МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1989

УДК 539.3

В. В. ВЫЛЕВА, Р. Л. САЛГАНИК

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТРИКЦИИ МАТЕРИАЛА С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Рассматривается задача о статическом или квазистатическом напряженно-деформированном состоянии материала с эллипсоидальной неоднородностью при однородном воздействии на бесконечности. Проводимость и возможные нелинейные эффекты предполагаются несущественными. При этом задачи об электрострикции и о магнитострикции математически аналогичны [1], так что достаточно рассмотреть одну из них.

Рассмотрение проведено для задачи об электрострикции в предположении, что деформации упругие, малые и их влиянием на распределение электрического поля можно пренебречь, в связи с чем это распределение задается известным решением соответствующей задачи [1, 2].

Ниже задача об электрострикции в такой постановке сведена к двум задачам теории упругости (без распределенных по объему сил). Показано, что в случае предельно уплощенной, т. е. трещиновидной неоднородности, а также в других случаях, но при определенных ограничениях на относительные значения констант материала и неоднородности, обе эти задачи сводятся к аналитически решенным в [3, 4]. Сведение задачи к упомянутым двум задачам теории упругости выполнено на основе результатов [5, 6].

Таким образом, получается широкий класс случаев в которых расчеты и исследования можно производить на основе уже известных аналитических результатов.

1. Постановка задачи. Предположим, что изотропное бесконечное тело с изотропной эллипсоидальной неоднородностью (материалы тела и неоднородности предполагаются однородными) находится под действием однородных на бесконечности электрического поля с вектором напряженности E_j и поля механических напряжений $\sigma_{jl}^{(\infty)}$ в декартовой системе координат x_j ($j=1, 2, 3$). Начало координат поместим в центре эллипсоида, а оси координат x_j направим по его осям. Длины полуосей эллипсоида обозначим $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$.

Считая электрическое поле статическим (квазистатическим), вектор его напряженности можно записать в виде $E_j=-\varphi_{,j}$, где $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ — электрический потенциал и индекс, стоящий после запятой, означает частную производную по соответствующей координате.

Пренебрегая влиянием деформаций на диэлектрическую проницаемость, имеем

$$\varphi_{,ll}^{(e)}=0, \quad \varphi_{,ll}^{(i)}=0 \tag{1.1}$$

Здесь и далее верхними индексами e и i в скобках обозначаются величины, относящиеся к внешности и внутренности эллипсоида соответственно, а по повторяющимся нижним индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Если соотношение одинаково записывается вне и внутри неоднородности, верхние индексы могут не употребляться.

Граничные условия для φ на поверхности неоднородности записываются в виде [1]:

$$\varphi^{(e)}=\varphi^{(i)}, \quad \varepsilon_0^{(e)}\varphi_{,\nu}^{(e)}=\varepsilon_0^{(i)}\varphi_{,\nu}^{(i)} \tag{1.2}$$

где $\varepsilon_0^{(e)}$, $\varepsilon_0^{(i)}$ — диэлектрические проницаемости и дифференцирование производится по направлению внешней нормали, задаваемой единичным вектором ν_j.

Условие на бесконечности имеет вид

$$\varphi(\infty)=\varphi^{(H)}=-E_k x_k \tag{1.3}$$

т. е. $\varphi^{(H)}$ — потенциал однородного внешнего поля.

Уравнениями (1.1) и условиями (1.2), (1.3) распределение электрического поля полностью определено.

Перейдем теперь к задаче о напряженно-деформированном состоянии, возникающем под действием электрострикции и приложенных механических напряжений. Обозначим через u_j — вектор смещения, через $u_{jl}={}^1/_2(u_{j,l}+u_{l,j})$ — тензор малых деформаций и через σ_{jl} — тензор напряжений. Тогда с учетом электрострикции [1] диэлектрическая проницаемость становится в общем случае анизотропной и выражается (в линейном по деформациям приближении) тензором

$$\varepsilon_{jl}=\varepsilon_0\delta_{jl}+a_1 u_{jl}+a_2 u_{nn}\delta_{jl} \tag{1.4}$$

