

УДК 539.3

О. А. КИЛИКОВСКАЯ

## ОБРАТНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

Обратная граничная задача теории упругости, когда на части границы условия переопределены, а на другой части границы не поставлено никаких граничных условий, сведена к системе интегральных уравнений первого рода. Для круговой области построены ядра интегральных уравнений. Обратная задача решается численно методом регуляризации Тихонова. Показано, что слабоизменяемые распределения напряжений на недоступной границе восстанавливаются с высокой точностью. Распределение напряжений, имеющих области концентрации, и гармонические распределения напряжений, имеющие несколько точек смены знаков, восстанавливаются с высокой точностью лишь на части границы, примыкающей к наблюдаемой границе. В случаях, когда решение восстанавливается удовлетворительно, для определения параметра регуляризации метод «квазиоптимального  $\alpha$ » предпочтительнее метода невязки.

1. Пусть  $G$  — некоторая область,  $L+L_1$  — ее граница. На части границы  $L_1$  заданы векторы перемещений и напряжений, на другой части границы  $L$  неизвестны ни напряжения, ни перемещения. Сведем задачу к системе интегральных уравнений, используя решения прямых задач, когда на границе  $L+L_1$  заданы напряжения. Перемещения точек границы можно представить в виде

$$v_i(s) = \int_{L+L_1} \sum_{h=1}^3 U_i^h(s, l) p_{nh}(l) dl \quad (s \in L+L_1; i=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Решение существует, если выполнены условия равновесия

$$\int_{L+L_1} p_n dl = \int_{L+L_1} (p_n \times r) dl = 0 \quad (1.2)$$

Используя соотношения (1.1), (1.2) для точек  $s \in L_1$  и считая, что перемещения на  $L_1$  заданы, получим систему уравнений относительно неизвестных на  $L$  значений напряжений в исходной задаче

$$\int_L \sum_{h=1}^3 U_i^h(s, l) p_{nh}(l) dl = v_i(s) - \int_{L_1} \sum_{h=1}^3 U_i^h(s, l) p_{nh}(l) dl \quad (s \in L_1, i=1, 2, 3) \quad (1.3)$$

$$\int_L p_n dl = - \int_{L_1} p_n dl, \quad \int_L (p_n \times r) dl = - \int_{L_1} (p_n \times r) dl \quad (1.4)$$

Для трехмерной области  $dl$  — элемент граничной поверхности, в плоском случае  $dl$  — элемент дуги, а  $i=1, 2$ .

Заметим, что вид ядер  $U_i^h$  в соотношениях (1.1) определяется неоднозначно вследствие условий (1.2) и условий закрепления области. Последнее эквивалентно добавлению в соотношения (1.1) слагаемых, определяющих перемещения и поворот области как жесткого тела.

Поставленная задача аналогична задаче Коши для уравнения Лапласа. В работах [4, 2] предложены способы построения устойчивого решения в виде полиномов. В настоящей работе задача сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В подобной постановке в [3] методом регуляризации Тихонова [4]

численно решалась осесимметричная задача о восстановлении напряжений на торцах цилиндра по переопределенным условиям на боковой поверхности. Влияние погрешности построения оператора задачи, возмущения граничных условий, изменчивости восстанавливаемого распределения напряжений на возможность и точность построения решения в упомянутой работе не рассматривалось, что привело автора к ошибочно оптимистическому прогнозу о точности восстанавливаемых граничных условий на всей недоступной наблюдению границе.

Целью настоящей работы является определение возможности и качества восстановления напряжений на недоступной части границы плоской круговой области в зависимости от изменчивости функций искомого напряжения и погрешности измерения перемещений на доступной измерением границе.

2. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для круговой области единичного радиуса, симметричную относительно осей  $x$  и  $y$ : перемещения и угол поворота в центре круга примем равными нулю, а систему сил — симметричной относительно осей координат. Условия равновесия (1.2), (1.4) в этом случае выполняются автоматически, а решение можно рассматривать лишь на четверти круга. За ядра уравнений (1.3) удобно принять в этом случае перемещения в точках  $0 \leq \theta < \pi/2$  от систем четырех симметричных единичных сил, действующих в точках  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi/2$ ),  $\pi - \varphi$ ,  $\pi + \varphi$ ,  $2\pi - \varphi$ . Просуммировав четыре решения от действия единичных сил на границе круга [5] и перейдя к пределу при стремлении точки области к границе круга (с координатой  $\theta$ ), получим следующие выражения для перемещений точек границы:

$$\begin{aligned}
 U_1^1(\theta, \varphi) &= C_1 \left( \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta + \varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \varphi}{2} \right| - 2 \cos \varphi \cos \theta \right) \\
 U_2^1(\theta, \varphi) &= -2C_1 \sin \theta \cos \varphi + \begin{cases} 0 & (0 < \varphi < \theta) \\ C_2 & (\varphi < \theta < \pi/2) \end{cases} \\
 U_1^2(\theta, \varphi) &= -2C_1 \cos \theta \sin \varphi + \begin{cases} C_2 & (0 < \varphi < \theta) \\ 0 & (\varphi < \theta < \pi/2) \end{cases} \\
 U_2^2(\theta, \varphi) &= C_1 \left( \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta + \varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \varphi}{2} \right| - 2 \sin \varphi \sin \theta \right) \\
 C_1 &= 2(1 - \nu^2) / \pi E, \quad C_2 = (1 + \nu)(1 - 2\nu) / E
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

При  $\varphi = \theta$  функции  $U_i^j(\theta, \varphi)$  имеют логарифмическую особенность, а  $U_i^j(\theta, \varphi)$  — терпят разрыв первого рода. Примем равными длины недоступной  $L$  и доступной  $L_1$  частей границы, т. е.  $\pi/4 < \varphi < \pi/2$ ,  $0 < \theta < \pi/4$ . Ядра интегральных уравнений (1.3) представляются функциями (2.1). Они имеют описанные особенности лишь в точке  $g$ , общей для частей  $L$  и  $L_1$  ( $\varphi = \theta = \pi/4$ ). Примем далее, что часть границы  $L_1$  свободна от напряжений, тогда интеграл в правой части (1.3) отсутствует. Непрерывную область изменения круговых параметров  $\theta$  и  $\varphi$  заменим дискретной, помещая точки  $\theta_i$ ,  $\varphi_j$  и середины интервалов разбиения дуг, отсчитывая номера  $i, j$  от точки  $g$ :

$$\varphi_i = \pi/4 + (i - 1/2) \Delta\varphi, \quad \theta_i = \pi/4 - (i - 1/2) \Delta\theta \tag{2.2}$$

Записывая уравнение (1.3) для каждой точки  $\theta_i \in L_1$  и аппроксимируя интегралы по формуле прямоугольников, получим

$$\sum_{j=1}^N \sum_{h=1}^2 U_m^h(\theta_i, \varphi_j) p_{nh}(\varphi_j) \Delta\varphi \approx v_m(\theta_i) \quad (i=1, 2, \dots, N; \quad m=1, 2) \tag{2.3}$$

Записав уравнение (2.3) для всех точек  $\theta_i \in L_1$ , получим систему  $2N$  уравнений относительно  $2N$  неизвестных. Запишем ее в операторном виде

$$\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{u} \tag{2.4}$$

Обозначим векторы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{u}$  таким образом, что первые  $N$  их компонент соответствуют компонентам  $p_{n1}(\varphi_i) \Delta\varphi$  и  $v_1(\theta_i)$ ; соответственно строим миноры матрицы  $\mathbf{B}$ .

