ij} записывается следующим образом:

$$\sigma_{ij}^{\circ} = {}^1/_2 (\mu_{ik}\sigma_{kj} + \mu_{jk}\sigma_{ki}) \tag{1.2}$$

При $\mu_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера) получаем $\sigma_{ij}^{\circ} = \sigma_{ij}$, т. е. приходим к классическому случаю [1, 2].

Уравнения равновесия имеют обычный вид

$$\sigma_{ij,\,j} = 0 \tag{1.3}$$

Применительно к плоским задачам удобно ввести функцию напряжений Эйри по формулам

$$\sigma_{xx} = \varphi_{,yy}, \quad \sigma_{yy} = \varphi_{,xx}, \quad \sigma_{xy} = -\varphi_{,xy} \tag{1.4}$$

Тогда уравнения равновесия (1.3) удовлетворяются тождественно, а условие хемопластичности (1.1) с учетом соотношения (1.2) принимает вид

$$(\mu_{xx}\varphi_{,yy} - \mu_{yy}\varphi_{,xx})^2 + [\mu_{xy}(\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy}) - (\mu_{xx} + \mu_{yy})\varphi_{,xy}]^2 = 4k^2 \tag{1.5}$$

Соотношения между скоростями деформаций и напряжениями формулируются на основе ассоциированного закона течения. Поскольку в дальнейшем рассматриваются задачи о предельных состояниях, указанные зависимости здесь не выписываются. Тензор химического потенциала считается известным.

Отметим некоторые возможности экспериментального обоснования условия хемопластичности (1.1). В [4] показано, что применение классических условий текучести для описания процессов пластической деформации полимерных материалов приводит к существенному расхождению расчетных и экспериментальных данных. Например, при шейкообразовании направление линий сдвига составляет 50...57°

с осью растяжения и «...причины такого расположения линий сдвига остаются неясными [4]».

Между тем, если обычными способами [5] найти характеристики полной системы уравнений плоского напряженного состояния, то для угла наклона шейки к оси растяжения плоского образца получим соотношение $\sec^2\alpha=1+2\mu_{yy}/\mu_{xx}$, которое в классическом случае $\mu_{xx}=\mu_{yy}=1$ дает $\alpha=54°44'$, а при $\mu_{xx}/\mu_{yy}=0{,}8\ldots 1{,}4$ охватывает вышеуказанный диапазон углов линий сдвига.

Аналогично объясняется приведенный в [6] пример распределения ржавчины на поверхности вращающегося стального диска после коррозии, если предположить, что коррозионные спирали совпадают с характеристиками соответствующих дифференциальных уравнений.

В пользу условия хемопластичности (1.1) можно привести также примеры, относящиеся к сварке металлов давлением, гальванопластике и многим другим твердофазным процессам, ускорение которых стимулируется механическими методами [7, 8].

2. Решение плоской задачи, зависящее от одной произвольной функции точки. Пусть функция Эйри удовлетворяет следующему уравнению гиперболического типа

$$\varphi_{,xy}=-\chi \tag{2.1}$$

где χ — некоторая функция точки, задающая распределение касательных напряжений $\sigma_{xy}=\chi$. Тогда, опуская один из одинаковых индексов в обозначениях компонент тензоров напряжений и химического потенциала, для нормальных напряжений получаем (ψ — произвольная функция точки):

$$\sigma_x=\frac{2k(\mu_{xy}\sin\psi+\mu_y\cos\psi)-\chi\mu_y(\mu_x+\mu_y)}{\mu_{xy}(\mu_x+\mu_y)}$$

$$\sigma_y=\frac{2k(\mu_x\cos\psi-\mu_{xy}\sin\psi)-\chi\mu_x(\mu_x+\mu_y)}{\mu_{xy}(\mu_x+\mu_y)} \tag{2.2}$$

3. Полупространство под действием распределенной нагрузки. Рассмотрим задачу о предельном состоянии полупространства под действием распределенной нагрузки

$$\sigma_y(x,0)=-p=\text{const},\quad \sigma_{xy}(x,0)=t=\text{const} \tag{3.1}$$

Предположим, что функция пластической неоднородности и компоненты тензора химического потенциала зависят только от y. Тогда решение рассматриваемой задачи дается формулами

$$\begin{gathered}\sigma_y=-p,\quad \sigma_{xy}=t\\ \sigma_x=(\mu_x^2+\mu_{xy}^2)^{-1}\{p(\mu_{xy}^2-\mu_x\mu_y)-t\mu_{xy}(\mu_x+\mu_y)\pm\\ \pm[4k^2(\mu_x^2+\mu_{xy}^2)-(\mu_x t-\mu_{xy}p)^2(\mu_x+\mu_y)^2]^{1/2}\}\end{gathered} \tag{3.2}$$

При переходе к классическому случаю, когда $\mu_x=\mu_y=1$, $\mu_{xy}=0$, из формул (3.2) следуют известные решения [2].