где a_1, a_2 — постоянные материала, δ_{jl} — единичный тензор. Напряжения записываются в виде

$$\sigma_{jl}=\sigma_{jl}^{(0)}+b_1\varphi_{,j}\varphi_{,l}-b_2(\varphi_{,n})^2\delta_{jl} \tag{1.5}$$

где $b_1=(2\varepsilon_0-a_1)/8\pi$, $b_2=(\varepsilon_0+a_2)/8\pi$, а напряжения $\sigma_{jl}^{(0)}$ связаны с деформациями u_{jl} законом Гука (K — модуль объемного сжатия, G — модуль сдвига):

$$\sigma_{jl}^{(0)}=Ku_{nn}\delta_{jl}+2G(u_{jl}-{}^1/_3u_{nn}\delta_{jl}) \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) с учетом (1.6) в уравнения равновесия $\sigma_{lj,l}=0$, находим

$$(K+{}^1/_3G)u_{l,jl}+Gu_{j,ll}=(2b_2-b_1)\varphi_{,l}\varphi_{,jl} \tag{1.7}$$

Считая, что на поверхности неоднородности выполняются условия полного сцепления, получаем следующие граничные условия на ней и на бесконечности

$$\begin{gathered} u_j^{(e)}=u_j^{(i)}, \quad \sigma_{jl}^{(e)}\nu_l=\sigma_{jl}^{(i)}\nu_l \\ \sigma_{jl}^{(e)}(\infty)=\sigma_{jl}^{(0)}(\infty)+b_1^{(e)}\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}-b_2^{(e)}(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}=\sigma_{jl}^{(\infty)} \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь напряжения $\sigma_{jl}^{(0)}(\infty)$ связаны с соответствующими деформациями на бесконечности соотношением (1.6).

Решение задачи для φ известно [1, 2]. С учетом этого задача для системы уравнений (1.7) с условиями (1.8) полностью определяет искомое напряженно-деформированное состояние.

2. Преобразование задачи. Решение уравнений (1.7) представим (как и в [6]) в виде $u_j=\eta_j+w_j$, где η_j — частное решение уравнений (1.7), а w_j — решение соответствующих однородных уравнений.

При этом, напряжения σ_{jl} (1.5) принимают вид

$$\sigma_{jl}=q_{jl}+S_{jl}-(1-H)[b_2(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}-b_1\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}] \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} q_{jl}=K\{\eta_{nn}-\beta_2[(\varphi_{,n})^2-(1-H)(\varphi_{,n}^{(H)})^2]\delta_{jl}\}+ \\ +2G\{\eta_{jl}+\beta_1[\varphi_{,j}\varphi_{,l}-(1-H)\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}]-{}^1/_3\eta_{nn}\delta_{jl}\} \\ S_{jl}=Kw_{nn}\delta_{jl}+2G(w_{jl}-{}^1/_3w_{nn}\delta_{jl}) \\ \beta_1=b_1/2G, \quad \beta_2=b_2/K, \quad H^{(e)}=0, \quad H^{(i)}=1 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Граничные условия (1.8) будут удовлетворены, если будут удовлетворены следующие граничные условия

$$\eta_j^{(e)}=\eta_j^{(i)}, \quad \eta_j^{(e)}(\infty)=0 \tag{2.3}$$

$$w_j^{(e)}=w_j^{(i)},\quad (S_{jl}^{(e)}-S_{jl}^{(i)})\nu_l=[-(q_{jl}^{(e)}-q_{jl}^{(i)})+b_2^{(e)}(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}-b_1^{(e)}\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}]\nu_l \tag{2.4}$$

$$S_{jl}^{(e)}(\infty)=S_{jl}^{(\infty)}=\sigma_{jl}^{(\infty)}+b_2^{(e)}(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}-b_1^{(e)}\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)},\quad w_{jl}(\infty)=u_{jl}(\infty)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к решению двух задач. Первая задача, об отыскании частного решения, ставится для уравнений (1.7) с заменой в них u_j на η_j при граничных условиях (2.3). Вторая задача ставится для тех же уравнений (1.7), но с нулевой правой частью, с заменой u_j на w_j при граничных условиях (2.4).

