МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1989

УДК 539.3.01

С. Е. МИХАЙЛОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКИХ НЕОДНОСВЯЗНЫХ ТЕЛ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ ПРИ ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЦЕ УСИЛИЯХ

Рассматривается плоская задача линейной изотропной теории упругости в неодносвязной конечной или бесконечной области с угловыми точками, когда на ее границе заданы усилия, и соответствующая задача для несжимаемой упругой среды, совпадающая с задачей гидродинамики для стационарных линеаризованных уравнений Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Задача для сжимаемой среды либо с помощью упругого потенциала простого слоя сводится к граничному интегральному уравнению (ГИУ) с ядром, имеющим особенность типа Коши, либо с помощью потенциала Вейля – Хациревича – к ГИУ с ядром – непрерывным в достаточно гладких точках границы. К последнему уравнению сводится также и задача для несжимаемой среды. Оба ГИУ являются уравнениями второго рода, их ядра обладают сильными стационарными особенностями в угловых точках, а искомые плотности могут иметь там слабые особенности. Представлены результаты исследования спектральных свойств ГИУ, разрешимости и единственности их решений. Указаны возможные модификации уравнений для сведения их к безусловно и однозначно разрешимым и предложен ряд методов решения, в том числе метод последовательных приближений, устойчивый к ошибкам округления и дискретизации.

Введение. Для решения задач теории упругости и гидродинамики широко применяется метод граничных интегральных уравнений. Для тел с гладкой границей он развит [1–7] на основе упругих потенциалов, в [8, 9] для плоских задач представлены ГИУ, полученные в терминах теории функций комплексного переменного (см. также [10–12]).

Некоторые результаты, касающиеся разрешимости и собственных решений полученных в [3–4] интегральных уравнений для областей с гладкой границей даны в этих же работах. Для областей с угловыми точками в [13] исследовалась фредгольмовость интегральных уравнений теории упругости колебаний путем оценки существенной нормы интегральных операторов в пространстве функций, непрерывных со степенным весом. Однако, имеющиеся в настоящее время исследования ГИУ требуют значительного дополнения и уточнения как для случая неодносвязных областей, так и для случая, когда граница области имеет угловые точки, с тем, чтобы эти результаты использовать для построения эффективных численных методов решения уравнений.

В публикуемой статье рассматривается вторая (по терминологии [2, 3]) основная плоская задача линейной изотропной теории упругости в неодносвязной конечной или бесконечной области с угловыми точками, когда на ее границе заданы усилия, как для сжимаемой, так и для несжимаемой упругой среды. Для того, чтобы при определении напряжений на границе не иметь дела с численным дифференцированием, а также чтобы через коэффициенты при особенности плотности можно было прямо определить коэффициенты интенсивности напряжений, имеющие большое значение для механики разрушения, здесь используются интегральные уравнения, плотности которых — того же порядка гладкости, что и напряжения, в частности, могут иметь такие же особенности в угловых точках. Аналогичный подход для задач антиплоской деформации предложен в [14–16] (см. также [17]).

2. Интегральные представления и вывод интегральных уравнений. Пусть D — конечная или бесконечная область на плоскости с границей $\partial D = \cup \partial_i$ $(i=0\div m)$, являющейся совокупностью простых замкнутых непересекающихся кусочно-ляпуновских контуров ∂_i с конечным числом угловых точек, внутренний угол в которых отличен от нуля и 2π. Контур ∂_0 охватывает все остальные контуры ∂_i, он может и отсутствовать, тогда область D — бесконечна. Ориентируем контуры ∂_i так, чтобы при положительном обходе область D оставалась слева, и параметризуем их в положительном направлении с помощью длины дуги s. Пусть D_k^- — области, лежащие внутри контуров ∂_k при $k=1, \ldots, m$ и вне ∂_0 при $k=0$, $D^- = \cup D_k^-$ $(k=0\div m)$.

Если не оговорено особо, индексы у индексируемых величин меняются от 1 до 2 и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование в этих пределах. Индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате. Некоторые переменные без индексов обозначают совокупность соответствующих индексных величин: $x=(x_1, x_2)$ и т. д. Далее используются обозначения: δ_{ij} — символ Кронекера; e_{ij} — альтернирующий символ: $e_{11}=e_{22}=0$, $e_{12}=-e_{21}=1$ (отметим, что $e_{\alpha m}e_{pj}=\delta_{\alpha p}\delta_{mj}-\delta_{mp}\delta_{\alpha j}$); C, C_i, B — произвольные постоянные.

Ниже рассматривается краевая задача 2 для системы уравнений Ламе

$$L_i(x;\, u) := c_{ijkl} u_{k,lj} = 0 \quad (x \in D)$$

$$c_{ijkl} = \Lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.1}$$

$$T_i^+(s;\, u) := \sigma_{ij}^+|_{\partial D} n_j(s) := c_{ijkl} n_j(s) u_{k,l}|_{\partial D} = g_i(s), \quad s \in \partial D \tag{2.2}$$

и задача 2^∞ для линеаризованной системы Стокса

$$L_i^\infty(x;\, u,\, P) := -P_{,i} + \mu u_{i,jj} = 0 \ (i=1,\, 2),\ L_0^\infty(u,\, P) := u_{i,i} = 0 \quad (x \in D) \tag{2.3}$$

$$T_i^{\infty+}(s;\, u) := \sigma_{ij}^{\infty+}|_{\partial D} n_j(s) := [-Pn_i(s) + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j(s)]_{\partial D}^+ = g_i(s) \quad (s \in \partial D) \tag{2.4}$$

Здесь $\Lambda > 0$, $\mu > 0$ — постоянные Ламе, $\varkappa = (\Lambda + 3\mu)/(\Lambda + \mu) > 1$ — постоянная плоской теории упругости для случая плоской деформации; для случая плоского напряженного состояния фигурирующую в (2.1) и далее постоянную Λ необходимо заменить на $\Lambda^* = 2\Lambda\mu/(\Lambda + 2\mu)$. Система (2.3) может рассматриваться как предельный случай системы (2.1) для несжимаемого упругого тела $(\Lambda \to \infty)$, либо как система уравнений гидродинамики для несжимаемой вязкой жидкости (тогда μ — коэффициент вязкости). Искомые функции u_i — компоненты перемещения для упругости или скорости — для гидродинамики, P — давление. Известные функции $g_i(s) \in L_p(\partial D)$, $1 < p < \infty$, $n_i(s)$ — внешняя по отношению к области D нормаль к ∂D.