Пусть главные оси тензора химического потенциала совпадают с осями координат. Тогда $\mu_{xy}=0$, и последняя из формул (3.2) дает:

$$\sigma_x=\mu_x^{-1}\{-\mu_y p\pm[4k^2-(\mu_x+\mu_y)^2t^2]^{1/2}\} \tag{3.3}$$

4. Сжатие хемопластического слоя. Рассмотрим задачу о сжатии неоднородного по толщине хемопластического слоя между двумя параллельными шероховатыми жесткими плитами при следующих граничных условиях в напряжениях:

$$\sigma_{xy}(x,\pm h)=\pm mk(h),\quad \sigma_x(0,y)=0 \tag{4.1}$$

где h — половина толщины слоя, m — коэффициент прандтлева трения.

Полагая

$$\sigma_{xy}=(y/h)mk(h),\quad \sigma_y=-Ax-B \tag{4.2}$$

где A и B — константы, в предположении $\mu_{xy}=0$ для σ_x находим

$$\sigma_x=\mu_x^{-1}\{-\mu_y(Ax+B)+[4k^2(y)-(m/h)^2(\mu_x+\mu_y)^2k^2(h)y^2]^{1/2}\} \tag{4.3}$$

где согласно одному из уравнений (1.3):

$$A=\mu_x mk(h)/(\mu_y h) \tag{4.4}$$

а константа B находится из граничного условия для σ_x, выполняемого в интегральном смысле:

$$B={}^1/_2 h^{-1}\int_{-h}^{h}(\mu_x/\mu_y)\,[4k^2(y)-(m/h)^2(\mu_x+\mu_y)^2k^2(h)\,y^2]^{1/2}\,dy \tag{4.5}$$

Полученное распределение напряжений обобщает известные решения Прандтля и Кузнецова [1, 2].

5. Труба под действием внутреннего давления. Рассмотрим задачу о предельном состоянии цилиндрической трубы, внутренний и внешний радиусы которой равны a и b. Пусть труба нагружена внутренним давлением p, а k, μ_r и μ_θ являются функциями текущего радиуса r ($a\leqslant r\leqslant b$). Тогда в результате совместного решения уравнения равновесия и условия хемопластичности при соответствующем граничном условии

$$d\sigma_r/dr+(\sigma_r-\sigma_\theta)/r=0, \tag{5.1}$$

$$\mu_\theta\sigma_\theta-\mu_r\sigma_r=2k,\quad \sigma_r(a)=-p$$

для радиального и окружного напряжений получим

$$\sigma_r=\left\{-p+\int_a^r\frac{2k}{r\mu_\theta}\exp\left[\int_a^r\left(1-\frac{\mu_r}{\mu_\theta}\right)\frac{dr}{r}\right]dr\right\}\exp\left[-\int_a^r\left(1-\frac{\mu_r}{\mu_\theta}\right)\frac{dr}{r}\right]$$

$$\sigma_\theta=(2k+\mu_r\sigma_r)/\mu_\theta \tag{5.2}$$

Давление p, вызывающее переход материала трубы в пластическое состояние, находится по формуле

$$p=\int_a^b\frac{2k}{r\mu_\theta}\exp\left[\int_a^r\left(1-\frac{\mu_r}{\mu_\theta}\right)\frac{dr}{r}\right]dr \tag{5.3}$$

откуда при $\mu_r=\mu_\theta=1$, $k=\mathrm{const}$ следует известное решение [1]: $p=2k\ln(b/a)$.

Для случая, когда μ_r и μ_θ являются функциями r, формула (5.3) обобщает известное в теории пластичности неоднородных тел решение в [2].

В частности, при $\mu_\theta=1$, $\mu_r=\mathrm{const}>1$, $k=\mathrm{const}$ формула (5.3) дает:

$$p=2k(\mu_r-1)^{-1}[1-(a/b)^{\mu_r-1}]<2k\ln(b/a)$$

т. е. предельное давление, воспринимаемое трубой, материал которой частично поврежден коррозией, снижается по сравнению со случаем, когда коррозия отсутствует, что согласуется с экспериментами [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. *Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В.* Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.
3. *Подстригач Я. С.* Диффузионная теория неупругости металлов // ЖПМТФ. 1965. № 2. С. 67–72.
4. *Нарисава И.* Прочность полимерных материалов. М.: Химия, 1987, 400 с.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
6. *Кеше Г.* Коррозия металлов. М.: Металлургия, 1984. 400 с.
7. *Казале А., Портер Р.* Реакции полимеров под действием напряжений. Л.: Химия, 1983. 440 с.
8. *Аввакумов Е. Г.* Механические методы активации химических процессов. Новосибирск: Наука, 1986. 306 с.
9. *Гутман Э. М.* Механохимия металлов и защита от коррозии. М.: Металлургия, 1981. 270 с.

Тула

Поступила в редакцию 13.VIII.1977