3. Решение первой задачи. Это решение находится аналогично тому, как найдено частное решение в [6]. Положим

$$\eta_j=U_{,j} \tag{3.1}$$

Граничные условия (2.3) будут удовлетворены, если

$$U^{(e)}=U^{(i)},\quad U_{,\nu}^{(e)}=U_{,\nu}^{(i)},\quad U^{(e)}(\infty)=0 \tag{3.2}$$

Подстановка (3.1) в (1.7) после преобразований с использованием соотношений

$$^1/_2[(\varphi_{,l})^2]_{,j}=\varphi_{,l}\varphi_{,jl},\quad ^1/_2(\varphi^2)_{,ll}=(\varphi_{,l})^2 \tag{3.3}$$

получающихся с учетом (1.1), дает

$$\{(K+{}^4/_3G)U-{}^1/_4(2b_2-b_1)[\varphi^2-(1-H)(\varphi^{(H)})^2]\}_{,llj}=0 \tag{3.4}$$

При этом использовано то обстоятельство, что $[(\varphi^{(H)})^2]_{,llj}=0$. Из (3.2) и (1.3) следует, что выражение в фигурных скобках в (3.4) обращается в нуль на бесконечности. Это означает, что знак дифференцирования по x_j в (3.4) можно опустить. В результате, из (3.4) с учетом (3.3) находим

$$U_{,ll}=m[(\varphi_{,l})^2-(1-H)(\varphi_{,l}^{(H)})^2],\quad m=(2b_2-b_1)[2(K+{}^4/_3G)]^{-1} \tag{3.5}$$

Из (3.1), (3.5) и (2.2) имеем

$$q_{jl}=2G\{U_{,jl}-(m+\beta_1/2)[(\varphi_{,n})^2-(1-H)(\varphi_{,n}^{(H)})^2]\delta_{jl}+ \\ +\beta_1[\varphi_{,j}\varphi_{,l}-(1-H)\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}] \tag{3.6}$$

Из (3.4) находим

$$\Phi_{,ll}^{(e)}=0,\quad \Phi^{(e)}=U^{(e)}-(m^{(e)}/2)[(\varphi^{(e)})^2-(\varphi^{(H)})^2] \\ \Phi_{,ll}^{(i)}=0,\quad \Phi^{(i)}=U^{(i)}-(m^{(i)}/2)(\varphi^{(i)})^2 \tag{3.7}$$

Введем потенциалы

$$v=\int\limits_V\frac{dV'}{R},\quad v_j=\int\limits_S\frac{\nu_j'}{R}dS',\quad v_{jl}=\int\limits_S\frac{x_j\nu_l'}{R}dS',\quad R=[(x_l-x_l')^2]^{1/2}$$

где интегрирование производится по координатам со штрихом по объему V и по поверхности S эллипсоида.

Пользуясь известными соотношениями теории потенциала, находим

$$v_{,ll}^{(e)}=0,\quad v_{,ll}^{(i)}=-4\pi,\quad v_{j,ll}=0,\quad v_{ij,ll}=0 \tag{3.8}$$

причем на границе эллипсоида

$$v_{,\nu}^{(e)}=v_{,\nu}^{(i)},\quad v_{j,\nu}^{(e)}=v_{j,\nu}^{(i)}-4\pi\nu_j,\quad v_{jl,\nu}^{(e)}=v_{jl,\nu}^{(i)}-4\pi x_j\nu_l$$

Решение задачи (1.1)—(1.3) для φ можно представить в виде [1, 2]:

$$\varphi=L_{(j)}E_jv_j+\varphi^{(H)},\quad L_j=(\varepsilon_0^{(e)}-\varepsilon_0^{(i)})[(\varepsilon_0^{(e)}-\varepsilon_0^{(i)})I_j-4\pi\varepsilon_0^{(e)}]^{-1} \tag{3.9}$$

$$I_1=I_a=2\pi abc\int_0^\infty (a^2+s)^{-3/2}[(b^2+s)(c^2+s)]^{-1/2}\,ds$$

Выражения для $I_2=I_b$, $I_3=I_c$ получаются отсюда одновременно круговыми перестановками индексов a, b, c и 1, 2, 3.