Рассмотрим три интегральных представления

$$U_i^{\mathrm{I}}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Gamma_{ij}[z] Q_j(s)\, ds \tag{2.5}$$

$$U_i^{\mathrm{III}}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Gamma_{i\beta,l}[z] c_{j\eta\beta l}^{(M)} q_j(s) n_\eta(s)\, ds \tag{2.6}$$

$$U_i^{\infty\mathrm{I}}(x) = \frac{1}{\pi} \int \Gamma_{ij}^\infty[z] Q_j(s)\, ds, \quad P^{\mathrm{I}}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{z_j}{r^2} Q_j(s)\, ds \tag{2.7}$$

$$q_j \in C(\partial_k), \quad Q_j = dq_j/ds \in L_p(\partial_k)$$

Здесь и далее $z_j = x_j - y_j(s)$, $x \in D$, $y \in \partial D$, $r^2 = z_j z_j$, $c_{j\eta\beta l}^{(M)} := \delta_{\beta j} e_{l\eta} + (\varkappa - 1)(4\mu)^{-1} c_{p\eta\beta l} e_{pj} = {}^1/_4 [(3+\varkappa)\delta_{\beta j} e_{l\eta} + 2\delta_{\beta l} e_{\eta j} + (\varkappa - 1)\delta_{\eta l} e_{\beta j}]$; $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака. Тензор $\Gamma_{ij}(z) = [\mu(\varkappa+1)]^{-1}(-\varkappa\delta_{ij}\ln r + z_i z_j/r^2)$ — фундаментальное решение системы (2.1) (см. [4]): $c_{i\beta kl}\Gamma_{kj,\,l\beta}(z) = -2\pi\delta_{ij}\delta(z)$, а совокупность $\{\Gamma_{ij}^\infty,\ z_j/r^2\}$, где $\Gamma_{ij}^\infty = \Gamma_{ij}|_{\varkappa=1}$ — фундаментальное решение системы (2.3) (см. [7]): $-(z_j/r^2)_{,i}+\mu\Gamma^{\infty}_{ij,kk}(z)=-2\pi\delta_{ij}\delta(z)$, $\Gamma^{\infty}_{ij,i}=0$.

Из (2.5)—(2.7) получаем представления для напряжений

$$\sigma_{il}(x;U^{\mathrm{I}})=\int\limits_{\partial D} S^{\mathrm{I}}_{ilj}(z)Q_j(s)\,ds,\quad S^{\mathrm{I}}_{ilj}(z):=\frac{-1}{\pi(\varkappa+1)r^2}\Big\{\Big[4\frac{z_iz_j}{r^2}+$$
$$+(\varkappa-1)\delta_{ij}\Big]z_l+(\varkappa-1)[\delta_{jl}z_i-\delta_{il}z_j]\Big\} \tag{2.8}$$

$$\sigma_{il}(x;U^{\mathrm{III}})=\int\limits_{\partial D} S^{\mathrm{III}}_{ilj}(z)Q_j(s)\,ds,\quad S^{\mathrm{III}}_{ilj}(z):=\frac{-2}{\pi r^4}z_iz_jz_l \tag{2.9}$$

$$\sigma_{il}^{\infty}(x;U^{\infty\mathrm{I}},P^{\mathrm{I}})=\int\limits_{\partial D} S^{\mathrm{III}}_{ilj}(z)Q_j(s)\,ds \tag{2.10}$$

При получении соотношения (2.9) было произведено интегрирование по частям с учетом того, что $c^{(M)}_{j\eta\beta l}\Gamma_{i\beta,\,l\eta}(z)=0$ $(x\in D)$, $Q_j(s)=dq_j(s)/ds$.

Отметим, что

$$U^{\infty\mathrm{I}}(Q)=U^{\mathrm{I}}(Q)\,|_{\varkappa=1}=U^{\mathrm{III}}(Q)\,|_{\varkappa=1}$$

$$\sigma_{ij}(U^{\infty\mathrm{I}}(Q),P^{\mathrm{I}}(Q))=\sigma_{ij}(U^{\mathrm{I}}(Q))\,|_{\varkappa=1}=\sigma_{ij}(U^{\mathrm{III}}(Q))$$

Очевидно, что выписанные интегральные представления U^{I}, U^{III} удовлетворяют системе (2.1), а $\{U^{\infty\mathrm{I}},P^{\mathrm{I}}\}$ — системе (2.3) в $D\cup D^-$.

Представление U^{I} — упругий потенциал простого слоя первого рода [4], $\{U^{\infty\mathrm{I}},P^{\mathrm{I}}\}$ — гидродинамический потенциал простого слоя [7]. Из (2.6), (2.9) можно также усмотреть, что U^{III} — двумерный аналог потенциала Вейля [1], комплексная форма которого использовалась в [9].

Можно показать (см. [18]), что при $Q_i\in L_p(\partial D)$ $(1<p<\infty)$; $q_j\in C(\partial_k)$ потенциалы U^{I}, U^{III}, $U^{\infty\mathrm{I}}\in C(D\cup\partial D)$, т. е. непрерывно продолжимы на границу области D, а их градиенты имеют некасательные предельные значения, принадлежащие $L_p(\partial D)$, и для предельных значений изнутри (+) и снаружи (—) области D имеют место соотношения

$$U_i^{\mathrm{I}\pm}=U_i^{\mathrm{I}\circ},\quad U_i^{\mathrm{III}\pm}=\mp(\varkappa-1)(4\mu)^{-1}e_{ij}q_j+U_i^{\mathrm{III}\circ},\quad U_i^{\infty\mathrm{I}\pm}=U_i^{\infty\mathrm{I}\circ},$$
$$P^{\mathrm{I}\pm}=\mp Q_in_l+P^{\mathrm{I}\circ}$$