Рассмотрим следующие модельные задачи. По заданным на недоступной части границы  $L$  напряжения различного вида решается прямая задача, т. е. вычисляются точные для данного дискретного оператора перемещения  $u_i^0$  на части границы  $L_1$

$$u^0 = BX^0 \quad (2.5)$$

Затем строится приближенная правая часть  $u_i^p$  уравнения (2.4):

$$u_i^p = u_i^0 + \rho_i \quad (2.6)$$

Величины погрешностей  $\rho_i$  выбираются в виде

$$\rho_i = \text{amp} \|u^0\| \gamma_i, \quad \|\rho\| = \text{amp} \|u^0\| \|\gamma\| \quad (2.7)$$

где  $\gamma_i$  — случайные числа, расположенные на интервале  $(-1, 1)$  по закону равномерного распределения со средним значением, равным нулю, и дисперсией  $\sigma^2 = 1/3$ ;  $\|u^0\|$  — среднеквадратическое значение  $u_i^0$ ;  $\text{amp}$  — относительная величина амплитуды погрешности, принимающая значения 0,1; 0,01; 0,001.

Затем для точной и приближенных правых частей строятся регуляризованные решения обратной задачи по методу Тихонова, т. е. решается система

$$(B^*B + \alpha E)X^{\rho\alpha} = B^*u^p \quad (2.8)$$

здесь  $B^*$  — сопряженный оператор,  $\alpha$  — параметр регуляризации, принимающий значения  $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-9}$ . Регуляризованные решения  $X^{\rho\alpha}$  сравниваются с точным решением  $X^0$ , вычисляются отклонения регуляризованных решений от точного

$$\Delta X_i^{\rho\alpha} = X_i^{\rho\alpha} - X_i^0 \quad (i=1, 2, \dots, 2N) \quad (2.9)$$

Затем определяются среднеквадратические отклонения  $\|\Delta X^{\rho\alpha}\|$  и относительная величина среднеквадратических отклонений регуляризованных решений от точного

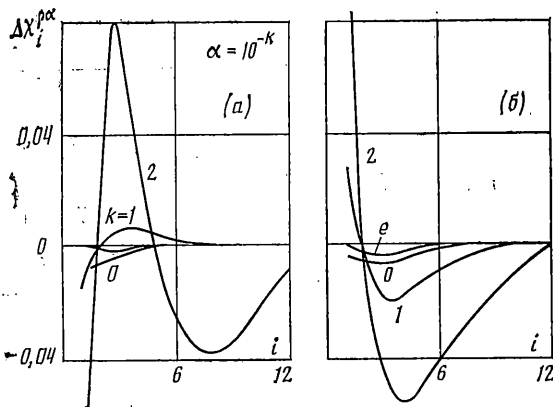
$$\varepsilon = \|\Delta X^{\rho\alpha}\| \|X\|^{-1} \quad (2.10)$$

По минимальному значению  $\varepsilon$  определяем оптимальное значение  $\alpha$  и оптимальное решение.

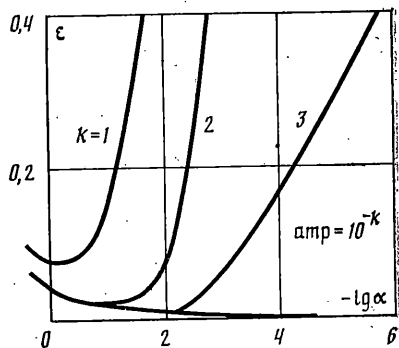
В численных примерах коэффициент Пуассона принимается равным 0,3. Модуль Юнга входит в решение множителем, примем его величиной, удобной для счета.

**3. Рассмотрим три типа восстанавливаемых распределений напряжений:** 1) слабоизменяемое распределение напряжений ( $X_i = C, X_i = \sin \varphi_i \Delta \varphi$ ), 2) напряжения, сконцентрированные на малом участке границы и 3) распределение в виде гармонических функций, имеющих несколько точек смены знака.