Из (3.9) и формулы [4]:

$$v^{(i)}={}^1/_2(I_{(k)}a_k^2-I_{(k)}x_k^2),\quad v_j^{(i)}=I_{(j)}x_j \tag{3.10}$$

следует, что

$$\varphi^{(i)}=-\varkappa_{(j)}E_jx_j,\ \varkappa_j=1-L_{(j)}I_j \tag{3.11}$$

Из (3.2), (3.7) с учетом (1.2), (1.3), (3.11) находим следующие граничные условия для Φ:

$$\Phi^{(e)}-\Phi^{(i)}={}^1/_2B_{jl}x_jx_l,\quad \Phi_{,\nu}^{(e)}-\Phi_{,\nu}^{(i)}=C_{jl}x_j\nu_l,\quad \Phi^{(e)}(\infty)=0 \tag{3.12}$$

$$B_{jl}=[m^{(e)}-(m^{(e)}-m^{(i)})\varkappa_{(j)}\varkappa_{(l)}]E_jE_l$$

$$C_{jl}=\{m^{(e)}-[m^{(e)}(\varepsilon_0^{(i)}/\varepsilon_0^{(e)})-m^{(i)}]\varkappa_{(j)}\varkappa_{(l)}\}E_jE_l$$

Положим далее

$$\Phi=\Phi_*-(4\pi)^{-1}B_{ll}v-{}^1/_2HB_{jl}x_jx_l \tag{3.13}$$

С учетом непрерывности v и $v_{,\nu}$ на границе, из (3.12) получаем следующие граничные условия для Φ_*:

$$\Phi_*^{(e)}-\Phi_*^{(i)}=0,\quad \Phi_{*,\nu}^{(e)}-\Phi_{*,\nu}^{(i)}=-F_{jl}x_j\nu_l,\quad \Phi_*^{(e)}(\infty)\neq 0 \tag{3.14}$$

$$F_{jl}=B_{jl}-C_{jl}$$

Из (3.7), (3.13) и первых двух равенств (3.8) следует, что $\Phi_{*,ll}=0$ и решение этого уравнения с граничными условиями (3.14) имеет вид $\Phi_*=(4\pi)^{-1}F_{jl}v_{jl}$. Тогда

$$\Phi=(4\pi)^{-1}F_{jl}v_{jl}-(4\pi)^{-1}B_{ll}v-{}^1/_2B_{jl}Hx_jx_l$$

Отсюда и из (3.7), воспользовавшись формулами (3.10), (3.11), а также формулой (4.18) работы [6], находим

$$U^{(e)}={}^1/_2m^{(e)}[L_{(j)}L_{(l)}v_jv_l-2L_{(j)}v_jx_l]E_jE_l+(4\pi)^{-1}(F_{jl}v_{jl}-B_{ll}v) \tag{3.15}$$

$$U^{(i)}=U_*^{(i)}+{}^1/_2U_{jl}^{(i)}x_jx_l \tag{3.16}$$

где (D_{pqjl}, D'_{pqjl} зависят от a, b, c и определены в [6]):

$$U_{jl}^{(i)}=m^{(i)}\varkappa_{(j)}\varkappa_{(l)}E_jE_l-[\delta_{jp}\delta_{lq}-(4\pi)^{-1}I_{(l)}\delta_{pq}\delta_{jl}]B_{pq}+(2\pi)^{-1}(D_{pqjl}+D'_{pqjl})F_{pq}$$

а $U_*^{(i)}$ не зависит от координат и поэтому не влияет на вектор смещения η_j, который получается подстановкой (3.15), (3.16) в (3.1). Найдем напряжения $q_{jl}^{(i)}$ и $q_{jl}^{(e)}$.