$$\begin{gathered}
\sigma_{il}^{\pm}(U^{\mathrm{I}})=\pm[Q_in_l+Q_ln_i+(3-\varkappa)(\varkappa+1)^{-1}\delta_{il}Q_jn_j-4(\varkappa+1)^{-1}Q_jn_jn_in_l]+\sigma_{ij}^{\circ}(U^{\mathrm{I}})\\
\sigma_{il}^{\pm}(U^{\mathrm{III}})=\pm[Q_in_l+Q_ln_i+\delta_{il}Q_jn_j-2n_in_lQ_jn_j]+\sigma_{il}^{\circ}(U^{\mathrm{III}})\\
\sigma_{il}^{\infty\pm}(U^{\infty\mathrm{I}},P^{\mathrm{I}})=\pm[Q_in_l+Q_ln_i+\delta_{il}Q_jn_j-2n_in_lQ_jn_j]+\sigma_{il}^{\infty\circ}(U^{\infty\mathrm{I}},P^{\mathrm{I}})\\
T_i^{\pm}(U^{\mathrm{I}})=\pm Q_i+T_i^{\circ}(U^{\mathrm{I}}),\quad T_i^{\pm}(U^{\mathrm{III}})=\pm Q_i+T_i^{\circ}(U^{\mathrm{III}})\\
T_i^{\infty\pm}(U^{\infty\mathrm{I}},P^{\mathrm{I}})=\pm Q_i+T_i^{\infty\circ}(U^{\infty\mathrm{I}},P^{\mathrm{I}})
\end{gathered} \tag{2.11}$$

Здесь нулевыми верхними индексами помечены главные значения по Коши соответствующих интегральных представлений (2.5)—(2.10) на ∂D, причем нормаль n_i считается внешней к D и равенства для граничных напряжений, усилий и давления понимаются как равенства почти везде на ∂D.

Выпишем регуляризованные представления для интегральных членов граничных перемещений и напряжений, в которых тогда будет отсутствовать особенность типа Коши.

$$U_i^{\mathrm{III}\circ}(y)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial D}\Big\{\Gamma_{i\beta,l}[z]q_j(s)n_\eta(s)-\frac{z_\alpha k_\alpha(s)}{r^2}\Gamma_{i\beta,l}[k(s_0)]\times$$
$$\times q_j(s_0)n_\eta(s_0)\Big\}c^{(M)}_{j\eta\beta l}\,ds$$

$$P^{\mathrm{I}\circ}(y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial D}\left[\frac{z_j}{r^2}Q_j(s)-\frac{z_\alpha k_\alpha(s)}{r^2}k_j(s_0)Q_j(s_0)\right]ds$$

$$\sigma_{il}{}^{\circ}(y;U^{\mathrm{I}})=\int\limits_{\partial D}\left\{S^{\mathrm{I}}_{ilj}[z]Q_j(s)-\frac{z_\alpha k_\alpha}{r^2}S^{\mathrm{I}}_{ilj}[k(s_0)]Q_j(s_0)\right\}ds$$

$$\sigma_{il}{}^{\circ}(y;U^{\mathrm{III}})=\sigma_{il}^{\infty\circ}(U^{\infty\mathrm{I}},P^{\mathrm{I}})=\int\limits_{\partial D}\left\{S^{\mathrm{III}}_{ilj}(z)Q_j[s]-\frac{z_\alpha k_\alpha}{r^2}S^{\mathrm{III}}_{ilj}[k(s_0)]Q_j(s_0)\right\}ds$$

Здесь $z_i=y_i(s_0)-y_i(s)$, $r^2(z)=z_iz_i$, причем $r^2[k]=k_ik_i=1$ в $\Gamma_{i\beta,l}[k]$, $S_{ilj}[k]$. Исходные представления (2.5), (2.7) для U^{I}, $U^{\infty\mathrm{I}}$ особенностей по Коши не имеют, поэтому здесь не регуляризуются.

Если $\int\limits_{\partial D}Q_i(s)\,ds=0$, то, как видно из (2.5) – (2.7), для бесконечной области D выполнены условия $U_i^{\mathrm{I}}(\infty)$, $U_i^{\mathrm{III}}(\infty)$, $U_i^{\infty\mathrm{I}}(\infty)=0$;

$$|U^{\mathrm{I}}_{i,j}(x)|,\quad |U^{\mathrm{III}}_{i,j}(x)|,\quad |U^{\infty\mathrm{I}}_{i,j}(x)|,\quad |P^{\mathrm{I}}(x)|<C_0R^{-2}\qquad(2.12)$$

при достаточно больших $R=(x_ix_i)^{1/2}$ для некоторого C_0.

Пусть V_i, $\{V_i^\infty, \Pi\}$ – любые решения системы Ламе и Стокса, соответственно; V_i, $V_i^\infty\in C^1(D\cup\partial D)\cap C^2(D)$; $\Pi\in C(D\cup\partial D)\cap C^1(D)$, а если область D бесконечна, то выполнены еще условия регулярности $|V_i|$, $|V_i^\infty|<C_1$; $|V_{i,\alpha}|$, $|\Pi|<C_2/R^2$ для достаточно больших R. По произвольным плотностям, таким что $Q_j\in L_p(\partial D)$, $q_j\in C(\partial_k)$, а для бесконечных областей $\int Q_j(s)\,ds=0$ (интегрирование по ∂D) образуем потенциалы (2.5) – (2.7). Тогда для комбинаций вида $U^{\mathrm{I}}+V$, $U^{\mathrm{III}}+V$, $\{U^{\infty\mathrm{I}}+V^\infty$, $P^{\mathrm{I}}+\Pi\}$ имеют место формулы Грина – Бетти, а упругая энергия $\iint E(U^{\mathrm{I}}+V)\,dD$, $\iint E(U^{\mathrm{III}}+V)\,dD$ и упругая энергия несжимаемого тела $\iint E^\infty(U^{\infty\mathrm{I}}+V^\infty)\,dD$ ограничены. Здесь

$$E(u)=\Lambda(u_{i,i})^2+{}^1/_2\mu(u_{i,j}+u_{j,i})^2;\qquad E^\infty(u)={}^1/_2\mu(u_{i,j}+u_{j,i})^2$$