Проследим особенности восстановления решения на одном варианте слабоизменяемого распределения искомого напряжений. Пусть искомое решение имеет вид:  $X_i = 0, X_{i+N} = Y_i = \sin \varphi_i \Delta \varphi$ . На фиг. 1,  $a$  и  $b$  для  $N=12$  изображены отклонения регуляризованных решений  $\Delta X_i^{\rho\alpha}$  для двух видов случайных чисел ( $a$  и  $b$ ) и  $\text{amp}=0,1$  при изменении параметра регуляризации  $\alpha$ . Максимальное значение самого искомого напряжения в этом примере  $X_{24} = Y_{12} = 6,5 \cdot 10^{-2}$ . Отметим, что, несмотря на большую относительную величину возмущения ( $\text{amp}=0,1$ ), при  $\alpha=1$  отклонения мало зависят от вида возмущения и практически определяются отличием оператора задачи (2.8) от точного (2.4). На фиг. 1 изображена кривая ( $e$ ) — отклонение регуляризованного решения от точного при точном значении правой части и  $\alpha=1$ . При уменьшении параметра  $\alpha$ , т. е. при приближении регуляризирующего оператора к точному, характер отклонения, особенно в точках с малыми номерами, т. е. ближайших к  $g$ , определяется видом возмущения; так, уже при  $\alpha=0,1$  отклонения для разных видов возмущения имеют различные знаки; при  $\alpha=10^{-2}$  максимальные величины отклонений имеют порядок максимального значения искомого напряжения. При дальнейшем уменьшении  $\alpha$  порядки отклонений резко возрастают и появляются новые гармоники. На фиг. 2 изображена типичная зависимость  $\varepsilon$  от  $\alpha$ , построен-



Фиг. 1



Фиг. 2

ная для одного из видов возмущения и трех величин амплитуд. Во всех случаях после достижения максимальных значений уклонения резко возрастают; так, при  $\alpha=10^{-3}$  и  $\text{amp}=0,1$  величина  $\varepsilon \gg 1$ . Резкое возрастание уклонений при точной правой части наступает при  $\alpha=10^{-8}$ . Заметим, что «точная» правая часть фактически имеет погрешность, обусловленную «машинным» округлением чисел в восьмом знаке.

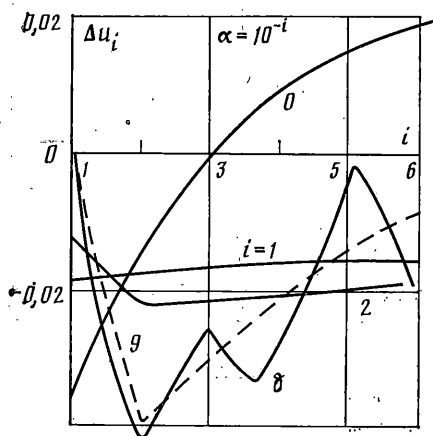
Исследование точности построения решения при различных количествах точек разбиения показали, что минимальные уклонения  $\varepsilon_{\min}$  для одного и того же уровня возмущений уменьшаются при некотором увеличении количества точек разбиения от  $N=6$  до  $N=24$ , приближаясь к уровню возмущений. Однако при дальнейшем увеличении количества точек сильнее сказывается плохая обусловленность системы.

На фиг. 3 изображены отличия «истинной» правой части, отвечающей регуляризованному решению от точной правой части  $\Delta u_i^{0\alpha} = B_{ij} X_j^{0\alpha} - u^0$  при изменении  $\alpha$ . При самых больших  $\alpha$  кривые  $\Delta u^{0\alpha}$  как бы усредняют погрешности, при убывании  $\alpha$  кривые все более точно воспроизводят характер погрешностей  $\rho_i$  (кривая  $\delta$ ), начиная с точек с малыми номерами.