Из (3.5), (3.6) и (3.16) имеем

$$q_{jl}^{(i)}=2G^{(i)}\{U_{jl}^{(i)}-U_{nn}^{(i)}\delta_{jl}+\beta_1^{(i)}[\varphi_{,j}^{(i)}\varphi_{,l}^{(i)}-{}^1/_2(\varphi_{,n}^{(i)})^2\delta_{jl}]$$

$$U_{nn}^{(i)}=m^{(i)}\varkappa_{(s)}^2E_s^2$$

С учетом (3.5) находим

$$\begin{aligned}&U_{jl}^{(e)}-U_{jl}^{(i)}=f\nu_j\nu_l\\&f=\{m^{(e)}(\varphi_{,l}^{(e)})^2-m^{(i)}(\varphi_{,l}^{(i)})^2-m^{(e)}(\varphi_{,l}^{(H)})^2\}\end{aligned} \tag{3.17}$$

Исключая отсюда $\varphi_{,l}^{(e)}$ (для этого удобно разложить вектор $\varphi_{,l}^{(e)}$ на нормальную и тангенциальную составляющие на границе, используя со-

отношения (1.2) $\varphi_{,l}^{(e)}=\varphi_{,\nu}^{(e)}\nu_l+(\varphi_{,l}^{(e)}-\varphi_{,\nu}^{(e)}\nu_l)=(\varepsilon_0^{(i)}/\varepsilon_0^{(e)})\varphi_{,j}^{(i)}\nu_j\nu_l+(\varphi_{,l}^{(i)}-$
$-\varphi_{,j}^{(i)}\nu_j\nu_l)$, находим

$$f=\{m^{(e)}[(\varepsilon_0^{(i)}/\varepsilon_0^{e})^2-1]\varkappa_{(j)}\varkappa_{(l)}\nu_j\nu_l+[(m^{(e)}-m^{(i)})\varkappa_{(j)}\varkappa_{(l)}-m^{(e)}]\delta_{jl}\}E_jE_l \tag{3.18}$$

Из (3.6) с учетом (3.5), (3.16)–(3.18) имеем

$$q_{jl}^{(e)}=2G^{(e)}\{U_{jl}^{e)}+f\nu_j\nu_l-(U_{nn}^{(i)}+f)\delta_{jl}-$$
$$-(\beta_1^{(e)}/2)[(\varphi_{,n}^{(e)})^2-(\varphi_{,n}^{(H)})^2]\delta_{jl}+\beta_1^{(e)}[\varphi_{,j}^{(e)}\varphi_{,l}^{(e)}-\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}] \tag{3.19}$$

4. Решение второй задачи. Эта задача ставится для уравнений (1.7) с нулевой правой частью, с заменой u_j на w_j и при граничных условиях (2.4). Положим

$$w_j=w_j'-w_{jl}{}^{\beta}x_l,\quad w_{jl}{}^{\beta}=U_{jl}^{(i)}-{}^1/_3U_{nn}^{(i)}\delta_{jl} \tag{4.1}$$

Вектор w_j' очевидно удовлетворяет однородным уравнениям (1.7) при подстановке вместо u_j. Соответствующие w_j' напряжения определяются выражением

$$S_{jl}'=Kw_{nn}'\delta_{jl}+2G(w_{jl}'-{}^1/_3w_{nn}'\delta_{jl}) \tag{4.2}$$

Из (2.4) с учетом (3.6), (3.19), (4.1), (4.2) получаем следующие граничные условия

$$w_j'^{(e)}=w_j'^{(i)} \tag{4.3}$$

$$(S_{jl}'^{(e)}-S_{jl}'^{(i)})\nu_l=\{{}^4/_3(G^{(e)}-G^{(i)})U_{nn}^{(i)}\delta_{jl}-{}^1/_2(2b_2^{(e)}-b_1^{e)})(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}+$$
$$+{}^1/_2[b_1^{(e)}(\varphi_{,n}^{(e)})^2-b_1^{(i)}(\varphi_{,n}^{(i)})^2]\delta_{jl}-[b_1^{(e)}\varphi_{,j}^{(e)}\varphi_{,l}^{(e)}-b_1^{(i)}\varphi_{,j}^{(i)}\varphi_{,l}^{(i)}]\}\nu_l$$