Опираясь на эти факты в [18] показано, что решения задач 2 и 2^∞ в классе таких комбинаций единственны с точностью до жесткого смещения $u_{ci}(x)=C_i+C_3e_{ij}x_j$ в конечной области D и с точностью до жесткого смещения без поворота $U_{ci}(x)=C_i$ в бесконечной области. Решения задач 1 и 1^∞ (с заданными на границе перемещениями (скоростями) u_i) единственны, за исключением решения задачи 1^∞ (для уравнения Стокса) в конечной области D, которое единственно с точностью до произвольного постоянного давления $P_C(x)=C_0$. Будем искать решение задачи 2 в виде

$$u_i(x)=U_i^{\mathrm{I}}(x)\qquad(2.13)$$

Тогда после подстановки в граничное условие (2.2) и использования (2.8), (2.11) приходим к граничному интегральному уравнению (ГИУ) I (при $\lambda=1$):

$$Q_i(s_0)-\lambda\int\limits_{\partial D}K_{ij}{}^{\mathrm{I}}(s,s_0)Q_j(s)\,ds=g_i(s_0)$$

$$K_{ij}{}^{\mathrm{I}}(s,\ s_0)=-\pi^{-1}T_i(\Gamma_{\cdot j})\equiv[\pi r^2(1+\varkappa)]^{-1}\{[4z_iz_jr^{-2}+(\varkappa-1)\delta_{ij}]\times$$
$$\times z_ln_l(s_0)+(\varkappa-1)[n_j(s_0)z_i-n_i(s_0)z_j]\}$$

Если вместо этого искать решение задачи 2 в виде

$$u_i(x)=U_i^{\mathrm{III}}(x)+\sum_{k=1}^{m}\{A_j^{(k)}\Gamma_{ij}[x-x^{(k)}]+B^{(k)}V_i^{(k)}(x)\}$$

$$A_j^{(k)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial_k} g_j(s)\,ds, \quad V_i^{(k)}(x)=\frac{x_i-x_i^{(k)}}{2\mu r^{(k)2}} \tag{2.14}$$

то после подстановки в (2.2) вместе с (2.9), (2.11) придем к ГИУ III (при $\lambda=1$):

$$\begin{gathered}
Q_i(s_0)-\lambda\int\limits_{\partial D} K_{ij}^{\mathrm{III}}(s,s_0)Q_j(s)\,ds=h_i^{\mathrm{III}}(s_0),\\
K_{ij}^{\mathrm{III}}(s,s_0)=-\pi^{-1}T_i(M_{\cdot j})=2\pi^{-1}z_iz_jz_ln_l(s_0)r^{-4}\\
h_i^{\mathrm{III}}(s_0)=g_i\hat{}(s_0)-\sum_{k=1}^{m}B^{(k)}T_i(V^{(k)})(s_0),\\
g_i\hat{}=g_i(s_0)-\sum_{k=1}^{m}A_j^{(k)}T_i(\Gamma_{\cdot j}[y(s_0)-x^{(k)}])\\
T_i(V^{(k)})=\{n_i(s_0)-2[y_i(s_0)-x_i^{(k)}][y_j(s_0)-x_j^{(k)}]n_j(s_0)/r^{(k)2}\}/r^{(k)2}
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Наконец решение задачи 2^∞ будем искать в виде

$$u_i(x)=U_i^{\infty\mathrm{I}}(x)+\sum_{k=1}^{m}B^{(k)}V_i^{(k)}, \quad P(x)=P^{\mathrm{I}}(x) \tag{2.16}$$

и после подстановки в (2.4) снова придем в ГИУ III, но уже с правой частью

$$h_i^{\mathrm{III}}=g_i(s_0)-\sum_{k=1}^{m}B^{(k)}T_i^{\infty}(V^{(k)},0), \quad T_i^{\infty}(V^{(k)},0)=T_i(V^{(k)}) \tag{2.17}$$

В полученных ГИУ $z_i=y_i(s_0)-y_i(s)$, $r^2=z_iz_i$, $x^{(k)}$ — произвольные фиксированные точки внутри контуров $\partial_k(k=1\div m)$, $r^{(k)2}=[y_i(s_0)-x_i^{(k)}][y_i(s_0)-x_i^{(k)}]$ (по k не суммировать). Фигурирующие в (2.14)—(2.17) постоянные $B^{(k)}$, возникающие для неодносвязной области D ($m>0$), как будет указано, однозначно определяются условиями разрешимости ГИУ III при $\lambda=1$.

Итак, задачу 2 удается свести либо к ГИУ I, либо к ГИУ III, а задачу 2^∞ — к ГИУ III. Причем ядро ГИУ I, как легко видеть, при $s=s_0$ имеет особенность типа Коши, а ядро ГИУ III ограничено, если в точке $s=s_0$ кривая ∂D достаточно гладкая. В угловых точках s^* эти ГИУ имеют сильные стационарные особенности при $s=s_0=s^*$. Отметим, что при $\varkappa=1$ ГИУ I вырождается в ГИУ III. Эти уравнения на ляпуновских контурах, являющихся границами конечных или бесконечных односвязных областей, изучались в гельдеровских пространствах [4, 7]. Отметим, что ГИУ III после соответствующей замены переменных совпадает в случае конечных односвязных областей с ГИУ [9], а также с ГИУ, полученным в [12] для гладких контуров в результате дифференцирования и интегрирования по частям уравнения Шермана — Лауричелла [8] задачи 2. Отличие этих уравнений от ГИУ III в неодносвязных областях происходит за счет иного выбора членов под знаком суммы в интегральном представлении (2.14), обеспечивающих разрешимость интегральных уравнений для таких областей.

Решения полученных интегральных уравнений будем искать в пространстве $L_p(\partial D)$ с возможно меньшим $p>1$, с тем, чтобы не пропустить решения со слабыми особенностями.

3. Спектральные свойства и возмущение ГИУ. В этом пункте указаны пространства Лебега, в которых сохраняется фредгольмовость полученных интегральных операторов для областей с угловыми точками и в этих пространствах изучены спектральные свойства и найдены характеристические числа операторов. Представлены результаты о собственных решениях интегральных уравнений в том числе и для областей с угловыми точками, уточняющие результаты [4, 5] (ГИУ I) и дополняющие для неодносвязных и бесконечных областей результаты [7, 9] (ГИУ III), полученные в этих работах для гладких контуров. Эта информация позволила далее указать возможные модификации уравнений для сведения их к безусловно и однозначно разрешимым.