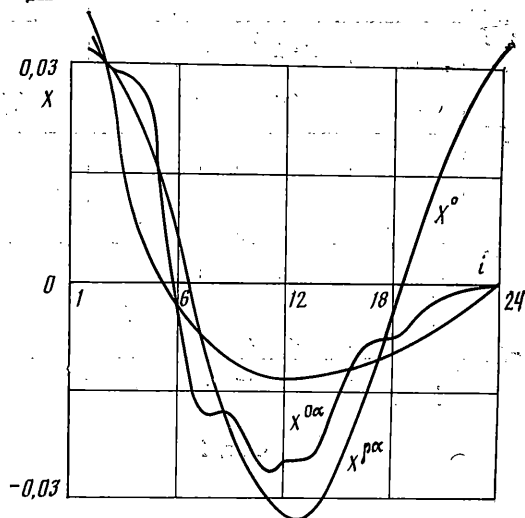
Для определения возможности восстановления концентрации напряжений на недоступной для наблюдения границе зададим единичное усилие, приложенное в одной точке, или статически эквивалентное усилие, распределенное по двум, четырем и т. д. точкам в различных частях границы  $L$ . Анализ численных решений показывает, что как степень концентрации, так и «место» концентрации восстанавливается с удовлетворительной точностью лишь, когда область концентрации расположена вблизи точки  $g$ . При малых амплитудах погрешности оптимальные решения получены при малых  $\alpha$ . В этом случае, кроме хорошо восстанавливаемых искомым всплесков значений напряжений в местах концентрации, возникают знакопеременные значения напряжений с малыми амплитудами на остальной части границы. При достаточно большом уровне погрешностей оптимальные решения получены при больших  $\alpha$ , и регуляризованное решение как бы сглаживает концентрацию. Минимальные среднеквадратичные уклонения при возмущениях с  $\text{amp}=0,1; 0,01; 0,001$  составляют соответственно в среднем 0,35; 0,25; 0,15.

Усилия, сконцентрированные в наиболее удаленных от  $g$  точках границы  $L$ , практически не восстанавливаются даже при точном задании правой части. Относительное среднеквадратичное уклонение в оптимальных случаях не опускается ниже 0,9.

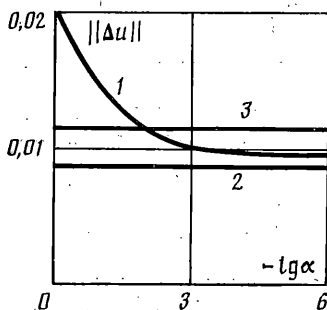
Зададим точное распределение напряжений с двумя точками смены знаков на  $L$ :  $X_i = \cos 8\alpha_i \Delta \alpha$ ,  $X_{i+N} = 0$ . Оптимальные решения при точной правой части и при одном из видов возмущений с  $\text{amp}=0,1$  даны на фиг. 4. Решение удовлетворительно совпадает с точным примерно на трети интервала  $L$ , ближайшей к  $L_1$ , на следующей трети совпадает лишь по характеру кривой. В самых далеких точках решение отличается от искомого даже



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

по знаку. Минимальные относительные среднеквадратические отклонения даже при очень малых погрешностях правой части составляют 0,6–0,7, т. е. они одного порядка с заданным уровнем напряжений.

Распределение напряжений на  $L$ , имеющее четыре точки смены знака:  $X_i = \cos 16\alpha_i \Delta\alpha$ ,  $X_{i+N} = 0$ , восстанавливается при точной правой части примерно на трети интервала, а при возмущенной ( $\text{amp} = 0,1$ ) — примерно на шестой части интервала, на остальной части границы  $L$  регуляризованные решения представляют собой почти равномерные распределения одного знака. Минимальные величины  $\varepsilon \approx 0,85$ . Уменьшение количества точек разбиения (с 24 до 6) не изменяет характера восстановленных решений, лишь немного увеличивая среднеквадратические отклонения.

Таким образом, слабоизменяемые по всей длине решения восстанавливаются методом Тихонова с точностью, ненамного меньшей, чем точность измерения перемещений на доступной части границы.

Участки резко изменяемых напряжений удовлетворительно восстанавливаются лишь на малой части интервала, примыкающей к граничной точке  $g$ . При этом перемещения на  $L_1$ , которые отвечают полученным регуляризованным решениям, сглаженным на удаленной части границы  $L_1$ , мало отличаются от точных значений перемещений. Это соответствует физическому представлению о близости перемещений на  $L_1$  независимо от дифференциальных свойств действующих усилий на удаленной части границы  $L$  (принцип Сен-Венана). Метод Тихонова из этих возможных распределений «выбирает» наиболее гладкие.

4. Уклонения решения при уменьшении величины  $\alpha$  по сравнению с оптимальной резко возрастают. Это говорит о необходимости очень точного определения параметра регуляризации.