Исключая отсюда $\varphi_{,l}^{(e)}$ аналогично тому, как это было сделано выше и воспользовавшись формулами (1.2) и (3.11), получаем

$$(S_{jl}'^{(e)}-S_{jl}'^{(i)})\nu_l=\{(\beta^{(e)}-\beta^{(i)})(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}+(\gamma^{(e)}-\gamma^{(i)})\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}\}\nu_l \tag{4.4}$$

$$\beta^{(e)}=\frac{2b_2^{(e)}-b_1^{(e)}}{2K^{(e)}}+\frac{4}{3}\frac{G^{(e)}}{K^{(e)}}\frac{U_{nn}^{(i)}}{(\varphi_{,n}^{(H)})^2}+\frac{\beta_0^{(e)}}{2K^{(e)}(\varphi_{,n}^{(H)})^2}$$

$$\beta^{(i)}=\frac{4}{3}\frac{G^{(i)}}{K^{(i)}}\frac{U_{nn}^{(i)}}{(\varphi_{,n}^{(H)})^2}+\frac{\beta_0^{(i)}}{2K^{(i)}(\varphi_{,n}^{(H)})^2} \tag{4.5}$$

$$\beta_0^{(e)}=b_1^{(e)}\{[(\varepsilon_0^{(i)}/\varepsilon_0^{(e)})^2-1]\nu_k\nu_n+\delta_{kn}\}\varkappa_{(k)}\varkappa_{(n)}E_kE_n$$

$$\beta_0^{(i)}=b_1^{(i)}\varkappa_{(n)}^2E_n^2,\quad \gamma=\gamma_0/(\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)})$$

$$\gamma_0^{(e)}=\beta_1^{(e)}(\varepsilon_0^{(i)}/\varepsilon_0^{(e)})\{\delta_{js}-[1-(\varepsilon_0^{(i)}/\varepsilon_0^{(e)})]\nu_s\nu_j\}\varkappa_{(s)}\varkappa_{(l)}E_sE_l$$

$$\gamma_0^{(i)}=\beta_1^{(i)}\varkappa_{(j)}\varkappa_{(l)}E_jE_l$$

На бесконечности имеем

$$S_{jl}'^{(e)}(\infty)=S_{jl}^{(\infty)}+2G^{(e)}w_{jl}{}^{\beta},\quad w_{jl}'(\infty)=w_{jl}^{(\infty)}+w_{jl}{}^{\beta} \tag{4.6}$$

Положим далее

$$w_j'=w_{\mathrm{I}j}+w_{\mathrm{II}j},\quad S_{\mathrm{I}jl}=Kw_{\mathrm{I}nn}\delta_{jl}+2G(w_{\mathrm{I}jl}-{}^1/_3w_{\mathrm{I}nn}\delta_{jl}] \tag{4.7}$$

$$S_{\mathrm{II}jl}=K[w_{\mathrm{II}nn}-\beta(\varphi_{,n}^{(H)})^2]\delta_{jl}+2G[w_{\mathrm{II}jl}+\gamma\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}-{}^1/_3 w_{\mathrm{II}nn}\delta_{jl}]$$

потребовав, чтобы векторы $w_{\mathrm{I}j}$, $w_{\mathrm{II}j}$ также удовлетворяли однородным уравнениям (1.7).

Из (4.2) и (4.7) имеем

$$S_{jl}'=S_{\mathrm{I}jl}+S_{\mathrm{II}jl}+K\beta(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}-2G\gamma\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}$$

Граничные условия (4.3), (4.4) и (4.6) будут удовлетворены, если

$$w_{\mathrm{I}j}^{(e)}=w_{\mathrm{I}j}^{(i)}, \quad (S_{\mathrm{I}jl}^{(e)}-S_{\mathrm{I}jl}^{(i)})\nu_l=0,$$

$$w_{\mathrm{I}jl}(\infty)=w_{jl}'(\infty)-{}^1/_3\beta^{(e)}(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}+\gamma^{(e)}\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)} \tag{4.8}$$

$$w_{\mathrm{II}j}^{(e)}=w_{\mathrm{II}j}^{(i)}, \quad (S_{\mathrm{II}jl}^{(e)}-S_{\mathrm{II}jl}^{(i)})\nu_l=0, \quad w_{\mathrm{II}jl}(\infty)={}^1/_3\beta^{(e)}(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}-\gamma^{(e)}\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}$$