Операторное уравнение будем называть (обобщенным) фредгольмовым, если для него выполняются альтернативы Фредгольма, т. е. его индекс равен нулю. Опираясь на результаты [19] в [18] показано, что при $\lambda=\pm 1$ как для ГИУ I (при $\varkappa \geqslant 1$), так и для ГИУ III (при любом $\varkappa$) существуют действительные числа $p_\pm^{\mathrm{I}}$, $p_\pm^{\mathrm{III}}>2$ такие, что соответствующее уравнение является фредгольмовым в пространствах $L_p(\partial D)$, $1<p<<p_\pm$. С другой стороны, для каждого из ГИУ I, III существует действительное число $p_0>1$ такое, что соответствующее ГИУ фредгольмово в пространствах $L_p(\partial D)$, $1<p<p_0$, в замкнутом единичном круге $|\lambda|\leqslant 1$. Отметим, что $p_+^{\mathrm{III}}=p_-^{\mathrm{III}}=p_0^{\mathrm{III}}$.

Значения параметра λ, при которых однородное граничное интегральное уравнение (ОГИУ) имеет нетривиальные (собственные) решения, будем называть характеристическими числами. Как известно [20], в области, где операторное уравнение $(1-\lambda\mathrm{K})Q=h$ фредгольмово, его резольвента является аналитической функцией параметра λ, имеющей при характеристических значениях λ полюсы конечной кратности. Поэтому исследование спектра и разрешимости ГИУ I, III в области фредгольмовости сводится к нахождению характеристических чисел и собственных решений ОГИУ.

Следуя обычной схеме [3—7, 10, 11] и используя приведенные выше теоремы единственности задач теории упругости для ГИУ I и задач гидродинамики для ГИУ III удается найти характеристические числа и собственные решения ОГИУ I и III в областях, где они фредгольмовы. В частности, характеристические числа этих ГИУ вещественны и отсутствуют в интервале $(-1, 1)$, а полюсы (по λ) резольвент этих уравнений — простые [18].

Если область D бесконечна, то $\lambda=1$ не является характеристическим числом ГИУ I; если она конечна, то $\lambda=1$ характеристическое число и при этом значении λ ОГИУ I имеет три решения, а неоднородное ГИУ I разрешимо, если выполнены условия

$$\int\limits_{\partial D} g_i(s)\,ds=0 \quad (i=1,2), \quad \int\limits_{\partial D} g_i(s)\,e_{ij}x_j(s)\,ds=0 \tag{3.1}$$

Если область D конечна и односвязна $(m=0)$, то $\lambda=-1$ не является характеристическим числом ГИУ 1, в противном случае $\lambda=-1$ — характеристическое число.

Для ГИУ III числа $\lambda=\pm 1$ — характеристические как в случае конечной, так и бесконечной области D. Пусть $\lambda=1$. Если область D бесконечна, то ОГИУ III имеет m решений $Q_i^{(k)}$:

$$Q_i^{(k)}(s)=n_i(s)\ (s\in\partial_k), \qquad Q_i^{(k)}(s)=0 \quad (s\notin\partial_k), \quad k=1\div m \tag{3.2}$$

а неоднородное ГИУ III разрешимо при наложении на правую часть $h_i^{\mathrm{III}}(s)$ m условий, которые порождаются решениями $Q_i^{*(k)}$, $k=1\div m$ сопряженного ОГИУ III* и в общем случае явно не выписываются. Если область D конечна, то ОГИУ имеет $m+3$ решения, m из которого даются выражениями (3.2), а неоднородное ГИУ III разрешимо при выполнении наложенных на правую часть h_i^{III} $(m+3)$ условий, три из которых даются соотношениями (3.1), а оставшиеся m, как и для бесконечной области, явно не выписываются. Отметим, что для $T_i(\Gamma_{\cdot j}[y(s_0)-x^{(k)}])$ и $T_i(V^{(k)})$ условия (3.1) заведомо выполняются.

Условия (3.1) разрешимости ГИУ I, III при $\lambda=1$ являются условиями равенства нулю главного вектора и главного момента приложенных усилий и поэтому должны быть выполнены для корректной постановки исходных краевых задач. По аналогии с [7, 9] можно показать [18], что

$$\det\left[\int\limits_{\partial D} Q_i^{*(k)}(s)\,T_i(V^{(t)})(s)\,ds\right]\neq 0 \quad (k,t=1\div m) \tag{3.3}$$

Следовательно для любой функции $g_i(s)$ постоянные $B^{(k)}$ в (2.14)–(2.17) можно единственным образом выбрать так, чтобы ГИУ III было разрешимо. Способы практического нахождения $B^{(k)}$ будут указаны ниже.

Но даже в том случае, когда правая часть ГИУ удовлетворяет условиям разрешимости, при численном решении эти условия могут нарушаться за счет погрешностей округления и дискретизации, и уравнение перестает быть разрешимым, т. е. решение ГИУ неустойчиво по отношению к малым возмущениям правой части. Поэтому для случаев, когда $\lambda=1$ — характеристическое число ГИУ, перейдем к интегральным уравнениям, возмущенным конечномерными операторами в соответствии с некоторым обобщением методики, развитой в § 3 [14] для общих линейных ограниченных фредгольмовых операторов в банаховых пространствах (в [21] близкая методика была предложена для операторов в гильбертовых пространствах). Пусть

$$K_{ij}^{(1)}(s,s_0)=-\delta_{ij}/L-e_{\alpha i}[y_\alpha(s_0)-x_\alpha{}^\circ]e_{\beta j}[y_\beta(s)-x_\beta{}^\circ]/J$$

$$K_{ij}^{(2)}(s,s_0)=-\sum_{k=1}^{m}\frac{\varphi_i^{(k)}(s_0)\varphi_j^{(k)}(s)}{L_k},\qquad \varphi_i^{(k)}(s):=\begin{cases} n_i(s), & s\in\partial_k\\ 0, & s\notin\partial_k\end{cases}$$

$$L_k=\int\limits_{\partial_k} ds,\quad L=\int\limits_{\partial D} ds,\quad x_\alpha{}^\circ=\frac{1}{L}\int\limits_{\partial D} y_\alpha(s)\,ds,\quad J=\int\limits_{\partial D}[y_\alpha(s)-x_\alpha{}^\circ]^2\,ds$$

Здесь L_k — длина контуров ∂_k, а L, $x_\alpha{}^\circ$ и J — длина, координаты центра тяжести и момент инерции границы ∂D, соответственно.