В численных экспериментах оптимальное решение и соответствующий оптимальный параметр находят путем непосредственного сравнения с известным точным решением. В реальных задачах известен лишь приближенный уровень погрешности, задаваемый точностью прибора. В работе рассмотрено два способа нахождения оптимального параметра: метод «невязки» и метод «квазиоптимального  $\alpha$ », использующие лишь заданную в реальной задаче информацию.

Невязка вычисляется после подстановки регуляризованного решения  $X_i^{\rho\alpha}$  в исходное уравнение  $\Delta u_i^{\rho\alpha} = B_{ij} X_j^{\rho\alpha} - u_i^{\rho}$ . По методу «невязки» параметр  $\alpha$  считается оптимальным, когда уровень невязки совпадает с уровнем погрешности, т. е.  $\alpha^* : \min_{\alpha} (\|\Delta u^{\rho\alpha}\| - \|\rho\|)$ . В реальных задачах уровень погрешности может быть оценен математическим ожиданием среднеквадратической величины  $\rho_i$ , в рассматриваемых примерах согласно (2.7) математическое ожидание  $\rho = \text{amp } \|u^0\| \sigma$ . В численном эксперименте точно известны сами величины  $\rho_i$ , поэтому можно вычислить точную среднеквадратическую величину погрешности  $\|\rho\|$ . Эти величины различны для каждой реализации и несколько отличаются от математического ожидания  $\rho$ .

Типичная зависимость среднеквадратической величины  $\|\Delta u^{\rho\alpha}\|$  от параметра регуляризации, полученная в численных экспериментах, приведена на фиг. 5 в виде кривой 1. Пересечение кривой 1 с прямой 2:  $\|\Delta u\| = \|\rho\|$  определяет величину оптимального параметра по методу невязки. Для зависимости 1 характерно, что, начиная с некоторой величины  $\alpha$ , при дальнейшем уменьшении параметра невязка убывает очень медленно, как бы приближаясь к асимптоте, отличной от нуля.

Обработка многочисленных вариантов показывает, что прямая 2 может лежать выше «асимптоты», почти совпадать с ней и проходить ниже нее. В последних двух случаях величина  $\alpha^*$  может оказаться существенно меньше оптимальной величины  $\alpha^*$ , либо вообще не может быть определена при разумном ограничении изменения параметра. При этом величины отклонений существенно превышают максимальные значения самих решений. Пересечение же с прямой 3:  $\|\Delta u\| = \|\rho\|$ , вычисленной по конкретной реализации случайных погрешностей, дает, как правило, для  $\alpha$  величину, очень близкую к оптимальной величине  $\alpha^*$ . Таким образом, метод «невязки» оказывается в данной задаче очень чувствительным к точности определения уровня погрешности. Незначительное занижение уровня погрешности по сравнению с действительным фактически не позволяет определить методом «невязки» величину оптимального параметра.

Оптимальным параметром по упрощенному методу «квазиоптимального  $\alpha$ » считается тот, при котором достигается нижняя грань величин  $\|X^{\alpha} - X^{\alpha-1}\|$  при изменении  $\alpha$  по геометрической прогрессии. Во всех рассмотренных примерах, когда решение методом Тихонова получено с удовлетворительной точностью, величина  $\alpha$ , определенная этим методом, достаточно мало отличалась от истинных оптимальных величин  $\alpha^*$ . Исключением являются лишь случаи малых количеств точек разбиения ( $N=6$ ), когда метод невязки оказался предпочтительнее. Причем в рассматриваемых примерах, как правило, параметр  $\alpha$ , определенный методом квазиоптимального  $\alpha$ , несколько больше оптимального, т. е. в отклонениях регуляризованных решений отсутствуют высокочастотные составляющие, а отклонение определяется отличием регуляризирующего оператора от точного.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 92 с.
2. *Мергелян С. Н.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. № 5. С. 644–647.
3. *Фомин А. В.* Определение напряженного состояния в объеме детали по известным перемещениям или напряжениям на части ее поверхности // Машиноведение. 1982. № 4. С. 67–73.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 827 с.
5. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Москва

Поступила в редакцию  
5.III.1987