Задачи для $w_{\mathrm{I}j}$ и $w_{\mathrm{II}j}$, удовлетворяющих при подстановке вместо u_j уравнениям (1.7) с нулевыми правыми частями и граничным условиям (4.8) сводятся к задачам, решенным аналитически в [3, 4], если $w_{\mathrm{I}jl}(\infty)$ и $w_{\mathrm{II}jl}(+)$ — постоянные величины.

В общем случае $w_{\mathrm{I}jl}(\infty)$ и $w_{\mathrm{II}jl}(\infty)$ переменны, причем их переменность связана с переменностью величин $\beta_0^{(e)}$ и $\gamma_0^{(e)}$. Однако, как видно из (4.5), эти величины, а с ними и $w_{\mathrm{I}jl}(\infty)$, $w_{\mathrm{II}jl}(\infty)$ становятся постоянными и тем самым решение исходной задачи сводится к известным аналитическим решениям в случае предельно уплощенной неоднородности, поскольку в этом случае две компоненты единичного вектора нормали ν_j становятся исчезающе малыми всюду, за исключением узкой приконтурной полоски, ширина которой стремится к нулю по мере уплощения эллипсоида.

Другой случай, в котором $w_{\mathrm{I}jl}(\infty)$, $w_{\mathrm{II}jl}(\infty)$ можно считать постоянными и решение исходной задачи сводится к известным решениям, имеет место при определенных сочетаниях констант материала и неоднородности (каких именно — видно из (4.5)).

Наконец, отметим, что приближенное решение исходной задачи, когда эллипсоид не сильно уплощенный, можно получить, воспользовавшись теми же известными решениями, если заменить величины $\beta_0^{(e)}$, $\gamma_0^{(e)}$ их средними по поверхности эллипсоида значениями.

Имея в виду перечисленные случаи, получаем, что задача для $w_{\mathrm{I}j}$ представляет собой задачу теории упругости об эллипсоидальной неоднородности во внешнем однородном поле деформаций [3, 4], а задача для $w_{\mathrm{II}j}$ представляет собой задачу о напряженно-деформированном состоянии, создаваемом эллипсоидальной неоднородностью в результате того, что она претерпевает превращение, которое в состоянии, свободном от стеснения со стороны окружающего материала, выражается тензором деформаций $e_{jl}^{*\mathrm{T}}$ [3, 4]. Искомые смещения u_j, удовлетворяющие уравнениям (1.7) и граничным условиям (1.8) записываются в виде $u_j=\eta_j+w_{\mathrm{I}j}+w_{\mathrm{II}j}-w_{jl}^{\beta}x_l$.

Для напряжений (2.1) имеем

$$\sigma_{jl}=q_{jl}+S_{\mathrm{I}jl}+S_{\mathrm{II}jl}+K\beta(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}-2G\gamma\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}-$$

$$-2Gw_{jl}^{\beta}-(1-H)[b_2(\varphi_{,n}^{(H)})^2\delta_{jl}-b_1\varphi_{,j}^{(H)}\varphi_{,l}^{(H)}]$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. 620 с.
2. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.– М.: ОНТИ. 1937. 998 с.
3. *Эшелби Дж.* Определение поля упругих напряжений, создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой.– В кн.: Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1963. С. 103–139.
4. *Эшелби Дж* Упругое поле вне эллипсоидального включения.– В кн.: Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1963. С. 140–153.
5. *Салганик Р. Л.* Разогрев материала с эллипсоидальной неоднородностью вследствие электрических потерь // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 98–109.
6. *Салганик Р. Л.* Термоупругое поле в материале с эллипсоидальной неоднородностью, создаваемое быстрым элекронагревом // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 53–62.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1989