Тогда, следуя [14], можно доказать, что для конечной области интегральные уравнения

$$Q_i(s_0)-\lambda\int\limits_{\partial D}[K_{ij}^{\mathrm{I}}(s,s_0)+K_{ij}^{(1)}(s,s_0)]Q_j(s)\,ds=g_i(s_0) \tag{3.4}$$

$$Q_i(s_0)-\lambda\int\limits_{\partial D}[K_{ij}^{\mathrm{III}}(s,s_0)+K_{ij}^{(1)}(s,s_0)+K_{ij}^{(2)}(s,s_0)]Q_j(s)\,ds=h_i^{\mathrm{III}}(s_0) \tag{3.5}$$

будут уже безусловно и однозначно разрешимыми при $\lambda=1$. Если выполнены условия разрешимости ГИУ I и III, то решения ГИУ (3.4), (3.5) будут совпадать с одним из решений, соответственно, ГИУ I, III, таким, что

$$\int\limits_{\partial D} Q_i(s)\,ds=0,\quad \int\limits_{\partial D} Q_i(s)\,e_{i\alpha}y_\alpha(s)\,ds=0 \tag{3.6}$$

а решение ГИУ (3.5) удовлетворяет также условиям

$$\int\limits_{\partial_k} Q_i(s)\,n_i(s)\,ds=0 \quad (k=1\div m) \tag{3.7}$$

Если область D бесконечна, то для ГИУ I число $\lambda=1$ не является характеристическим и возмущать уравнение нет необходимости, а возмущенное ГИУ III можно взять в виде

$$Q_i(s)-\lambda\int\limits_{\partial D}[K_{ij}^{\mathrm{III}}(s,s_0)+K_{ij}^{(2)}(s,s_0)]Q_j(s)\,ds=h_i^{\mathrm{III}}(s_0) \qquad (3.8)$$

Это ГИУ будет безусловно и однозначно разрешимо при $\lambda=1$, а если условия разрешимости ГИУ III, наложенные на h_i^{III} выполнены, то решение ГИУ (3.8) даст одно из решений ГИУ III, которое будет удовлетворять условиям (3.7).

Резольвенты полученных возмущенных уравнений будут иметь те же полюсы, что и для невозмущенных, за исключением точки $\lambda=1$, которая будет теперь регулярной точкой резольвент.

Таким образом, обе рассматриваемые задачи удалось свести к безусловно и однозначно разрешимым граничным интегральным уравнениям при $\lambda=1$: задачу 2 в конечной области — к ГИУ (3.4) или (3.5), а в бесконечной — к ГИУ I или (3.8).

4. Некоторые методы решения ГИУ. Полученные выше ГИУ могут решаться различными методами. Остановимся на некоторых из них, в том числе на методах последовательных приближений, связанных со стандартным или видоизмененным рядом Неймана.

Поскольку резольвента ГИУ (3.4) для конечной односвязной области особых точек в круге $|\lambda|\leqslant 1$ не имеет, то его решение при $\lambda=1$ может быть получено в виде сходящегося ряда Неймана.

$$Q_i=\sum_{p=0}^{\infty}[\mathbf{K}^p]_{ij}g_j, \quad (\mathbf{K}_{ij}h_j)(s_0)=\int\limits_{\partial D}[K_{ij}{}^{\mathrm{I}}(s,s_0)+K_{ij}^{(1)}(s,s_0)]h_j(s)\,ds$$

Резовента ГИУ I для бесконечной области D, также, как и резольвента ГИУ (3.4) для конечной неодносвязной области, в круге $|\lambda|\leqslant 1$ будет иметь единственную особую точку $\lambda=-1$. Такая же ситуация будет для ГИУ (3.5) в конечных областях, а для ГИУ (3.8) — в бесконечных. Эта особая точка вызывает расходимость ряда Неймана при $\lambda=1$.

Для преодоления данного препятствия в [10] (см. также [14]) предлагалось в ряд по λ типа Неймана раскладывать резольвенту, умноженную на $(\lambda+1)$. Тогда он уже будет сходиться и при $|\lambda|=1$. Однако этот метод не устойчив по отношению к погрешностям дискретизации уравнения, так как резольвента соответствующего дискретного уравнения (а, значит и ее произведение на $(\lambda+1)$) может иметь полюс несколько сместившийся со значения $\lambda=-1$.

В связи с этим операторные уравнения $Q-\lambda\mathbf{K}Q=h$, особые точки резольвент которых отсутствуют при $|\lambda|<1$, а также в точке $\lambda=1$, имеет смысл решать с помощью видоизмененного ряда Неймана вида

$$Q=\frac{1}{1+d}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{d\mathbf{I}+\mathbf{K}}{1+d}\right)^p h$$

являющегося, по существу, одним из вариантов применения метода замены переменной [22], в котором резольвента раскладывается в ряд по степеням параметра $\lambda_0=(\lambda+\lambda d)/(1+\lambda d)$. Здесь $\mathbf{I}$ — единичный оператор, d — произвольная положительная постоянная. Этот ряд будет заведомо сходиться, причем устойчиво к малым возмущениям оператора $\mathbf{K}$. При решении ГИУ I для бесконечных областей $\mathbf{K}_{ij}=\mathbf{K}_{ij}{}^{\mathrm{I}}$, $h_j=g_j$; при решении ГИУ (3.4) для конечных неодносвязных областей $\mathbf{K}_{ij}=\mathbf{K}_{ij}{}^{\mathrm{I}}+\mathbf{K}_{ij}^{(1)}$, $h_j=g_j$; при решении ГИУ (3.8) для бесконечных областей $\mathbf{K}_{ij}=\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{III}}+\mathbf{K}_{ij}^{(2)}$, $h_j=h_j^{\mathrm{III}}$ при решении ГИУ (3.5) для конечных областей $\mathbf{K}_{ij}=\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{III}}+\mathbf{K}_{ij}^{(1)}+$ $+\mathbf{K}_{ij}^{(2)}$, $h_j=h_j^{\mathrm{III}}$.

Принимая во внимание, что с увеличением d характеристические числа интегрального оператора $(d\mathrm{I}+\mathrm{K})/(1+d)$ не только удаляются от $\lambda=-1$, но и приближаются к точке $\lambda=1$, имеет смысл брать $0<d\leqslant 1$. В возмущенных операторах (3.5), (3.8) число $\lambda=\infty$ — тоже характеристическое и для них, следовательно, интервал оптимальности сужается до $0<d\leqslant {}^1/_2$.

Дадим способы определения неизвестных постоянных $B^{(k)}$, появляющихся в (2.14)—(2.17) для неодносвязных областей ($m>0$) и входящих в правые части ГИУ III, (3.5), (3.8).

Условия (3.7) являются не только необходимыми, но и достаточными для удовлетворения правыми частями h_i^{III} ГИУ (3.5), (3.8) условий разрешимости ГИУ III, которые, как уже отмечалось, не выписываются явно. Поэтому будем (3.7) использовать для определения $B^{(k)}$ и придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} B^{(k)} \int\limits_{\partial_p} Q_i^{(k)}(s) n_i(s)\, ds = \int\limits_{\partial_p} Q_i^{(0)}(s) n_i(s)\, ds \quad (p=1\div m) \tag{4.1}$$

где $Q_i^{(k)}(s)$, $k=1\div m$ — решения ГИУ (3.5) (или (3.8), если область D бесконечна), с правыми частями $T_i(V^{(k)})(s_0)$, а $Q_i^{(0)}(s)$ — решение ГИУ (3.5) или (3.8) с правой частью $g_i\hat{}(s_0)$ для задачи 2 и $g_i(s_0)$ — для задачи 2^∞. Эта система безусловно и однозначно разрешима и решение ГИУ (3.5) или (3.8), а значит и III, есть $Q_i = Q_i^{(0)} - \Sigma B^{(k)} Q_i^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, m)$.

Таким образом, для решения задач 2, 2^∞ с помощью представлений (2.14), (2.16) вместе с определением постоянных $B^{(k)}$ данным способом требуется $m+1$ раз решить ГИУ (3.5) (или (3.8)) с одним и тем же ядром, но с различными правыми частями, причем эти решения могут быть получены с помощью метода последовательных приближений (разложения в видоизмененный ряд Неймана). Отметим, что решения $Q_i^{(k)}$, $k=1\div m$, не зависят от заданных правых частей g_i задач 2, 2^∞, т. е. определяются лишь геометрией области.

Укажем еще один способ определения постоянных $B^{(k)}$, а, значит, и решения задач 2, 2^∞ с помощью представлений (2.14), (2.16). Для этого будем искать постоянные $B^{(k)}$ в виде

$$B^{(k)} = \int\limits_{\partial D} \psi_j^{(k)}(s) Q_j(s)\, ds, \quad \det\left[\int\limits_{\partial_t} \psi_j^{(k)}(s) n_j(s)\, ds\right] \neq 0$$

$$(k, t=1\div m), \quad \psi_i^{(k)}(s) \in L_{p^*}(\partial D), \quad p^*=p/(p-1) \tag{4.2}$$

В остальном $\psi_i^{(k)}$ — произвольные функции. Обозначим

$$K_{ij}^{(3)}(s, s_0) = -\sum_{k=1}^{m} T_i(V^{(k)})(s_0) \psi_j^{(k)}(s)$$

После подстановки (4.2) в ГИУ III приходим к ГИУ ($\lambda=1$):

$$Q_i(s_0) - \lambda \int\limits_{\partial D} [K_{ij}^{\mathrm{III}}(s, s_0) + K_{ij}^{(3)}(s, s_0)] Q_j(s)\, ds = h^{\mathrm{III}(3)}(s_0) \tag{4.3}$$

где $h_i^{\mathrm{III}(3)}(s_0) = g_i\hat{}(s_0)$ — для задачи 2 и $h^{\mathrm{III}(3)}(s_0) = g(s_0)$ — для задачи 2^∞.

Учитывая соотношения (3.3), (3.2), (4.1), а также удовлетворение функции $T_i(V^{(k)})$ условий (3.1) для конечной области, из несколько обобщенной леммы 1 [14] получим, что ГИУ (4.3) при $\lambda=1$ для бесконечной области D будет безусловно и однозначно разрешимым, а для конечной области D — разрешимым при выполнении условий (3.1). Отсюда следует допустимость представления (4.2). Как и выше, от характеристического числа $\lambda=1$ для конечной области можно избавиться с помощью возмущающего оператора $\mathbf{K}^{(\mathrm{I})}$, тогда вместо ГИУ (4.3) придем к ГИУ

$$Q_i(s_0)-\lambda\int\limits_{\partial D}[K_{ij}^{\mathrm{III}}(s,s_0)+K_{ij}^{(1)}(s,s_0)+K^{(3)}(s,s_0)]Q_j(s)\,ds=h^{\mathrm{III}(3)}(s_0) \quad (4.4)$$

решение которого при выполнении условия (3.1) даст одно из решений ГИУ (4.3), удовлетворяющее условиям (3.6). Однако, в отличие от ГИУ III, (3.5), (3.8) вопрос о наличии других характеристических чисел ГИУ (4.3), (4.4) в круге $|\lambda|\leqslant 1$, а значит и о сходимости ряда Неймана для этих уравнений остается открытым.

Итак, при этом способе определения постоянных $B^{(k)}$ и, значит, решения задач 2 и 2^∞ в неодносвязных областях, приходим к необходимости лишь один раз решать ГИУ (4.3) (или 4.4), если область D конечна). Но при этом пропадает гарантия сходимости соответствующего метода последовательных приближений (ряда Неймана), хотя эти ГИУ при $\lambda=1$ разрешимы и могут быть решены каким-либо другим методом.

При численном решении функции $\psi_j^{(k)}$, удовлетворяющие условия (4.2) могут быть, например, взяты в виде $\psi_j^{(k)}(s)=\varphi_j^{(k)}(s)$.

Таким образом, фактически дано три способа численного решения возмущенных дискретных аналогов ГИУ III — ГИУ (3.5) для конечной области и ГИУ (3.8) — для бесконечной вместе с нахождением постоянных $B^{(k)}$ $(k=1\div m)$ для неодносвязных областей. Во-первых, после дискретизации ГИУ можно решать расширенную за счет условий (3.7) разрешимую систему линейных алгебраических уравнений, в которую в качестве неизвестных войдут и $B^{(k)}$, если члены с ними из h^{III} перенесены в правую часть ГИУ. Во-вторых, можно сначала решить, например, с помощью видоизмененного ряда Неймана ГИУ относительно $Q_i^{(k)}$ $(k=0\div m)$ для $m+1$ правой части, а затем найти $B^{(k)}$ из (4.1). В третьих, можно искать $B^{(k)}$ в виде (4.2), а затем решать дискретные аналоги ГИУ (4.3) или (4.4). Возможность итерационного решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при первом и третьем подходах остается неясной.

Если задачу 2 решать с помощью представления (2.13) и ГИУ I, то проблема определения дополнительных постоянных для неодносвязных областей не встает и это ГИУ (или ГИУ (3.4), если область D конечна) может решаться в том числе и с помощью ряда Неймана, но ядра этих ГИУ, в отличие от ГИУ III и его модификаций, уже будут иметь особенность типа Коши. Кроме того численное решение ГИУ I соответствующих задачам плоской деформации для упругих сред, близких к несжимаемым, может оказаться неустойчивым, если не предпринимать дополнительных мер [23]. Это связано с тем, что в отличие от ГИУ III, которое не зависит от $\varkappa$, ГИУ I при $\varkappa\to 1$ вырождается (в ГИУ III), и для $\varkappa$ близких к единице у него появляются собственные решения при характеристических числах λ близких к ± 1.

Любое решение Q_i ГИУ I породит по формулам (2.13), (2.5) решение задачи 2, а любое решение Q_i, $B^{(k)}$ ГИУ III — по формулам (2.16), (2.7) — решение задачи 2^∞. Причем, если в случае бесконечной области D для заданных граничных усилий не выполнены условия $\int g_i(s)\,ds=0$ на ∂D, т. е. суммарная сила, приложенная к границе ∂D не равна нулю, то решения ГИУ будут существовать, но построенные по ним решения краевых задач не будут удовлетворять условиям регулярности на бесконечности типа (2.12). Если решение задачи 2 ищется в виде (2.14), (2.6), то для такого представления необходимо, чтобы $\int Q_i(s)=0$ на ∂_k $(k=0\div m)$ (в противном случае $g_i(s)\notin C(\partial_k)$). Можно показать, что эти условия при $k=1\div m$, выполняются автоматически для любой правой части вида (2.15), где $A^{\vee(k)}$ дается выражением (2.14). Условие при $k=0$, которое необходимо для конечных областей, будет выполнено, если в качестве решения ГИУ III брать решения ГИУ (3.5) или (4.4). Отметим, что если берется другое решение ГИУ III и условие $\int Q_i(s)=0$ на ∂_0 не выполнено, то это решение все равно порождает решение задачи 2 по формуле (2.14), однако потенциал Вейля — Хациревича $U_i^{III}(x)$ в этом случае не будет уже даваться формулой (2.6) и выразится несколько сложнее, хотя напряжения тем не менее представляются в виде (2.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейль Г.* Асимптотический закон распределения частот собственных колебаний упругих тел произвольной формы // Вейль Г. Избр. тр. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984. С. 9–53.
2. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 280 с.
3. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
4. *Кахниашвили Н. С.* Исследование плоских задач теории упругости методом теории потенциалов // Тр. Тбил. ун-та. 1953. Т. 50. С. 23–58.
5. *Кахниашвили Н. С.* Исследование плоских задач теории упругости методом теории потенциалов для многосвязных областей // Тр. Тбил. ун-та. 1955. Т. 56. С. 173–182.
6. *Odquist F. K. G.* Über Randwertaufgaben die Hydrodynamik zäher Flussigkeiten. // Math. Z. 1930. Bd 32. H. 3. S. 329–375.
7. *Попов А. Н.* Применение теории потенциала к решению линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса в двумерном случае // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1971. Т. 116. С. 162–180.
8. *Мусхелишвили Н. М.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
9. *Хациревич И. Х.* Применение метода Вейля к решению плоской статической задачи теории упругости. // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 3. С. 197—202.
10. *Партон В. З., Перлин П. Н.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
11. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
12. *Идельс Л. В.* Об одной модификации интегральных уравнений Д. И. Шермана для первой и второй основных задач плоской теории упругости // Мех. деформируем. тела и расчет трансп. сооруж. Новосибирск: НИИЖТ, 1980. С. 59–66.
13. *Цандеков М. И.* Основные граничные задачи теории установившихся колебаний упругого изотропного тела для областей с угловыми особенностями // Тр. Тбил. ун-та. 1955. Т. 56. С. 207–230.
14. *Михайлов С. Е.* Об интегральном уравнении некоторых краевых задач для гармонических функций в плоских многосвязных областях с нерегулярной границей // Мат. сб. 1983. Т. 121. № 4. С. 533–544.
15. *Михайлов С. Е.* Решение задач об антиплоской деформации упругих тел с угловыми точками методом интегральных уравнений // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 981–987.
16. *Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А.* К решению двумерных задач теории упругости для областей с кусочно-гладкой границей // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 831–834.
17. *Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А.* Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися разрезами // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 3. С. 567–570.
18. *Михайлов С. Е., Котов Ю. И.* Интегральные уравнения плоских задач теории упругости для областей с отверстиями и углами. ЦНИИПСК, М., 1986, 73 с.— Деп. в ВИНИТИ 17.09.86, № 6695–В86.
19. *Солдатов А. П.* К нётеровской теории операторов. Одномерные сингулярные интегральные операторы общего вида // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 4. С. 706–718.
20. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
21. *Лазарев М. И., Перлин П. И.* Об одном способе построения устойчивого решения операторного уравнения на спектре // Изв. вузов. Математика. 1980. № 3. С. 19–21.
22. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
23. *Лазарев М. И.* К решению внешних краевых задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 462–468.

Москва

Поступила в редакцию
12.I.1987